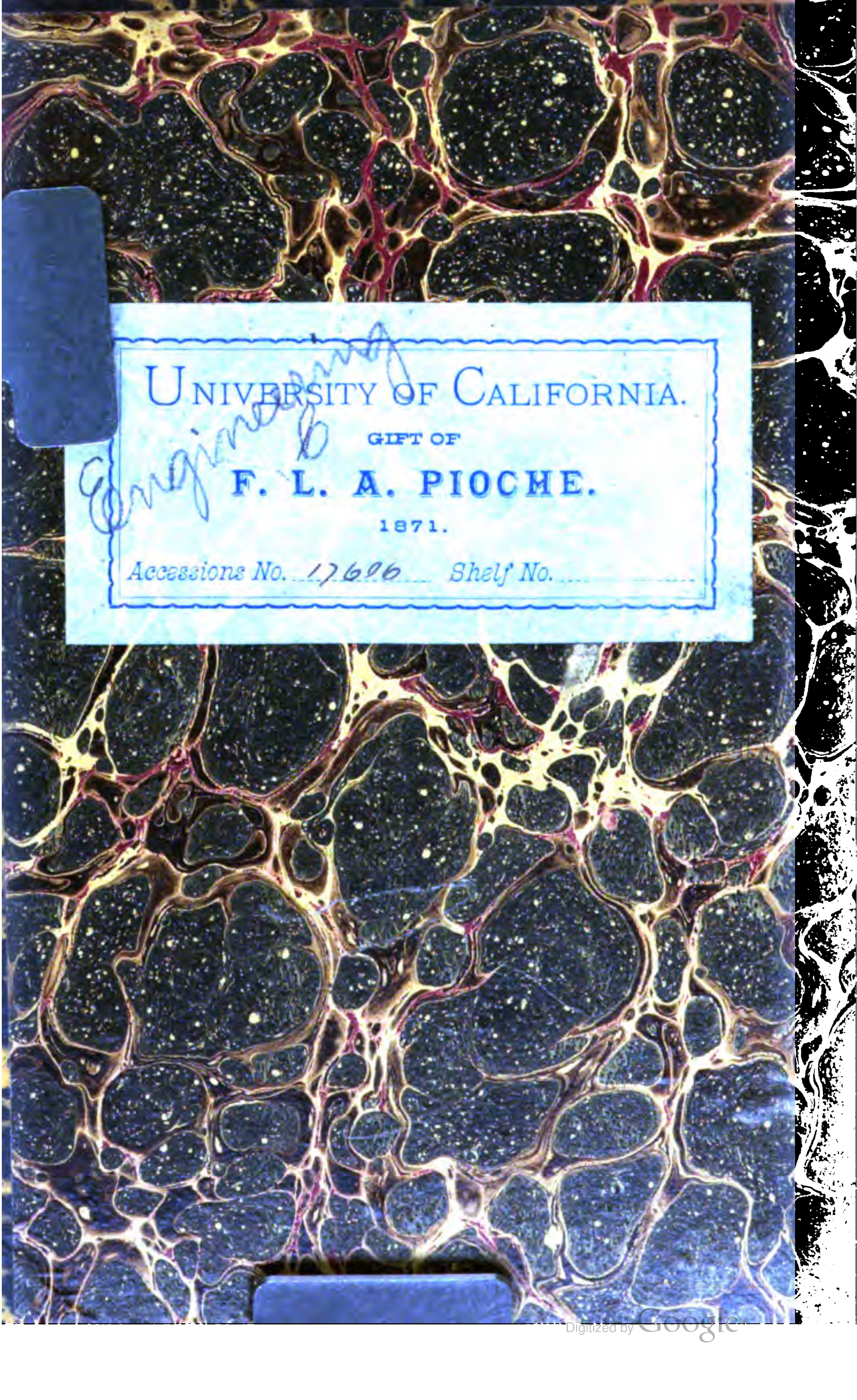
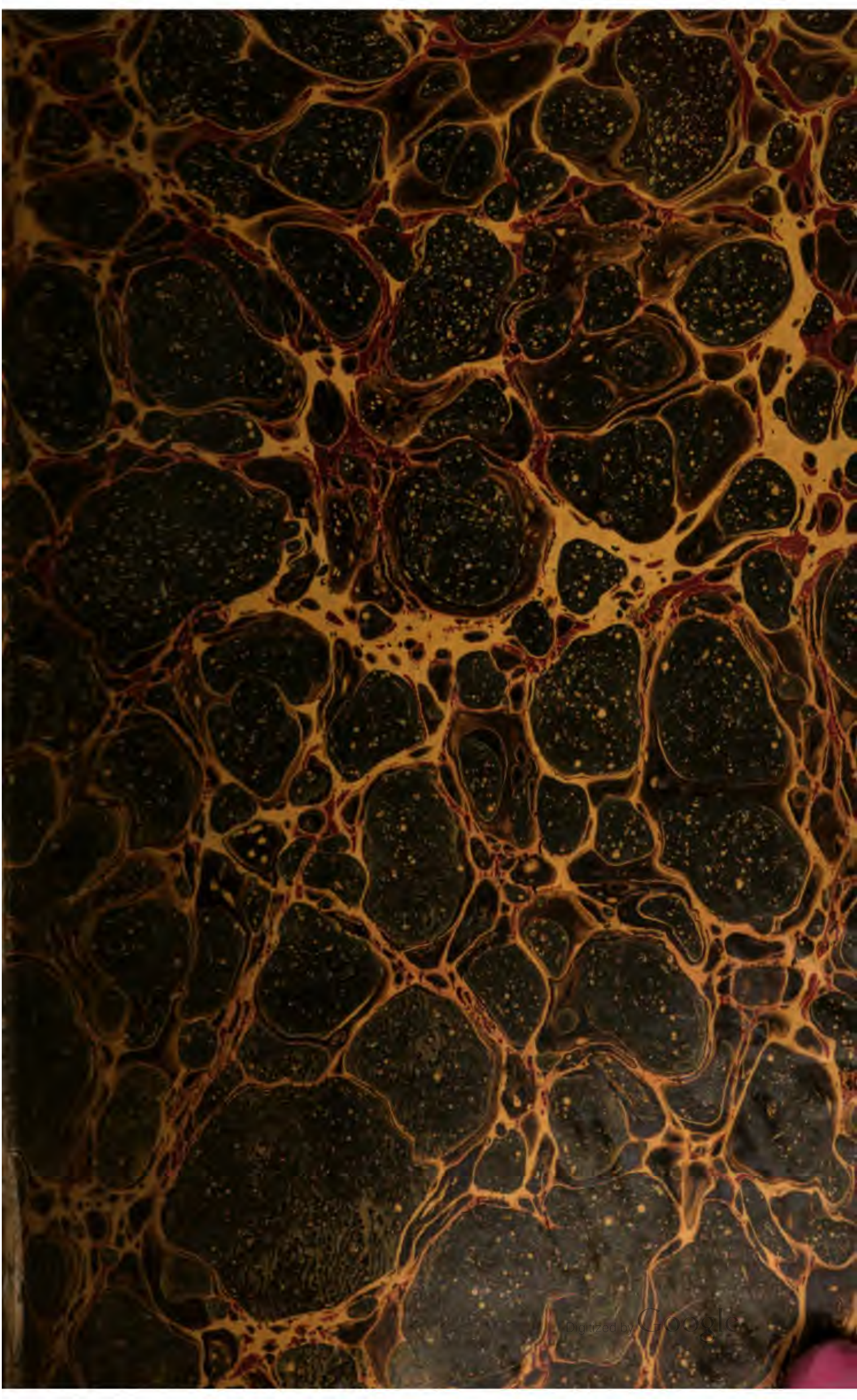



UNIVERSITY OF CALIFORNIA.
GIFT OF
F. L. A. PIOCHE.
1871.
Accessions No. 17696 Shelf No.
Engineering
Digitized by Google



SCIE

INTRODUCTION

A LA

SCIENCE DE L'INGÉNIEUR

Paris. — Imprimé par E. THUNOT et Ce, rue Racine, 26.

INTRODUCTION

A LA

SCIENCE DE L'INGÉNIEUR

AIDE-MÉMOIRE

DES INGÉNIEURS, DES ARCHITECTES, ETC.

PARTIE THÉORIQUE

PAR J. CLAUDEL

Ingénieur civil, ancien élève de l'École centrale des arts et manufactures,
Professeur de mécanique à l'Association philotechnique.

QUATRIÈME ÉDITION
REVUE ET CONSIDÉRABLEMENT AUGMENTÉE



PARIS

DUNOD, ÉDITEUR

SUCCESSEUR DE VICTOR DALMONT
Précédemment Carilian-Gœury et Vve Dalmont

LIBRAIRE DES CORPS IMPÉRIAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES

1866

AVERTISSEMENT

L'accueil bienveillant fait aux trois premières éditions de notre INTRODUCTION A LA SCIENCE DE L'INGÉNIEUR, nous a engagé à en faire une quatrième, que nous avons complétée par trop de principes, règles et renseignements, pour que nous puissions les citer ici.

Dans notre *Aide-mémoire des ingénieurs, des architectes, etc.*, PARTIE PRATIQUE, dont la 7e édition est sous presse, nous avons réuni toutes les règles à suivre pour bien construire; mais ces règles reposant sur d'autres plus générales, plus précises, nous avons complété notre œuvre, en formant de ces dernières un recueil, publié sous le titre d'*Introduction à la science de l'ingénieur*, quoiqu'il s'adresse également à toutes les personnes qui s'occupent de commerce ou d'industrie.

Nous divisons notre *Introduction* en huit parties, que l'on peut considérer comme formant chacune un traité particulier. Les trois premières parties sont : l'*Arithmétique*, l'*Algèbre* et la *Géométrie;* elles renferment toutes les définitions et toutes les règles relatives à ces trois sciences, avec des applications, et, en outre, un très-grand nombre de renseignements que l'on ne trouve pas dans les ouvrages élémentaires. La quatrième partie est la *Trigonométrie rectiligne;* elle est traitée sous le point de vue théorique et pra-

tique, et elle contient une table complète des valeurs naturelles des expressions trigonométriques. La cinquième partie est formée des *notions de Géométrie analytique;* nous y donnons les tracés des courbes employées dans l'industrie, leurs équations analytiques, leurs propriétés et leurs mesures. La sixième partie comprend le *lever des plans*, l'*arpentage* et le *nivellement*, avec la description des instruments, la manière de les régler, et les détails relatifs à leur emploi. La *mécanique* forme la septième partie, qui se termine par des notions d'*hydrostatique* et d'*hydrodynamique;* les principes qui y sont développés suffisent pour faire bien comprendre tous les ouvrages de mécanique pratique. Enfin la huitième partie, sous le titre de *Notions de calcul infinitésimal*, renferme les règles les plus essentielles du *calcul différentiel* et du *calcul intégral*, avec des applications.

Toutes ces parties sont traitées d'une manière élémentaire, mais aussi complète que possible; les questions théoriques sont suivies d'applications, afin de bien faire ressortir l'appui que la théorie et la pratique se prêtent mutuellement.

Nous espérons que notre travail viendra en aide d'une manière efficace à la mémoire des ingénieurs et architectes, qui ont fait des études spéciales, et que les ouvriers laborieux, les géomètres-arpenteurs, les conducteurs de travaux, etc., y apprendront avec facilité toute la science nécessaire pour suivre leur carrière avec succès. Les candidats aux places d'agent-voyer, de garde-mines et de conducteur des ponts et chaussées y trouveront réunies les matières sur lesquelles porteront principalement les examens qu'ils ont à subir. Les élèves qui se destinent aux écoles spéciales, et surtout à l'École centrale, y puiseront des connaissances qui les feront réussir dans leurs examens, et qui les prépareront à suivre leurs cours avec distinction.

Les ouvrages que nous avons surtout consultés pour faire notre travail sont l'*Arithmétique* et la *Géométrie* de M. Lionnet, et la *Géométrie analytique* et la *Mécanique* de M. Belanger.

Notre camarade M. Barré a bien voulu nous prêter son concours pour réunir les matières de la huitième partie; nous sommes heureux de pouvoir lui en témoigner ici notre reconnaissance.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE.

ARITHMÉTIQUE.

DEUXIÈME PARTIE.

ALGÈBRE.

LIVRE II. — Équations du premier degré.

LIVRE III. — Puissances et racines des quantités algébriques.

LIVRE IV. — Équations du second degré.

TROISIÈME PARTIE.

GÉOMÉTRIE.

GÉOMÉTRIE PLANE.

GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE.

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE.

NOTIONS DE DESSIN.

QUATRIÈME PARTIE.

TRIGONOMÉTRIE.

CINQUIÈME PARTIE.

GÉOMÉTRIE DES COURBES, OU NOTIONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

SIXIÈME PARTIE.

LEVER DES PLANS. ARPENTAGE. NIVELLEMENT.

Lever des plans.

Arpentage.

Nivellement.

SEPTIÈME PARTIE.

MÉCANIQUE.

HUITIÈME PARTIE.

NOTIONS DE CALCUL INFINITÉSIMAL.

Calcul différentiel.

Calcul intégral.

Applications du calcul intégral.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

FAUTE A CORRIGER.

Page	Ligne	
384	6	*Au lieu de :* $= 1 + \cos(90^\circ + a)$, *mettre :* $= 1 + \cos(90^\circ - a)$.

ALPHABET GREC.

Majuscules.	Minuscule.	Noms.	Valeurs.
Α.	α.	alpha.	a.
Β.	β ϐ.	bêta.	b.
Γ.	γ.	gamma.	g.
Δ.	δ.	delta.	d.
Ε.	ε.	epsilon.	e.
Ζ.	ζ.	dzêta.	dz.
Η.	η.	êta.	é.
Θ.	θ.	thêta.	th.
Ι.	ι.	iota.	i.
Κ.	κ.	kappa.	k.
Λ.	λ.	lambda.	l.
Μ.	μ.	mu.	m.
Ν.	ν.	nu.	n.
Ξ.	ξ.	xi.	x.
Ο.	ο.	omicron.	o.
Π.	π.	pi.	p.
Ρ.	ρ.	rho.	r.
Σ.	σ ς.	sigma.	s.
Τ.	τ.	tau.	t.
Υ.	υ.	upsilon.	u.
Φ.	φ.	phi.	ph.
Χ.	χ.	chi.	ch (aspiré).
Ψ.	ψ.	psi.	ps.
Ω.	ω.	oméga.	ô.

INTRODUCTION

THÉORIQUE ET PRATIQUE

A LA SCIENCE DE L'INGÉNIEUR.

PREMIÈRE PARTIE.

ARITHMÉTIQUE.

DÉFINITIONS ET PRINCIPES (*).

1. On donne le nom de *grandeur* ou *quantité* à tout ce qui est susceptible d'être évalué en nombre, par suite de sa comparaison à une quantité de même espèce prise pour *unité*. Les *longueurs*, que l'on évalue en *mètres*; les *surfaces*, en *mètres carrés*; les *volumes*, en *mètres cubes*; les *poids* et *forces* quelconques, en *kilogrammes*; les *valeurs* ou *prix*, en *francs*; les *durées*, en *jours*; les *angles*, en *degrés*, etc., sont des quantités.

Le *nombre*, l'*espace* et le *temps* sont des quantités dont tout le monde a l'idée, et qu'on ne définit pas.

2. On donne le nom de *mathématiques* à la science des grandeurs.

3. L'*arithmétique* est la science des nombres.

4. La *numération* est la partie de l'arithmétique qui a pour objet de former les nombres, de les exprimer et de les écrire d'une manière abrégée. Elle se divise en *numération parlée*, qui a pour objet de former et d'exprimer les nombres, et en *numération écrite*, dont le but est de les écrire d'une manière abrégée à l'aide de signes particuliers appelés *chiffres*.

5. Le nombre *un* est l'unité de nombre, à laquelle on a donné le nom d'*unité simple* ou d'*unité du premier ordre;* la *dizaine* est l'unité du deuxième ordre; la *centaine*, celle du troisième ordre; le *mille*, celle du quatrième; la *dizaine de mille*, celle du cinquième, et ainsi de suite.

(*) Un nombre placé entre parenthèses ( ) indique un numéro d'ordre à consulter.

Il est à remarquer que les unités d'ordres successifs sont de dix en dix fois plus grandes à partir des unités simples.

6. L'*unité simple*, le *mille*, qui vaut mille unités simples; le *million*, qui vaut mille mille; le *billion* ou *milliard*, qui vaut mille millions; le *trillion*, qui vaut mille billions; le *quatrillion*, le *quintillion*, etc., en un mot, toutes les unités qui sont de mille en mille fois plus grandes à partir des unités simples, prennent le nom d'*unités principales*.

7. *Pour écrire en chiffres un nombre énoncé*, on place successivement les uns à la suite des autres, à partir de la gauche, les chiffres qui représentent les nombres de centaines, de dizaines et d'unités de chaque unité principale énoncée, en remplaçant par des zéros les unités qui manquent: ainsi le nombre *trois millions cinquante mille sept cent huit unités* s'écrit 3 050 708.

On voit que *dans un nombre entier un chiffre quelconque placé à la gauche d'un autre exprime des unités dix fois plus grandes que celui-ci*. C'est cette convention qui a permis d'écrire tous les nombres possibles à l'aide de dix chiffres seulement.

8. Tout chiffre d'un nombre a deux valeurs: l'une *absolue* exprimée par sa forme, et l'autre *relative* due au rang qu'il occupe; ainsi, dans le nombre 58, le chiffre 5 a *cinq* pour valeur absolue, et *cinq dizaines* ou *cinquante unités* pour valeur relative.

9. *Pour énoncer un nombre écrit en chiffres*, on le sépare, par la pensée, ou par des points ou des virgules, qu'il convient de placer vers le haut des chiffres, en tranches de trois chiffres à partir de la droite, sauf à ne laisser qu'un ou deux chiffres à la dernière tranche à gauche; puis, en commençant par la gauche, on exprime successivement les nombres de centaines, de dizaines et d'unités de chaque tranche, en lui donnant le nom des unités principales qu'elle représente: ainsi le nombre 3 405 834 067 s'énonce *trois billions quatre cent cinq millions huit cent trente-quatre mille soixante-sept unités*.

10. *La base d'un système de numération* est le nombre constant d'unités d'un ordre quelconque dont se compose l'unité de l'ordre immédiatement supérieur (5). Ainsi *dix* est la base du système de numération adopté; c'est pourquoi on le nomme *système décimal*. Le nombre des chiffres qu'on emploie dans un système de numération est égal à la base du système.

11. *Numération des Romains*. Les Romains employaient des lettres pour représenter les nombres. On les imite encore quelquefois, surtout pour les inscriptions monumentales.

Les lettres employées sont:

I, V, X, L, C, D, et M.

Elles représentent respectivement les nombres:

1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000.

Le nombre I, placé une, deux ou trois fois à la droite des nombres I et V, augmente ces nombres de une, deux ou trois unités; et s'il est écrit à la

gauche des nombres V et X, il diminue ces nombres d'une unité. Ainsi les dix premiers nombres entiers :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,

sont respectivement représentés par :

I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X.

Le nombre X, écrit une, deux ou trois fois à la droite des nombres X et L, augmente ces nombres de une, deux ou trois dizaines ; et s'il est écrit à la gauche de L ou de C, il diminue ces nombres d'une dizaine. Ainsi les nombres :

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100,

s'écrivent :

X, XX, XXX, XL, L, LX, LXX, LXXX, XC, C.

Pour écrire les nombres entiers compris entre deux nombres entiers consécutifs de dizaines, il suffit d'écrire les neuf premiers nombres à la droite de chaque nombre de dizaines. Ainsi les nombres 13, 34, 56, 97, s'écrivent XIII, XXXIV, LVI, XCVII.

Le nombre C, placé à la suite de lui-même et du nombre D, ou avant D et M, permet d'écrire les dix premiers nombres entiers de centaines comme on a écrit les dix premiers nombres entiers de dizaines. Ainsi les nombres :

100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000,

s'écrivent respectivement :

C, CC, CCC, CD, D, DC, DCC, DCCC, CM, M.

Les 100 premiers nombres écrits à la suite de chaque nombre de centaines donnent tous les nombres entiers compris entre une centaine et dix centaines.

Le nombre M, écrit une, deux, trois fois à la droite de lui-même, donne les nombres 2 000, 3 000, 4 000.

Pour écrire les nombres entiers compris entre deux nombres entiers consécutifs de mille, on écrit à la droite de chaque nombre de mille les 999 premiers nombres.

Les conventions précédentes permettent d'écrire tous les nombres entiers inférieurs à 5 000. Ainsi les nombres 1 856 et 4 584 s'écrivent MDCCCLVI et MMMMDLXXXIV.

12. Un nombre est *concret* ou *abstrait*, selon qu'on a ou qu'on n'a pas égard à la nature des choses qu'il représente : ainsi lorsqu'on dit *sept heures*, *douze francs*, 7 et 12 sont des nombres concrets ; mais lorsqu'on dit *sept*, *douze*, *quinze*, *vingt*, sans aucune indication, on énonce des nombres abstraits.

13. Une *opération* est une manière de composer ou de décomposer les nombres.

Il y a en arithmétique quatre opérations que l'on appelle *fondamentales*, parce que toutes les autres ne sont que des combinaisons de celles-ci. Ce sont : l'*addition*, la *soustraction*, la *multiplication* et la *division*.

14. On donne le nom de *calcul* à un ensemble d'opérations sur les nombres.

15. Un *théorème* est une vérité que l'on rend évidente par un raisonnement appelé *démonstration*.

16. Un *axiome* est une vérité évidente par elle-même et qu'on admet sans démonstration (21).

17. Un *problème* est une question à résoudre et dont on démontre la solution.

18. Le théorème, l'axiome et le problème se désignent sous le nom commun de *proposition*.

Un *lemme* est une proposition préliminaire qu'on établit pour passer à la démonstration d'un théorème ou d'un problème.

19. Le *corollaire* est une conséquence immédiate d'une ou de plusieurs propositions.

20. On appelle *preuve* d'une opération, une seconde opération que l'on effectue pour vérifier l'exactitude du résultat fourni par la première. Une preuve, en réussissant, indique que l'exactitude du résultat est très-probable, mais non certaine.

21. *Axiomes d'arithmétique* (16). 1[er] Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles. 2[e] Lorsque deux quantités sont égales et qu'on effectue sur chacune d'elles la même opération, on obtient des résultats égaux. 3[e] Un tout ne change pas de valeur lorsqu'on intervertit l'ordre de ses parties.

22. *Signes abréviatifs.*

Le signe	$=$	signifie égale ou égal à;
	$+$	plus;
	$-$	moins;
	$\pm$	plus ou moins;
	$\times$ ou .	multiplié par;
	—— ou :	divisé par;
	$>$	plus grand que;
	$<$	plus petit que;

Ainsi

$$7+8-6=4\times 3-\frac{6}{2}$$

signifie 7 *plus* 8 *moins* 6 *égale* 4 *multiplié par* 3 *moins* 6 *divisé par* 2.

$5\times(3+2\times 4)$ ou $5\,(3+2\times 4)$ indique le produit par 5 du résultat obtenu en effectuant les opérations indiquées entre la parenthèse; ainsi, ayant $3+2\times 4=3+8=11$, on a

$$5\,(3+2\times 4)=5(3+8)=5\times 11=55.$$

LIVRE I.

Opérations fondamentales sur les nombres entiers (13).

ADDITION.

23. L'*addition* est une opération par laquelle on réunit plusieurs quantités de même espèce en une seule, appelée *somme* ou *total*.

24. *Additionner les nombres entiers* 4805, 27, 446, 9.

$$\begin{array}{r} 4805 \\ 27 \\ 446 \\ 9 \\ \hline 5287 \end{array}$$

En général, pour additionner des nombres donnés, on les écrit, comme ci-dessus, les uns sous les autres de manière que les chiffres qui expriment des unités de même ordre se trouvent dans une même colonne verticale, et on souligne le dernier nombre 9 pour le séparer du *résultat* 5287. Puis, à partir de la droite, on fait successivement la somme des chiffres contenus dans chaque colonne verticale; on écrit au-dessous les unités de son ordre, et on reporte les dizaines à la colonne suivante : ainsi, la somme des chiffres de la première colonne étant 27 unités, on écrit 7 unités au résultat et on reporte 2 dizaines à la deuxième colonne.

Pour arriver à calculer vite, au lieu de dire, comme on le fait habituellement : 9 et 6 font 15, 15 et 7 font 22, 22 et 5 font 27, je pose 7 et je retiens 2; 2 et 4 font 6, 6 et 2 font 8, je pose 8, etc., on fera bien de s'habituer à dire : 9, 15, 22, 27 (écrire 7 sans prononcer, puis passer à la colonne des dizaines); 6, 8 (écrire 8), etc.

Quand on a beaucoup de nombres à *ajouter*, il est bon, surtout si l'on n'a pas une grande habitude du calcul, de partager l'opération en plusieurs additions partielles, dont on *fait* ensuite la *somme* des résultats.

25. Pour faire la *preuve de l'addition*, on recommence l'opération en allant en sens contraire pour faire chaque addition partielle : ainsi l'on additionnera de haut en bas et de bas en haut, suivant que l'on aura opéré de bas en haut ou de haut en bas en faisant l'opération (94).

SOUSTRACTION.

26. La *soustraction* est une opération par laquelle on prend la *différence* de deux quantités de même espèce. Ces deux quantités sont les deux *termes* de la différence ou *reste*. La plus grande quantité est le *premier terme* de la différence, la plus petite en est le *second terme*.

27. De ces définitions, il résulte que :

1° Le premier terme d'une différence est égal au second terme augmenté de cette différence;

2° Lorsqu'on augmente ou qu'on diminue d'une quantité le premier terme d'une différence, cette différence augmente ou diminue de cette quantité;

3° Lorsqu'on augmente ou qu'on diminue d'une quantité le second terme d'une différence, cette différence diminue ou augmente de cette quantité;

4° La différence de deux quantités ne change pas lorsqu'on augmente ou qu'on diminue ses deux termes d'une même quantité;

5° Pour *soustraire une somme d'une quantité*, il suffit de soustraire de cette quantité la première partie de la somme; du résultat obtenu, la seconde partie, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait soustrait la dernière partie;

6° Pour *soustraire une quantité d'une somme*, il suffit de soustraire cette quantité de l'une des parties de la somme.

28. *Déterminer la différence de deux nombres entiers* 2835 et 372.

$$\begin{array}{r} 2835 \\ 372 \\ \hline 2463 \end{array}$$

En général, pour trouver la différence de deux nombres entiers, on écrit, comme ci-dessus, le plus petit nombre sous le plus grand, de manière que les chiffres qui expriment des unités du même ordre se trouvent sur une même ligne verticale; on souligne le plus petit nombre 372 pour le séparer du résultat 2463. Puis, à partir de la droite, on retranche successivement chaque chiffre du plus petit nombre du chiffre supérieur correspondant, et on place le reste au-dessous.

Lorsqu'un chiffre, tel que 7, du plus petit nombre excède le chiffre supérieur correspondant 3, on rend la soustraction possible en augmentant celui-ci de 10 unités de son ordre, et en ajoutant, pour compensation, 1 unité au chiffre inférieur suivant (4°, n° 27).

Ainsi pour faire l'opération on dira : 2 de 5 reste 3, 7 de 13 reste 6, 4 de 8 reste 4, 0 de 2 reste 2, en écrivant successivement les restes partiels 3, 6, 4, 2 au résultat.

29. Pour faire la *preuve de la soustraction*, il suffit de s'assurer si le reste 2463 ajouté au plus petit nombre 372 reproduit le plus grand nombre 2835, ou si en retranchant le reste du grand nombre on obtient le plus petit (1°, n° 27) (95).

30. Lorsque des quantités sont séparées par les signes + ou — (exemple : 3 + 4 — 5), celles 3 et 4 précédées du signe + sont dites *positives*, et celle 5 affectée du signe — est dite *négative*. Quand la première quantité est positive, on se dispense d'écrire le signe +; mais si elle était négative on la ferait précéder du signe —.

Si l'on avait à retrancher une quantité 7 d'une autre plus petite 4, on

soustrairait la plus petite de la plus grande, et on affecterait le reste du signe —; ainsi l'on aurait

$$4 - 7 = -3.$$

Le résultat — 3 indique une quantité qu'on n'a pas pu retrancher.

Pour retrancher de la somme de plusieurs quantités la somme de plusieurs autres quantités, on fait séparément les deux sommes, et on retranche la seconde de la première.

Quand toutes les quantités sont écrites les unes au-dessous des autres dans un ordre quelconque, et qu'on ne veut pas les écrire de nouveau pour les séparer, il convient de souligner toutes celles qui se retranchent, afin d'éviter la confusion et les erreurs en faisant les deux sommes (voir l'opération 1° ci-contre). On tire un trait horizontal sous le dernier nombre donné, et au-dessous on écrit les deux sommes, en finissant par celle des quantités à retrancher.

```
1°   59 243
     87 564
     32 932
    --------
      8 252
     29 848
      3 624
    --------
      2 808
    ========
    184 907
     39 364
    ========
    145 543
```

Si, comme cela arrive ordinairement, les quantités à retrancher sont toutes réunies à la suite des quantités dont on doit les soustraire, on sépare par un trait les deux espèces de quantités, puis on fait les deux sommes et la soustraction; c'est ce qu'indique l'opération 2° ci-contre.

```
2°   59 243
     87 564
      8 252
     29 848
    --------
     32 932
      3 624
      2 808
    ========
    184 907
     39 364
    ========
    145 543
```

Au lieu d'opérer ainsi, on peut appliquer d'une manière plus générale la règle de la soustraction, et se dispenser de faire les deux sommes partielles. On fait successivement la somme des chiffres de chaque colonne des nombres qui s'ajoutent, et de chaque somme partielle on retranche successivement les chiffres correspondants des nombres qui se retranchent. Ainsi l'on dit (opération 3°) 3 et 4, 7, et 2, 9, et 8, 17; 17 moins 2, 15, moins 4, 11, moins 8, 3; on écrit 3 au résultat. Passant à la deuxième colonne, on dit: 4 et 6, 10, et 5, 15, et 4, 19; 19 moins 3, 16, moins 2, 14; on écrit 4 au résultat et on ajoute 1 à la troisième colonne, qui donne 1 et 2, 3, et 5, 8, et 2, 10, et 8, 18; 18 moins 9, 9, moins 6, 3, moins 8; on écrit au résultat la différence 13 — 8 = 5, et l'on retranche 1 de la colonne suivante, qui donne: 8 et 7, 15, et 8, 23, et 9, 32, moins 2, 30, moins 3, 27, moins 2, 25; on écrit

```
3°   59 243
     87 564
      8 252
     29 848
    --------
     32 932
      3 624
      2 808
    ========
    145 543
```

5 au résultat et on ajoute 2 à la colonne suivante, qui donne : 2 et 5, 7, et 8, 15, et 2, 17, moins 3, 14; on écrit 14 au résultat.

On voit que l'on ne fait que suivre la règle de la soustraction (28), qui prend ici un peu plus d'extension, puisque l'on retranche successivement plusieurs chiffres, et que l'on peut avoir une ou plusieurs unités à ajouter à la colonne suivante ou à retrancher de cette colonne (voir le n° 398 et l'application de la règle précédente dans la résolution des triangles rectilignes quelconques, quand on fait usage des logarithmes, 4° partie).

MULTIPLICATION.

31. La *multiplication* est une opération qui a pour but de répéter un nombre, appelé *multiplicande*, autant de fois qu'il y a d'unités dans un autre nombre, appelé *multiplicateur*. Le résultat se nomme *produit*. Le multiplicande et le multiplicateur sont les *facteurs* du produit.

La multiplication revient à faire, par un moyen abrégé, la somme d'autant de nombres égaux chacun au multiplicande qu'il y a d'unités dans le multiplicateur.

De la définition de la multiplication il résulte :

1° Que lorsqu'un des facteurs est 0, le produit est 0, et que quand l'un des facteurs est l'unité, le produit est égal à l'autre facteur;

2° Qu'en général le produit est de même espèce que le multiplicande, et que le multiplicateur est toujours un nombre abstrait (12).

32. De la définition de la multiplication et de l'axiome 2° (21), il résulte :

1° Que le produit de la somme de plusieurs quantités par un nombre est égal à la somme des produits qu'on obtient en multipliant chaque partie de la somme proposée par ce nombre :

ayant $$19 = 3 + 7 + 9,$$

on a $$19 \times 5 \text{ ou } 95 = (3+7+9)\ 5 = 3 \times 5 + 7 \times 5 + 9 \times 5;$$

2° Que le produit d'une quantité par la somme de plusieurs nombres est égal à la somme des produits qu'on obtient en multipliant cette quantité par chaque partie de la somme proposée :

$$5 \times 19 \text{ ou } 95 = 5 \times (3+7+9) = 5 \times 3 + 5 \times 7 + 5 \times 9.$$

33. Lorsqu'on multiplie les deux termes 25 et 8 d'une différence par un même nombre 4, la différence 17 est multipliée par 4 :

$$25 \times 4 - 8 \times 4 = (25 - 8) \times 4 = 17 \times 4 = 68.$$

34. La table suivante, due à Pythagore, contient tous les produits de deux nombres d'un seul chiffre.



1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Pour trouver dans cette table le produit de deux nombres d'un seul chiffre, 8×3 par exemple, on cherche le multiplicande 8 dans la première ligne horizontale, et le multiplicateur 3 dans la première colonne verticale; on descend la ligne verticale qui contient le multiplicande jusqu'à la rencontre de la ligne horizontale qui contient le multiplicateur, et le produit cherché 24 se trouve à l'intersection de ces deux lignes.

35. On nomme *produit de tant de nombres qu'on voudra*, le résultat qu'on obtient en multipliant le premier nombre par le second, le produit obtenu par le troisième, le nouveau produit par le quatrième, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait employé comme multiplicateur le dernier des nombres proposés. Chacun de ces nombres est un *facteur* du produit (31).

36. On dit qu'*un nombre contient tous les facteurs d'un autre nombre*, lorsque le premier est égal à un produit de plusieurs facteurs parmi lesquels sont les facteurs du second. Ainsi $2 \times 5 \times 3 \times 7 = 210$ contient tous les facteurs de $5 \times 7 = 35$.

37. *Une quantité est multiple d'une autre*, lorsqu'elle est égale à cette seconde multipliée par un nombre entier. Ainsi $7 \times 3 = 21$ est un multiple de 7 et aussi de 3.

Réciproquement, quand une quantité est multiple d'une autre, celle-ci est un *sous-multiple* de la première.

38. La somme $7 \times 4 + 7 \times 3 + 7 \times 5 = 7\,(4 + 3 + 5) = 7 \times 12 = 84$ de plusieurs multiples d'une même quantité 7 est un multiple de cette quantité (32 et 37).

39. La différence $7 \times 9 - 7 \times 4 = 7\,(9 - 4) = 7 \times 5 = 35$ de deux multiples d'une même quantité 7 est un multiple de cette quantité (33 et 37).

40. *Le produit d'autant de facteurs que l'on veut ne change pas quand on intervertit d'une manière quelconque l'ordre des facteurs :*

$$3 \times 4 \times 7 \times 5 = 4 \times 5 \times 3 \times 7 = 420. \qquad (35).$$

41. Pour *multiplier un nombre quelconque* 9 *par un produit* $3 \times 4 \times 7$, il suffit de multiplier ce nombre par le premier facteur 3, le produit obtenu par le second facteur 4, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait employé comme multiplicateur le dernier facteur du produit (35) :

$$9 \times (3 \times 4 \times 7) = 9 \times 3 \times 4 \times 7 = 756.$$

42. Lorsqu'on multiplie un facteur d'un produit $5 \times 3 \times 4 = 60$ par un nombre 7, le produit est multiplié par ce même nombre :

$$5 \times (3 \times 7) \times 4 = 5 \times 3 \times 4 \times 7 = 60 \times 7 = 420.$$

43. *Pour multiplier un nombre entier par l'unité suivie d'un ou de plusieurs zéros*, il suffit d'écrire à la droite de ce nombre autant de zéros qu'il y en a à la suite de l'unité :

$$425 \times 100 = 42500.$$

44. *Pour obtenir le produit de plusieurs nombres terminés tous ou en partie par des zéros*, il suffit d'effectuer le produit de ces nombres abstraction faite des zéros qui les terminent, et d'écrire à la droite du produit autant de zéros qu'on en a supprimé. Ainsi, pour multiplier 400 par 6000, on multiplie 4 par 6 et on écrit cinq zéros à la droite du produit 24 :

$$400 \times 6000 = 2400000.$$

45. *Multiplier un nombre* 458, *de plusieurs chiffres, par un nombre* 6, *d'un seul chiffre.*

$$\begin{array}{r} 458 \\ 6 \\ \hline 2748 \end{array}$$

Pour multiplier un nombre de plusieurs chiffres par un nombre d'un seul chiffre, on écrit le multiplicateur sous le multiplicande, et on le souligne pour le séparer du résultat. Puis, à partir de la droite, on multiplie successivement chaque chiffre du multiplicande par le multiplicateur; on écrit les unités de chaque produit partiel sous le chiffre correspondant du multiplicande, et on ajoute les dizaines au produit suivant.

Ainsi, l'on dit : 6 fois 8 font 48, je pose 8 et retiens 4; 6 fois 5 font 30, et 4 font 34, je pose 4 et retiens 3, et ainsi de suite pour tous les chiffres du multiplicande.

En général on se dispense de prononcer le mot *font*, et l'on dit : 6 fois 8, 48, je pose 8 et retiens 4; 6 fois 5, 30 et 4, 34, je pose 4 et retiens 3, etc.

Avec un peu d'habitude on dit seulement : 6 fois 8, 48 (on pose 8), 6 fois 5, 30, 34 (on pose 4), 6 fois 4, 24, 27 (on pose 27).

46. *Multiplier un nombre* 5736, *de plusieurs chiffres, par un nombre* 743, *de plusieurs chiffres.*

```
   5736
    743
  -----
  17208
 22944
40152
-------
4261848
```

Pour multiplier un nombre de plusieurs chiffres par un nombre de plusieurs chiffres, on écrit, comme dans le cas précédent, le multiplicateur sous le multiplicande, de manière que les unités de même ordre se correspondent, et on souligne le multiplicateur. Puis on multiplie le multiplicande successivement par chaque chiffre du multiplicateur, à partir de la droite (45); on écrit chacun des produits partiels de manière que son premier chiffre à droite soit au-dessous de celui du multiplicateur qui l'a produit; on fait la somme de tous les produits partiels, et on a le produit demandé.

Si le multiplicateur contient des zéros placés entre les chiffres significatifs, comme ces zéros fournissent des produits partiels nuls, on les néglige, et la règle générale est encore applicable :

```
    34256
     3002
    -----
    68512
102768
---------
102836512
```

On voit que le nombre des produits partiels est toujours égal à celui des chiffres significatifs du multiplicateur.

47. Pour faire la *preuve de la multiplication*, on intervertit l'ordre des facteurs, c'est-à-dire qu'on prend le multiplicateur pour multiplicande et réciproquement, et on doit trouver le même résultat que dans l'opération directe si les calculs sont exacts (40 et 96).

DIVISION.

48. La *division* est une opération par laquelle on partage une quantité, appelée *dividende*, en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans un nombre entier, appelé *diviseur;* l'une de ces parties est le *quotient* de la division.

La division revient à effectuer, d'une manière abrégée, une série de soustractions. En retranchant successivement le diviseur du dividende et des restes obtenus jusqu'à ce qu'on obtienne un reste plus petit que le diviseur, le nombre des soustactions effectuées est le quotient.

49. Il résulte de la définition de la division que le dividende est égal au produit du quotient par le diviseur (31).

50. Un nombre est *divisible* par un autre, lorsque le quotient de la division du premier par le second est un nombre entier. On dit que le second nombre divise le premier, ou qu'il est *diviseur* du premier.

51. Tout nombre est divisible par lui-même et par l'unité. Le quotient est égal à l'unité dans le premier cas, et au dividende dans le second.

52. Un nombre est *pair* ou *impair* suivant qu'il est ou non divisible par 2.

53. Lorsqu'un nombre 12 est un multiple d'un autre 4, le premier est divisible par le second, et réciproquement (49).

54. Le produit de plusieurs nombres entiers est divisible par l'un quelconque de ses facteurs (37 et 53).

55. Lorsqu'un nombre contient tous les facteurs d'un autre nombre, le premier est divisible par le second (36, 37 et 53).

56. Tout diviseur 4, commun à plusieurs nombres 36, 12, 16, divise leur somme 64 (n°s 38 et 53).

57. Tout diviseur 7, commun à deux nombres 42 et 14, divise leur différence 28 (n°s 39 et 53).

58. Tout diviseur 5 d'un nombre 35 divise un multiple quelconque $35 \times 3 = 105$ de ce nombre (38 et 53).

59. Pour *diviser une somme par un nombre*, il suffit de diviser chaque partie de la somme par ce même nombre (32) : ainsi,

$$\frac{32+12+16}{4} = \frac{32}{4} + \frac{12}{4} + \frac{16}{4} = 8 + 3 + 4 = 15.$$

60. De même, pour *diviser une différence* 32 — 12 *par un nombre* 4, il suffit de diviser chacun de ses termes par 4 (33) : ainsi,

$$\frac{32-12}{4} = \frac{32}{4} - \frac{12}{4} = 8 - 3 = 5.$$

61. Lorsqu'on supprime des zéros à la droite d'un nombre entier, on le divise par l'unité suivie d'autant de zéros qu'on en a supprimé :

$$\frac{8500}{100} = 85 \text{ (n}^{os}\text{ 43 et 86).}$$

62. *Diviser un nombre entier* 4 145 824 *par un autre nombre entier* 845.

1	845
2	1690
3	2535
4	3380
5	4225
6	5070
7	5915
8	6760
9	7605

```
4145824 | 845
3380    |-----
------- | 4906
 7658   |
 7605   |
------- |
 005324 |
   5070 |
------- |
    254 |
```

Pour diviser un nombre par un autre, on écrit le diviseur à la droite

du dividende, on les sépare par un trait vertical, et on souligne le diviseur. Puis on sépare sur la gauche du dividende juste assez de chiffres pour que le nombre 4 145 qui en résulte contienne le diviseur; on cherche dans la table des 9 premiers multiples du diviseur combien de fois le diviseur est contenu dans la partie à gauche du dividende, ce qui détermine le premier chiffre 4 à gauche du quotient; on écrit ce chiffre sous le diviseur; on retranche du premier *dividende partiel* 4 145 le produit 3 380 du diviseur par le chiffre obtenu au quotient, ce qui donne un reste 765, à la droite duquel on *abaisse*, c'est-à-dire écrit, le chiffre suivant 8 du dividende; on cherche combien de fois le diviseur est contenu dans le nombre 7 658 qui en résulte, ce qui détermine le second chiffre 9 du quotient; on soustrait du second dividende partiel 7 658 le produit 7 605 du diviseur par le second chiffre du quotient, ce qui donne un second reste 53, à la droite duquel on écrit le chiffre suivant 2 du dividende. Le diviseur n'étant pas contenu dans le troisième dividende partiel 532, c'est que le troisième chiffre du quotient est 0. A la droite de 532 on abaisse le chiffre suivant 4 du dividende; on cherche combien de fois le diviseur est contenu dans le quatrième dividende partiel 5 324 qui en résulte, et l'on continue ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait employé tous les chiffres du dividende. Le dernier reste obtenu 254 est le *reste de la division.*

Généralement on se dispense de former les 9 premiers multiples du diviseur. Alors, pour avoir le nombre de fois que le diviseur est contenu dans un dividende partiel 4145, on ne considère que le premier chiffre 8 à gauche du diviseur; on néglige sur la droite du dividende partiel autant de chiffres qu'on en a supprimé au diviseur, et l'on cherche combien de fois 8 est contenu dans le nombre 41 qui en résulte; 8 étant contenu 5 fois dans 41, il y a lieu de supposer que 5 est le nombre de fois que le diviseur 845 est contenu dans le dividende partiel 4145; mais comme en multipliant par 5 le chiffre 4 du diviseur on aura à reporter 2 au produit de 8 par 5, ce qui donnera 42, on reconnaît que 5 est trop fort. En essayant 4 comme on vient de le faire pour 5, on reconnaît que 4 est le 1er chiffre à gauche du quotient. Alors on effectue le produit du diviseur par ce chiffre, mais en se dispensant de l'écrire, et en retranchant ses différents chiffres du dividende partiel au fur et à mesure qu'on les obtient. Ainsi la division précédente se dispose de la manière suivante :

4145824	845
7658	4906
5324	
254	

et, pour l'effectuer, on dit : En 41 combien de fois 8? (essayant 5, en disant 5 fois 8 font 40, et 2, qui résultent de 5 fois 4, font 42, on reconnaît que 5 est trop fort) 4 fois (on écrit 4 au quotient); 4 fois 5, 20; 20 de 25 reste 5 et je retiens 2; 4 fois 4, 16, et 2, 18; 18 de 24 reste 6 et je retiens 2; 4 fois 8, 32, et 2, 34; 34 de 41 reste 7. J'abaisse 8; en 76 combien de fois 8? 9 fois (on écrit 9 au quotient); 9 fois 5, 45; 45 de 48 reste 3

et je retiens 4; 9 fois 4, 36, et 4, 40, de 45 reste 5; 9 fois 8, 72, et 4, 76, de 76 reste 0. J'abaisse 2; en 5 combien de fois 8? il n'y va pas (on écrit 0 au quotient). J'abaisse 4; en 53 combien de fois 8? 6 fois, etc.

Quand le diviseur est très-grand, et que le quotient doit avoir un grand nombre de chiffres, ou quand on a beaucoup de nombres à diviser par le même, il y a avantage à dresser la table des premiers multiples du diviseur. On obtient ainsi sans tâtonnement les chiffres successifs du quotient, et l'on évite les multiplications du diviseur par ces chiffres. On abrége encore l'opération en évitant d'écrire les multiples du diviseur sous les dividendes partiels pour les retrancher.

Quand le diviseur n'a qu'un chiffre, 7 par exemple, on écrit simplement le dividende, et, en remarquant que diviser un nombre par 7 c'est en prendre le septième (153),

dividende 174389
quotient 24912 *reste* 5,

on dit : le septième de 17 est 2 (on écrit 2 au quotient sous le dividende et l'on retient $17-7\times 2=3$); le septième de 34 est 4 (on pose 4 et l'on retient 6); le septième de 63 est 9, le septième de 8 est 1, le septième de 19 est 2, et le reste de la division est 5.

Remarque 1. Étant donné le dividende 4145824 et le diviseur 845, si l'on veut avoir tout d'abord le nombre des chiffres du quotient, on sépare sur la gauche du dividende juste assez de chiffres pour que le nombre 4145 contienne le diviseur, et le nombre des chiffres restant augmenté de l'unité est le nombre des chiffres du quotient; ainsi ce nombre est $3+1=4$ dans l'exemple proposé.

Remarque 2. On reconnaît qu'un chiffre écrit au quotient est trop fort, lorsque le produit du diviseur par ce chiffre est supérieur au dividende partiel correspondant, c'est-à-dire lorsqu'il ne peut pas s'en retrancher. Si la soustraction était possible et que le reste fût égal ou supérieur au diviseur, cela indiquerait que le chiffre écrit au quotient est trop faible.

63. Pour faire la *preuve de la division*, on multiplie le quotient par le diviseur, et au produit ajoutant le reste de la division, qui est toujours moindre que le diviseur, on obtient le dividende si les calculs sont exacts (49); ainsi l'exemple du numéro précédent doit donner $4906\times 845+254=4145824$ (97).

64. Pour *diviser un nombre* 504 *par un produit* 42 *de plusieurs facteurs* 2, 3, 7, il suffit de diviser ce nombre par le premier facteur 2 du produit, le quotient 252 obtenu par le deuxième facteur 3; et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait divisé par le dernier facteur 7; ce qui donne 12 pour le quotient cherché (41).

65. Lorsqu'on divise un facteur 8 d'un produit $3\times 8\times 5=120$ par un nombre 4, le produit est divisé par ce nombre (42) : ainsi,

$$3\times\frac{8}{4}\times 5=\frac{3\times 8\times 5}{4}=\frac{120}{4}=30.$$

66. Pour *diviser un produit par l'un de ses facteurs*, il suffit de supprimer ce facteur dans le produit. En effet (65),

$$\frac{3\times8\times5}{8}=3\times\frac{8}{8}\times5=3\times1\times5=3\times5.$$

67. Quand un produit contient tous les facteurs d'un autre produit, le quotient de la division du premier produit par le second s'obtient en supprimant dans le premier produit tous les facteurs du second (64 et 66) :

$$\frac{2\times3\times5\times7}{3\times7}=2\times5.$$

68. Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise le dividende 54 par un nombre 3, sans changer le diviseur 6, le quotient 9 est multiplié ou divisé par ce nombre :

$$\frac{54\times3}{6}=9\times3=27,\quad \text{et}\quad \frac{54:3}{6}=\frac{9}{3}=3.$$

69. Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise le diviseur 6 par un nombre 3, sans changer le dividende 54, le quotient 9 est divisé ou multiplié par ce nombre :

$$\frac{54}{6\times3}=\frac{9}{3}=3,\quad \text{et}\quad \frac{54}{6:3}=9\times3=27.$$

70. Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise le dividende 54 et le diviseur 6 par un même nombre 3, le quotient 9 ne change pas :

$$\frac{54\times3}{6\times3}=9,\quad \text{et}\quad \frac{54:3}{6:3}=9.$$

71. Du n° 70, il résulte que lorsqu'on aperçoit un ou plusieurs facteurs communs au dividende et au diviseur, on peut abréger l'opération en faisant abstraction de ces facteurs :

$$\frac{7\times324\times23}{7\times12\times23}=\frac{324}{12}=27.$$

Il résulte aussi que quand le dividende et le diviseur sont terminés par des zéros, on peut, sans changer le quotient, supprimer à leur droite le même nombre de zéros (61 et 70) :

$$\frac{35000}{700}=\frac{350}{7}=50.$$

72. Tout diviseur 6, commun au dividende 48 et au diviseur 18, divise le reste 12 de leur division; et tout diviseur commun au diviseur 18 et au reste 12 de la division, divise le dividende 48.

73. Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise le dividende 48 et le diviseur 18 par un même nombre 6, le quotient ne change pas; mais le reste est multiplié ou divisé par ce nombre.

74 Lorsque le dividende 48 augmente ou diminue d'un certain nombre de fois le diviseur 9, le quotient 5 augmente ou diminue du même nombre de fois l'unité; mais le reste 3 de la division ne change pas.

LIVRE II.

Propriétés des diviseurs entiers.

---

75. Un *nombre* est *premier* lorsqu'il n'est divisible que par lui-même et par l'unité (50) : tels sont les nombres 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17...

76. Tout nombre 21 qui n'est pas premier est le produit de plusieurs facteurs premiers plus grands que l'unité : $21 = 3 \times 7$.

77. Plusieurs *nombres* sont *premiers entre eux* lorsqu'ils n'ont pas d'autre diviseur commun que l'unité (50) : tels sont les nombres 4 et 9; tels sont aussi 6, 10 et 15. Les nombres 6, 8 et 12 étant tous divisibles par 2, ils ne sont pas premiers entre eux.

78. Tout nombre premier qui ne divise pas un nombre entier est premier avec lui : tels sont 7 et 15.

79. Le *plus grand commun diviseur* à plusieurs nombres est le plus grand nombre qui divise chacun des nombres proposés.

Remarque. Le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres premiers entre eux est égal à l'unité.

80. Le *plus petit commun multiple* de plusieurs nombres est le plus petit nombre qui soit un multiple de chacun des nombres proposés (37).

81. *Décomposer un nombre en facteurs*, c'est trouver plusieurs nombres dont le produit soit égal au nombre proposé. Ainsi, ayant $24 = 2 \times 3 \times 4$, le nombre 24 est décomposé en trois facteurs 2, 3, 4.

82. Le produit de plusieurs facteurs égaux à un nombre est une *puissance* de ce nombre. Ainsi, ayant $27 = 3 \times 3 \times 3$, et $81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$, 27 et 81 sont des puissances de 3.

83. Le *degré* d'une puissance d'un nombre est le nombre des facteurs de cette puissance. Ainsi 3 et 4 sont les degrés des puissances 27 et 81 du nombre 3.

Remarque. Toute puissance de 10 est égale à l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a d'unités dans le degré de la puissance. Ainsi la troisième puissance de 10 est 1000; en effet, on a $10 \times 10 \times 10 = 1000$ (n° 43).

84. La deuxième puissance $7 \times 7 = 49$ d'un nombre 7 est le *carré* de 7; la troisième puissance $4 \times 4 \times 4 = 64$ d'un nombre 4 est le *cube* de 4.

85. L'*exposant* d'un nombre qu'on élève à une puissance est le degré de cette puissance écrit à la droite et un peu au-dessus du nombre proposé. Ainsi, pour exprimer d'une manière abrégée que le nombre 5 est élevé à la quatrième puissance, on écrit 5^4 au lieu de $5 \times 5 \times 5 \times 5$.

Remarque. La première puissance d'un nombre est ce nombre lui-même, que l'on considère comme affecté d'un exposant égal à l'unité, quoiqu'il n'y ait pas alors de puissance ni d'exposant proprement dits.

86. *Pour avoir le quotient et le reste de la division d'un nombre par une puissance de* 10, il suffit de séparer sur la droite du nombre proposé autant de chiffres qu'il y a d'unités dans le degré de la puissance; la partie à gauche et la partie à droite, considérées comme exprimant des unités simples, sont respectivement le quotient et le reste demandés. Ainsi, ayant à diviser 97845 par $10^3 = 1000$, on sépare trois chiffres à droite, ce qui donne 97,845; le quotient est alors 97 et le reste 845.

COROLLAIRE. *Pour qu'un nombre soit divisible par une puissance de* 10, il faut et il suffit que ce nombre soit terminé par au moins autant de zéros qu'il y a d'unités dans le degré de la puissance (61).

87. *Pour avoir le reste de la division d'un nombre par* 2 *ou par* 5, il suffit de chercher le reste de la division de son premier chiffre à droite par 2 ou par 5. Ainsi le nombre 45737 divisé par 2 donnera 1 pour reste, et divisé par 5 il donnera 2, parce que son premier chiffre 7, divisé par 2 ou par 5, donne respectivement 1 ou 2 pour reste.

Pour qu'un nombre soit divisible par 2 ou par 5, il suffit donc que son premier chiffre à droite soit divisible par 2 ou par 5.

88. En général, *pour avoir le reste de la division d'un nombre par une puissance quelconque de* 2 *ou de* 5, il suffit de chercher le reste de la division, par cette puissance, du nombre qu'on obtient en prenant sur la droite du nombre proposé autant de chiffres qu'il y a d'unités dans le degré de la puissance. Ainsi, pour avoir le reste de la division de 45737 par $2^3 = 8$, ou par $5^3 = 125$, on cherche le reste de la division de 737 par 8 ou par 125, ce qui donne respectivement 1 et 112.

Ayant $25 = \frac{100}{4}$ et $125 = \frac{1000}{8}$, afin d'abréger les opérations, *pour multiplier un nombre par* 25 *ou par* 125, on pourra en prendre le 1/4 ou le 1/8, et multiplier le résultat par 100 ou par 1000 :

$$1478 \times 25 = \frac{1478}{4} \times 100 = 36950, \quad 4729 \times 125 = \frac{4729}{8} \times 1000 = 591125.$$

De même, *pour diviser un nombre par* 25 *ou par* 125, on pourra le multiplier par 4 ou par 8, et diviser le produit par 100 ou par 1000 :

$$\frac{1478}{25} = \frac{1478 \times 4}{100} = 59,12, \quad \frac{4729}{125} = \frac{4729 \times 8}{1000} = 37,832.$$

89. Pour avoir le *reste de la division d'un nombre par* 9, on fait la somme de ses chiffres considérés comme des unités simples; on opère sur cette somme comme sur le nombre proposé, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne un résultat qui n'excède pas 9. Lorsque ce résultat est moindre que 9, il est le reste cherché; s'il est 9, le reste est 0.

Ainsi, pour avoir le reste de la division par 9 du nombre 75487, par exemple, on fait la somme $7 + 8 + 4 + 5 + 7 = 31$; puis celle $1 + 3 = 4$, et 4 est le reste cherché.

On facilite l'opération en diminuant de 9 toute somme successive de chiffres qui dépasse ce nombre. Ainsi l'on dira : 7 et 8, 15 (moins 9), 6 et 4, 10 (moins 9), 1 et 5, 6, et 7, 13 (moins 9), 4.

Au lieu de retrancher 9, il est encore plus commode de faire la somme des chiffres de chaque somme partielle. Ainsi l'on dira : 7 et 8, 15, 6 et 4, 10, 1 et 5, 6 et 7, 13, 4.

On abrége encore cette opération en négligeant les chiffres 9 et ceux dont il est visible que la somme est 9, ce qui arrive pour deux chiffres successifs dont la somme est 9. Ainsi dans l'exemple précédent on dira, en négligeant 4 et 5 : 7 et 8, 15, 6 et 7, 13, 4.

90. Pour qu'un nombre soit divisible par 9, il faut et il suffit que la somme de ses chiffres, considérés comme des unités simples, soit divisible par 9, c'est-à-dire soit un multiple de 9 (37 et 50).

91. *Pour avoir le reste de la division d'un nombre par* 3, on cherche d'abord le reste de la division de ce nombre par 9 (89); puis le reste de la division de ce premier reste par le diviseur 3. Ainsi le nombre 75487 donnant 4 pour reste de la division par 9, et 4 divisé par 3 donnant 1 pour reste, 1 est le reste de la division du nombre proposé par 3.

92. Pour qu'un nombre soit divisible par 3, il faut et il suffit que la somme de ses chiffres, considérés comme des unités simples, soit un multiple de 3, c'est-à-dire soit divisible par 3 (37 et 50).

93. *Pour avoir le reste de la division d'un nombre par* 11, on le sépare en tranches de deux chiffres à partir de la droite, sauf à ne laisser qu'un seul chiffre à la dernière tranche à gauche ; on fait la somme des nombres qui en résultent, considérés comme exprimant des unités simples; on opère sur cette somme comme sur le nombre proposé, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne un résultat qui n'excède pas 99; le reste de la division de ce dernier résultat par 11 est égal au reste demandé. Ainsi, ayant à trouver le reste de la division du nombre 7345798 par 11, on sépare ce nombre en tranches de deux chiffres, ce qui donne 7,34,57,98; faisant ensuite la somme

$$98+57+34+7=196, \text{ puis celle } 96+1=97,$$

le reste 9 de la division de 97 par 11 est le reste de la division du nombre proposé par 11.

Il est évident que cette somme de tranches de deux chiffres s'obtiendra sans écrire séparément ces tranches, en additionnant par tranche entière, c'est-à-dire en disant 98 et 57, 155, et 34, 189, et 7, 196, si l'on a une certaine habitude du calcul, ou en faisant la somme $8+7+4+7=26$ des chiffres de rang impair à partir de la droite, considérés comme exprimant des unités simples, puis la somme $2+9+5+3=19$ du nombre 2 de dizaines fourni par la première somme et des chiffres de rang pair du nombre proposé, considérés comme exprimant des dizaines, et en écrivant 19 à la gauche du chiffre 6 des unités de la première somme, ce qui donnera le même résultat 196, sur lequel on opérera, par l'une ou l'autre méthode, comme sur le nombre proposé.

Pour qu'un nombre soit divisible par 11, il faut que la somme pré-

cédente de ses tranches de deux chiffres soit un multiple de 11, c'est-à-dire qu'elle soit divisible par 11.

94. *Pour faire la preuve par* 9 *de l'addition de plusieurs nombres entiers* (suivre sur l'opération suivante), on cherche les restes 8, 3, 1, 4 de la division par 9 des nombres additionnés; on fait la somme 16 de ces restes, et si le reste 7 de la division de cette somme par 9 est égal au reste 7 de la division par 9 de la somme des nombres proposés, c'est que le résultat 2437 est exact (25).

Nombres.	Restes.
827	8
453	3
325	1
832	4
2437	16
16	7
7.	

Remarque. On peut rendre cette preuve plus expéditive en ajoutant le reste 8 du premier nombre aux chiffres du second nombre; le reste obtenu pour les deux premiers nombres aux chiffres du troisième nombre, et ainsi de suite; ce qui revient à considérer tous les nombres comme placés les uns à la suite des autres et n'en faisant qu'un. Ainsi, en observant les abréviations du nº 89, on dira (en passant 2 et 7 dans le premier nombre et 4 et 5 dans le second) : 8 et 3, 11; 2 et 3, 5 et 2, 7 et 5, 12; 3 et 8, 11; 2 et 3, 5 et 2, 7, nombre qui doit être égal au reste de la division par 9 de la somme 2437.

95. *Pour faire la preuve par* 9 *de la soustraction* (suivre sur l'exemple suivant), on considère le grand nombre 845 comme étant la somme du plus petit 258 et du reste 587, et on fait la preuve comme pour l'addition (94). Ainsi la somme $6 + 2 = 8$ des restes de la division par 9 du petit nombre 258 et de la différence 587 étant égale au reste 8 de la division par 9 du plus grand nombre 845, c'est que l'opération a été bien faite (29).

845	8
258	6
587	2
	8

On peut appliquer à la soustraction la remarque du numéro précédent; mais la preuve ordinaire de la soustraction étant plus simple que celle par 9, on n'a pas recours à cette dernière.

96. *Pour faire la preuve par* 9 *de la multiplication de deux nombres entiers* 357 et 65, on cherche les restes 6 et 2 de la division par 9 de ces nombres (89); on multiplie ces deux restes l'un par l'autre, et le reste 3 de la division par 9 du produit 12 de ces restes est égal au reste de la division par 9 du produit 23205, si les calculs sont exacts (47).

357	6	
65	2	
1785	12	3
2142		
23205		3

Remarque. Cette preuve est d'un usage continuel. Comme toutes les preuves par 9, elle ne constate pas une erreur égale à un multiple de 9.

97. *Pour faire la preuve par* 9 *de la division de deux nombres entiers*, considérant le dividende comme étant le produit du diviseur 85 par le quotient 59, plus le reste 48 de la division, la preuve comprend celle de la multiplication et celle de l'addition (94 et 96). Ainsi l'on cherche les restes 4 et 5 de la division par 9 du diviseur et du quotient; on fait le produit 20 de ces restes, et le reste 2 de la division par 9 de ce produit, augmenté du reste 3 de la division par 9 du reste 48 de la division, doit être égal au reste 5 de la division du dividende par 9 (63).

5063	85	4	
813	59	5	
48	3	20	2
			3
			5

98. *Les preuves par* 11 *des quatre opérations s'effectuent comme les preuves par* 9 (94, 95, 96 et 97), mais on en fait rarement usage. Cependant, si l'exactitude des résultats avait une très-grande importance, on pourrait avoir recours à la fois aux preuves par 9 et par 11.

99. *Pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres entiers* 384 *et* 36 (79), on divise le plus grand nombre par le plus petit, le plus petit par le reste 24 de la division, le premier reste 24 par le second 12, le second par le troisième, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne un reste nul; le dernier diviseur est le plus grand commun diviseur demandé; c'est 12 dans l'exemple proposé (122).

	10	1	2
384	36	24	12
24	12	0	

Pour donner de la clarté aux calculs, on place les quotients au-dessus des diviseurs correspondants.

100. Tout diviseur 3, commun à deux nombres 384 et 36, divise leur plus grand commun diviseur 12, ainsi que les restes successifs 24, 12, auxquels conduit la recherche du plus grand commun diviseur.

101. *Pour trouver le plus grand commun diviseur à tant de nombres entiers que l'on veut*, on cherche le plus grand commun diviseur de deux de ces nombres (99), puis le plus grand commun diviseur de ce plus grand commun diviseur et d'un autre nombre, et ainsi de suite jusqu'au dernier des nombres proposés; le dernier plus grand commun diviseur obtenu est celui des nombres proposés (122).

102. Selon qu'on multiplie ou qu'on divise plusieurs nombres entiers par un même nombre, leur plus grand commun diviseur est multiplié ou divisé par ce même nombre (73).

Il en résulte que les quotients de plusieurs nombres divisés par leur plus grand commun diviseur sont premiers entre eux.

103. Tout nombre 4 qui divise un produit 7×16 de deux facteurs, et qui est premier avec l'un des facteurs, divise l'autre facteur 16.

104. Tout nombre premier 5, qui divise un produit $12 \times 13 \times 25$,

divise au moins l'un des facteurs du produit, et tout nombre premier 5, qui divise une puissance 15^3 d'un nombre 15, divise ce nombre.

105. Tout nombre 4, premier avec chacun des facteurs du produit $7 \times 15 \times 23$, est premier avec ce produit. Tout nombre 4, premier avec un autre 15, est premier avec une puissance quelconque de celui-ci.

106. Lorsque deux nombres 4 et 15 sont premiers entre eux, toute puissance de l'un est première avec une puissance quelconque de l'autre.

107. Tout nombre 720, divisible par deux nombres 4 et 9 premiers entre eux (77), est divisible par leur produit 36.

108. Tout nombre 7200, divisible par plusieurs nombres 4, 9, 25, premiers entre eux deux à deux, est divisible par leur produit.

109. Le plus petit commun multiple de plusieurs nombres entiers 4, 9, 25, premiers entre eux deux à deux, est égal à leur produit $4 \times 9 \times 25 = 900$ (n° 80).

110. Tout commun multiple 192, de deux nombres 24 et 16, est un multiple du produit $8 \times 3 \times 2$ qui a pour facteurs le plus grand commun diviseur 8 de ces nombres et les quotients 3 et 2 de leur division par ce plus grand commun diviseur; et réciproquement, tout multiple de ce produit est un commun multiple des deux nombres proposés 24 et 16.

111. Le plus petit commun multiple de deux nombres 24 et 16 est égal au produit $8 \times 3 \times 2 = 48$, qui a pour facteurs le plus grand commun diviseur 8 de ces nombres et les quotients 3 et 2 de leur division par ce plus grand commun diviseur. *De là le moyen de déterminer le plus petit commun multiple de deux nombres* (109 et 123).

112. Tout commun multiple de deux nombres 24 et 16 est un multiple de leur plus petit commun multiple 48.

113. Le plus petit commun multiple 48 de deux nombres 24 et 16 est égal au produit de l'un quelconque de ces nombres par le quotient de la division de l'autre nombre par leur plus grand commun diviseur 8 (111).

114. Le produit du plus grand commun diviseur 8 de deux nombres 24 et 16 par leur plus petit commun multiple 48, est égal au produit 24×16 des deux nombres proposés.

115. Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise deux nombres 24 et 16 par un même nombre, leur plus petit commun multiple 48 est multiplié ou divisé par ce nombre.

116. *Pour trouver le plus petit commun multiple de plusieurs nombres entiers* 6, 8, 9, 10, on cherche le plus petit commun multiple 24 des deux premiers nombres 6 et 8 (111), puis le plus petit commun multiple 72 de ce plus petit commun multiple 24 et du 3° nombre 9, et ainsi de suite; le dernier plus petit commun multiple trouvé 360 est celui des nombres proposés (123).

117. Lorsqu'on divise le plus petit commun multiple 72 de plusieurs nombres 8, 12, 18 par chacun de ces nombres, les quotients 9, 6, 4 sont premiers entre eux; et réciproquement, lorsqu'un nombre 72 est tel

qu'en le divisant par plusieurs autres 8, 12, 18, on obtient des quotients 9, 6, 4 premiers entre eux, ce nombre est le plus petit commun multiple de tous les autres.

118. Tout nombre entier 43 est premier lorsque, étant compris entre les carrés 25 et 49 des deux nombres premiers consécutifs 5 et 7, il n'est divisible ni par le plus petit de ces nombres premiers, ni par aucun de ceux qui le précèdent, excepté l'unité.

119. En général, *pour reconnaître si un nombre donné est premier*, il suffit de s'assurer si ce nombre n'est divisible par aucun des nombres premiers 2, 3, 5, 7, etc., jusqu'à ce qu'une division conduise à un quotient égal ou inférieur au dernier nombre premier employé comme diviseur (118).

120. La suite des nombres premiers est illimitée.

Table des nombres premiers inférieurs à **10 000.**

1	367	839	1367	1907	2467	3061	3643	4243	4889	5501	6121	6761	7433	8069	8713	9349
2	73	53	73	13	73	67	59	53	4903	03	31	63	51	81	19	71
3	79	57	81	31	77	79	71	59	09	07	33	79	57	87	31	77
5	83	59	99	33	2503	83	73	61	19	19	43	81	59	89	37	91
7	89	63	1409	49	21	89	77	71	31	21	51	91	77	93	41	97
11	97	77	23	51	31	3109	91	73	33	27	63	93	81	8101	47	9403
13	401	81	27	73	39	19	97	83	37	31	73	6803	87	11	53	13
17	09	83	29	79	43	21	3701	89	43	57	97	23	89	17	61	19
19	19	87	33	87	49	37	09	97	51	63	99	27	99	23	79	21
23	21	907	39	93	51	63	19	4327	57	69	6203	29	7507	47	83	31
29	31	11	47	97	57	67	27	37	67	73	11	33	17	61	8803	33
31	33	19	51	99	79	69	33	39	69	81	17	41	23	67	07	37
37	39	29	53	2003	91	81	39	49	73	91	21	57	29	71	19	39
41	43	37	59	11	93	87	61	57	87	5623	29	63	37	79	21	61
43	49	41	71	17	2609	91	67	63	93	39	47	69	41	91	31	63
47	57	47	81	27	17	3203	69	73	99	41	57	71	47	8209	37	67
53	61	53	83	29	21	09	79	91	5003	47	63	83	49	19	39	73
59	63	67	87	39	33	17	93	97	09	51	69	99	59	21	49	79
61	67	71	89	53	47	21	97	4409	11	53	71	6907	61	31	61	91
67	79	77	93	63	57	29	3803	21	21	57	77	11	73	33	63	97
71	87	83	99	69	59	51	21	23	23	59	87	17	77	37	67	9511
73	91	91	1511	81	63	53	23	41	39	69	99	47	83	43	87	21
79	99	97	23	83	71	57	33	47	51	83	6301	49	89	63	93	33
83	503	1009	31	87	77	59	47	51	59	89	11	59	91	69	8923	39
89	09	13	43	89	83	71	51	57	77	93	17	61	7603	73	29	47
97	21	19	49	99	87	99	53	63	81	5701	23	67	07	87	33	51
101	23	21	53	2111	89	3301	63	81	87	11	29	71	21	91	41	87
03	41	31	59	13	93	07	77	83	99	17	37	77	39	93	51	9601
07	47	33	67	29	99	13	81	93	5101	37	43	83	43	97	63	13
09	57	39	71	31	2707	19	89	4507	07	41	53	91	49	8311	69	19
13	63	49	79	37	11	23	3907	13	13	43	59	97	69	17	71	23
27	69	51	83	41	13	29	11	17	19	49	61	7001	73	29	99	29
31	71	61	97	43	19	31	17	19	47	79	67	13	81	53	9001	31
37	77	63	1601	53	29	43	19	23	53	83	73	19	87	63	07	43
39	87	69	07	61	31	47	23	47	67	91	79	27	91	69	11	49
49	93	87	09	79	41	59	29	49	71	5801	89	39	99	77	13	61
51	99	91	13	2203	49	61	31	61	79	07	97	43	7703	87	29	77
57	601	93	19	07	53	71	43	67	89	13	6421	57	17	89	41	79
63	07	97	21	13	67	73	47	83	97	21	27	69	23	8419	43	89
67	13	1103	27	21	77	89	67	91	5209	27	49	79	27	23	49	97
73	17	09	37	37	89	91	89	97	27	39	51	7103	41	29	59	9719
79	19	17	57	39	91	3407	4001	4603	31	43	69	09	53	31	67	21
81	31	23	63	43	97	13	03	21	33	49	73	21	57	43	91	33
91	41	29	67	51	2801	33	07	37	37	51	81	27	59	47	9103	39
93	43	51	69	67	03	49	13	39	61	57	91	29	89	61	09	43
97	47	53	93	69	19	57	19	43	73	61	6521	51	93	67	27	49
99	53	63	97	73	33	61	21	49	79	67	29	59	7817	8501	33	67
211	59	71	99	81	37	63	27	51	81	69	47	77	23	13	37	69
23	61	81	1709	87	43	67	49	57	97	79	51	87	29	21	51	81
27	73	87	21	93	51	69	51	63	5303	81	53	93	41	27	57	87
29	77	93	23	97	57	91	57	73	09	97	63	7207	53	37	61	91
33	83	1201	33	2309	61	99	73	79	23	5903	69	11	67	39	73	9803
39	91	13	41	11	79	3511	79	91	33	23	71	13	73	43	81	11
41	701	17	47	33	87	17	91	4703	47	27	77	19	77	63	87	17
51	09	23	53	39	97	27	93	21	51	39	81	29	79	73	99	29
57	19	29	59	41	2903	29	99	23	81	53	99	37	83	81	9203	33
63	27	31	77	47	09	33	4111	29	87	81	6607	43	7901	97	09	39
69	33	37	83	51	17	39	27	33	93	87	19	47	07	99	21	51
71	39	49	87	57	27	41	29	51	99	6007	37	53	19	8609	27	57
77	43	59	89	71	39	47	33	59	5407	11	53	83	27	23	39	59
81	51	77	1801	77	53	57	39	83	13	29	59	97	33	27	41	71
83	57	79	11	81	57	59	53	87	17	37	61	7307	37	29	57	83
93	61	83	23	83	63	71	57	89	19	43	73	09	49	41	77	87
307	69	89	31	89	69	81	59	93	31	47	79	21	51	47	81	9901
11	73	91	47	93	71	83	77	99	37	53	89	31	63	63	83	07
13	87	97	61	99	99	93	4201	4801	41	67	91	33	93	69	93	23
17	97	1301	67	2411	3001	3607	11	13	43	73	6701	49	8009	77	9311	29
31	809	03	71	17	11	13	17	17	49	79	03	51	11	81	19	31
37	11	07	73	23	19	17	19	31	71	89	09	69	17	89	23	41
47	21	19	77	37	23	23	29	61	77	91	19	93	39	93	37	49
49	23	21	79	41	37	31	31	71	79	6101	33	7411	53	99	41	67
53	27	27	89	47	41	37	41	77	83	13	37	17	59	8707	43	73
59	29	61	1901	59	49											

Table des nombres inférieurs à 10 000 qui ne contiennent pas les facteurs premiers 2, 3, 5, 7 et 11, et de leurs facteurs premiers.

Nombres.	Facteurs.	Nombres.	Facteurs.	Nombres.	Facteurs.	Nombres.	Facteurs.
169	13 × 13	1333	31 × 43	2171	13 × 167	2951	13 × 227
221	13 × 17	39	13 × 103	73	41 × 53	77	13 × 229
47	13 × 19	43	17 × 79	83	37 × 59	83	19 × 157
89	17 × 17	49	19 × 71	97	13 × 13×13	87	29 × 103
90	13 × 23	57	23 × 59	2201	31 × 71	93	41 × 73
323	17 × 19	63	29 × 47	09	47 × 47	3007	31 × 97
61	19 × 19	69	37 × 37	27	17 × 131	13	23 × 131
77	13 × 29	87	19 × 73	31	23 × 97	29	13 × 233
91	17 × 23	91	13 × 107	49	13 × 173	43	17 × 179
403	13 × 31	1403	23 × 61	57	37 × 61	53	43 × 71
37	19 × 23	11	17 × 83	63	31 × 73	71	37 × 83
81	13 × 37	17	13 × 109	79	43 × 53	77	17 × 181
93	17 × 29	57	31 × 47	91	29 × 79	97	19 × 163
527	17 × 31	69	13 × 113	2323	23 × 101	3103	29 × 107
29	23 × 23	1501	19 × 79	27	13 × 179	07	13 × 239
33	13 × 41	13	17 × 89	29	17 × 137	27	53 × 59
51	19 × 29	17	37 × 41	53	13 × 181	31	31 × 101
59	13 × 43	37	29 × 53	63	17 × 139	33	13 × 241
89	19 × 31	41	23 × 67	69	23 × 103	39	43 × 73
611	13 × 47	77	19 × 83	2407	29 × 83	49	47 × 67
29	17 × 37	91	37 × 43	13	19 × 127	51	23 × 137
67	23 × 29	1633	23 × 71	19	41 × 59	61	29 × 109
89	13 × 53	43	31 × 53	49	31 × 79	73	19 × 167
97	17 × 41	49	17 × 97	61	23 × 107	93	31 × 103
703	19 × 37	51	13 × 127	79	37 × 67	97	23 × 139
13	23 × 31	79	23 × 73	83	13 × 191	3211	13 × 13×19
31	17 × 43	81	41 × 41	89	19 × 131	33	53 × 61
67	13 × 59	91	19 × 89	91	47 × 53	39	41 × 79
79	19 × 41	1703	13 × 131	2501	41 × 61	47	17 × 191
93	13 × 61	11	29 × 59	07	23 × 109	63	13 × 251
99	17 × 47	17	17 × 101	09	13 × 193	77	29 × 113
817	19 × 43	39	37 × 47	33	17 × 149	81	17 × 193
41	29 × 29	51	17 × 103	37	43 × 59	87	19 × 173
51	23 × 37	63	41 × 43	61	13 × 197	93	37 × 89
71	13 × 67	69	29 × 61	67	17 × 151	3317	31 × 107
93	19 × 47	81	13 × 137	73	31 × 83	37	47 × 71
99	29 × 31	1807	13 × 139	81	29 × 89	41	13 × 257
901	17 × 53	17	23 × 79	87	13 × 199	49	17 × 197
23	13 × 71	19	17 × 107	99	23 × 113	79	31 × 109
43	23 × 41	29	31 × 59	2603	19 × 137	83	17 × 199
49	13 × 73	43	19 × 97	23	43 × 61	97	43 × 79
61	31 × 31	49	43 × 43	27	37 × 71	3401	19 × 179
89	23 × 43	53	17 × 109	41	19 × 139	03	41 × 83
1003	17 × 59	91	31 × 61	69	17 × 157	19	13 × 263
07	19 × 53	1909	23 × 83	2701	37 × 73	27	23 × 149
27	13 × 79	19	19 × 101	43	13 × 211	31	47 × 73
37	17 × 61	21	17 × 113	47	41 × 67	39	19 × 181
73	29 × 37	27	41 × 47	59	31 × 89	73	23 × 151
79	13 × 83	37	13 × 149	71	17 × 163	81	59 × 59
81	23 × 47	43	29 × 67	73	47 × 59	97	13 × 269
1121	19 × 59	57	19 × 103	2809	53 × 53	3503	31 × 113
39	17 × 67	61	37 × 53	13	29 × 97	23	13 × 271
47	31 × 37	63	13 × 151	31	19 × 149	51	53 × 67
57	13 × 89	2021	43 × 47	39	17 × 167	69	43 × 83
59	19 × 61	33	19 × 107	67	47 × 61	87	17 × 211
89	29 × 41	41	13 × 157	69	19 × 151	89	37 × 97
1207	17 × 71	47	23 × 89	73	13 × 13×17	99	59 × 61
19	23 × 53	59	29 × 71	81	43 × 67	3601	13 × 277
41	17 × 73	71	19 × 109	99	13 × 223	11	23 × 157
47	29 × 43	77	31 × 67	2911	41 × 71	29	10 × 191
61	13 × 97	2117	29 × 73	21	23 × 127	49	41 × 89
71	31 × 41	19	13 × 163	23	37 × 79	53	13 × 281
73	19 × 67	47	19 × 113	29	29 × 101	67	19 × 193
1313	13 × 101	59	17 × 127	41	17 × 173	79	13 × 283

Nombres.	Facteurs.	Nombres.	Facteurs.	Nombres.	Facteurs.	Nombres.	Facteurs.
3683	29 × 127	4453	61 × 73	5207	41 × 127	5947	19 × 313
3713	47 × 79	69	41 × 109	13	13 × 401	59	59 × 101
21	61 × 61	71	17 × 263	19	17 × 307	63	67 × 89
37	37 × 101	89	67 × 67	21	23 × 227	69	47 × 127
43	19 × 197	4511	13 × 347	39	13 × 13×31	77	43 × 139
49	23 × 163	31	23 × 197	49	29 × 181	83	31 × 193
57	13 × 17×17	37	13 × 349	51	59 × 89	89	53 × 113
63	53 × 71	41	19 × 239	63	19 × 277	93	13 × 461
81	19 × 199	53	29 × 157	67	23 × 229	6001	17 × 353
91	17 × 223	59	47 × 97.	87	17 × 311	19	13 × 463
99	29 × 131	73	17 × 269	93	67 × 79	23	19 × 317
3809	13 × 293	77	23 × 199	5311	47 × 113	31	37 × 163
11	37 × 103	79	19 × 241	17	13 × 409	49	23 × 263
27	43 × 89	89	13 × 353	21	17 × 313	59	73 × 83
41	23 × 167	4601	43 × 107	29	73 × 73	71	13 × 467
59	17 × 227	07	17 × 271	39	19 × 281	77	59 × 103
69	53 × 73	19	31 × 149	53	53 × 101	6103	17 × 359
87	13 × 13×23	33	41 × 113	59	23 × 233	07	31 × 197
93	17 × 229	61	59 × 79	63	31 × 173	09	41 × 149
3901	47 × 83	67	13 × 359	71	41 × 131	19	29 × 211
37	31 × 127	81	31 × 151	77	19 × 283	37	17 × 19×19
53	59 × 67	87	43 × 109	89	17 × 317	57	47 × 131
59	37 × 107	93	13 × 19×19	5429	61 × 89	61	61 × 101
61	17 × 233	99	37 × 127	47	13 × 419	69	31 × 199
73	29 × 137	4709	17 × 277	59	53 × 103	79	37 × 167
77	41 × 97	17	53 × 89	61	43 × 127	87	23 × 269
79	23 × 173	27	29 × 163	73	13 × 421	91	41 × 151
91	13 × 307	47	47 × 101	91	17 × 17×19	6227	13 × 479
4009	19 × 211	57	67 × 71	97	23 × 239	33	23 × 271
31	29 × 139	69	19 × 251	5513	37 × 149	39	17 × 367
33	37 × 109	71	13 × 367	39	29 × 191	41	79 × 79
43	13 × 311	77	17 × 281	43	23 × 241	53	13 × 13×37
61	31 × 131	4811	17 × 283	49	31 × 179	83	61 × 103
63	17 × 239	19	61 × 79	61	67 × 83	89	19 × 331
69	13 × 313	41	47 × 103	67	19 × 293	6313	59 × 107
87	61 × 67	43	29 × 167	87	37 × 151	19	71 × 89
97	17 × 241	47	37 × 131	97	29 × 193	31	13 × 487
4117	23 × 179	49	13 × 373	5603	13 × 431	41	17 × 373
21	13 × 317	53	23 × 211	09	71 × 79	71	23 × 277
41	41 × 101	59	43 × 113	11	31 × 181	83	13 × 491
63	23 × 181	67	31 × 157	17	41 × 137	6401	37 × 173
71	43 × 97	83	19 × 257	27	17 × 331	03	19 × 337
81	37 × 113	91	67 × 73	29	13 × 433	07	43 × 149
83	47 × 89	97	59 × 83	33	43 × 131	09	13 × 17×29
87	53 × 79	4901	13 × 13×29	71	53 × 107	31	59 × 109
89	59 × 71	13	17 × 17×17	81	13 × 19×23	37	41 × 157
99	13 × 17×19	27	13 × 379	99	41 × 139	39	47 × 137
4223	41 × 103	79	13 × 383	5707	13 × 439	43	17 × 379
37	19 × 223	81	17 × 293	13	29 × 197	63	23 × 281
47	31 × 137	97	19 × 263	23	59 × 97	67	29 × 223
67	17 × 251	5017	29 × 173	29	17 × 337	87	13 × 499
4303	13 × 331	29	47 × 107	59	13 × 443	93	43 × 151
07	59 × 73	41	71 × 71	67	73 × 79	97	73 × 89
09	31 × 139	53	31 × 163	71	29 × 199	99	67 × 97
13	19 × 227	57	13 × 389	73	23 × 251	6509	23 × 283
21	29 × 149	63	61 × 83	77	53 × 109	11	17 × 383
31	61 × 71	69	37 × 137	5809	37 × 157	27	61 × 107
43	43 × 101	83	13 × 17×23	33	19 × 307	33	47 × 139
51	19 × 229	5111	19 × 269	37	13 × 449	39	13 × 503
69	17 × 257	23	47 × 109	91	43 × 137	41	31 × 211
79	29 × 151	29	23 × 223	93	71 × 83	57	79 × 83
81	13 × 337	41	53 × 97	99	17 × 347	83	29 × 227
87	41 × 107	43	37 × 139	5909	19 × 311	93	19 × 347
93	23 × 191	49	19 × 271	11	23 × 257	6613	17 × 389
99	53 × 83	61	13 × 397	17	61 × 97	17	13 × 509
4427	19 × 233	77	31 × 167	21	31 × 191	23	37 × 179
29	43 × 103	83	71 × 73	33	17 × 349	31	19 × 349
	23 × 193	91	29 × 179	41	13 × 457	41	29 × 229

Nombres.	Facteurs.	Nombres.	Facteurs.	Nombres.	Facteurs.	Nombres.	Facteurs.
6647	17 × 17×23	7363	37 × 199	8033	29 × 277	8759	19 × 461
49	61 × 109	67	53 × 139	47	13 × 619	73	31 × 283
67	59 × 113	73	73 × 101	51	83 × 97	77	67 × 131
83	41 × 163	79	47 × 157	77	41 × 197	91	59 × 149
97	37 × 181	87	83 × 89	83	59 × 137	97	19 × 463
6707	19 × 353	91	19 × 389	8119	23 × 353	8801	13 × 677
31	53 × 127	97	13 × 569	31	47 × 173	09	23 × 383
39	23 × 293	7409	31 × 239	37	79 × 103	43	37 × 239
49	17 × 397	21	41 × 181	43	17 × 479	51	53 × 167
51	43 × 157	23	13 × 571	49	29 × 281	57	17 × 521
57	29 × 233	29	17 × 19×23	53	31 × 263	73	19 × 467
67	67 × 101	39	43 × 173	59	41 × 199	79	13 × 683
73	13 × 521	53	29 × 257	77	13 × 17×37	81	83 × 107
99	13 × 523	63	17 × 439	89	19 × 431	91	17 × 523
6817	17 × 401	71	31 × 241	8201	59 × 139	8903	29 × 307
21	19 × 359	93	59 × 127	03	13 × 631	09	59 × 151
47	41 × 167	7501	13 × 577	07	29 × 283	17	37 × 241
51	13 × 17×31	19	73 × 103	13	43 × 191	27	79 × 113
59	19 × 19×19	31	17 × 443	27	19 × 433	47	23 × 389
77	13 × 23×23	43	19 × 397	49	73 × 113	57	13 × 13×53
87	71 × 97	71	67 × 113	51	37 × 223	59	17 × 17×31
89	83 × 83	97	71 × 107	57	23 × 359	77	47 × 191
93	61 × 113	7613	23 × 331	79	17 × 487	83	13 × 691
6901	67 × 103	19	19 × 401	99	43 × 193	89	89 × 101
13	31 × 223	27	29 × 263	8303	19 × 19×23	93	17 × 23×23
29	13 × 13×41	31	13 × 587	21	53 × 157	9017	71 × 127
31	29 × 239	33	17 × 449	33	13 × 641	19	29 × 311
43	53 × 131	57	13 × 19×31	39	31 × 269	47	83 × 109
53	17 × 409	61	47 × 163	41	19 × 439	61	13 × 17×41
73	19 × 367	63	79 × 97	47	17 × 491	71	47 × 193
89	29 × 241	97	43 × 179	57	61 × 137	73	43 × 211
7003	47 × 149	7709	13 × 593	59	13 × 643	77	29 × 313
09	43 × 163	29	59 × 131	81	17 × 17×29	83	31 × 293
31	79 × 89	39	71 × 109	83	83 × 101	89	61 × 149
33	13 × 541	47	61 × 127	99	37 × 227	9101	19 × 479
37	31 × 227	51	23 × 337	8401	31 × 271	13	13 × 701
61	23 × 307	69	17 × 457	11	13 × 647	31	23 × 397
67	37 × 191	71	19 × 409	13	47 × 179	39	13 × 19×37
81	73 × 97	81	31 × 251	17	19 × 443	43	41 × 223
87	19 × 373	83	43 × 181	41	23 × 367	67	89 × 103
93	41 × 173	87	13 × 599	53	79 × 107	69	53 × 173
97	47 × 151	7801	29 × 269	71	43 × 197	79	67 × 137
99	31 × 229	07	37 × 211	73	37 × 229	93	29 × 317
7111	13 × 547	11	73 × 107	79	61 × 139	97	17 × 541
23	17 × 419	13	13 × 601	83	17 × 499	9211	61 × 151
41	37 × 193	31	41 × 191	89	13 × 653	17	13 × 709
53	23 × 311	37	17 × 461	97	29 × 293	23	23 × 401
57	17 × 421	49	47 × 167	8507	47 × 181	53	19 × 487
63	13 × 19×29	59	29 × 271	09	67 × 127	59	47 × 197
69	67 × 107	71	17 × 463	31	19 × 449	63	59 × 157
71	71 × 101	91	13 × 607	49	83 × 103	69	13 × 23×31
81	43 × 167	97	53 × 149	51	17 × 503	71	73 × 127
99	23 × 313	7913	41 × 193	57	43 × 199	87	37 × 251
7201	19 × 379	21	89 × 89	67	13 × 659	99	17 × 547
23	31 × 233	39	17 × 467	79	23 × 373	9301	71 × 131
41	13 × 557	43	13 × 13×47	87	31 × 277	07	41 × 227
61	53 × 137	57	73 × 109	93	13 × 661	13	67 × 139
67	13 × 13×43	61	19 × 419	8611	79 × 109	29	19 × 491
77	19 × 383	67	31 × 257	21	37 × 233	47	13 × 719
79	29 × 251	69	13 × 613	33	89 × 97	53	47 × 199
89	37 × 197	79	79 × 101	39	53 × 163	67	17 × 19×29
91	23 × 317	81	23 × 347	51	41 × 211	79	83 × 113
7303	67 × 109	91	61 × 131	53	17 × 509	89	41 × 229
13	71 × 103	99	19 × 421	71	13 × 23×29	9407	23 × 409
19	13 × 563	8003	53 × 151	83	19 × 457	09	97 × 97
27	17 × 431	21	13 × 617	8711	31 × 281	51	13 × 727
39	41 × 179	23	71 × 113	17	23 × 379	69	17 × 557
61	17 × 433	27	23 × 349	49	13 × 673	81	19 × 499

Nombres.	Facteurs.	Nombres.	Facteurs.	Nombres.	Facteurs.	Nombres.	Facteurs.
9487	53 × 179	9599	29 × 331	9731	37 × 263	9893	13 × 761
9503	13 × 17×43	9607	13 × 739	61	43 × 227	99	19 × 521
09	37 × 257	17	59 × 163	63	13 × 751	9913	23 × 431
17	31 × 307	37	23 × 419	73	29 × 337	17	47 × 211
23	89 × 107	41	31 × 311	97	97 × 101	37	19 × 523
29	13 × 733	59	13 × 743	99	41 × 239	43	61 × 163
53	41 × 233	71	19 × 509	9809	17 × 577	53	37 × 269
57	19 × 503	73	17 × 569	27	31 × 317	59	23 × 433
63	73 × 131	83	23 × 421	41	13 × 757	71	13 × 13×59
71	17 × 563	9701	89 × 109	47	43 × 229	79	17 × 587
77	61 × 157	03	31 × 313	53	59 × 167	83	67 × 149
89	43 × 223	07	17 × 571	69	71 × 139	91	97 × 103
93	53 × 181	27	71 × 137	81	41 × 241	97	13 × 769

121. *La règle générale pour décomposer un nombre en ses facteurs premiers plus grands que l'unité* consiste à le diviser successivement, autant de fois que cela est possible, par chacun des nombres premiers 2, 3, 5..., qu'il admet comme diviseurs, jusqu'à ce qu'on obtienne pour quotient un nombre premier; ce dernier quotient et tous les nombres qui ont servi de diviseur sont les facteurs premiers du nombre proposé. Pour décomposer, par exemple, le nombre 540 en ses facteurs premiers, on dispose ainsi les calculs, ce qui fournit les facteurs premiers 2, 2, 3, 3, 3, 5.

540	2
270	2
135	3
45	3
15	3
5	5
1	

On a $$540 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^3 \times 5.$$

La table de la page 24 permet de décomposer facilement un nombre, 2031 810 par exemple, qui ne contient que les facteurs premiers 2, 3, 5, 7 et 11, et d'autres facteurs premiers dont le produit n'est pas supérieur à 10 000, ce qui est le cas le plus habituel de la pratique.

On reconnaît immédiatement que le nombre proposé contient les facteurs 2 et 5 (87), puis le facteur 3 (92), puis le facteur 11. Le dernier quotient 6157 se trouvant dans la table, cela indique qu'il ne contient plus aucun des facteurs 2, 3, 5, 7 et 11, et la table donne ses facteurs premiers 47 et 131, que l'on n'eût trouvés qu'après avoir vérifié que 6157 n'est divisible par aucun des nombres premiers inférieurs à 47. On a en définitive

2031 810	2 × 5
203 181	3
67 727	11
6 157	47 × 131

$$2031810 = 2 \times 3 \times 5 \times 11 \times 47 \times 131.$$

Remarque 1. Quand un nombre 8100 est le produit de nombres connus 81 et 100, on abrége sa décomposition en facteurs premiers en cherchant les facteurs premiers de 81 et de 100.

$$81 = 3^4, \quad 100 = 2^2 \times 5^2, \quad 8100 = 2^2 \times 3^4 \times 5^2.$$

Remarque 2. Ce dernier exemple montre que quand un nombre

$8100 = 90^2$ est une puissance exacte, les exposants de ses facteurs premiers sont divisibles par le degré de la puissance.

122. Le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres 240, 180, 72 est égal au produit des facteurs premiers communs à ces nombres, chacun de ces facteurs étant affecté du plus petit de ses exposants dans les nombres proposés.

Ainsi ayant :

$$240 = 2^4 \times 3 \times 5, \quad 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5, \quad 72 = 2^3 \times 3^2,$$

le plus grand commun diviseur de ces nombres est

$$2^2 \times 3 = 12.$$

De là un autre moyen pour déterminer le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres (99 et 101).

123. Le plus petit commun multiple de plusieurs nombres est égal au produit des facteurs premiers de ces nombres, chacun de ces facteurs étant affecté du plus grand de ses exposants dans les nombres proposés. Ainsi le plus petit commun multiple des nombres ci-dessus 240, 180, 72 est

$$2^4 \times 3^2 \times 5 = 720.$$

De là un autre moyen pour déterminer le plus petit commun multiple de plusieurs nombres (111 et 116).

124. *Pour trouver tous les diviseurs d'un nombre* 180, on décompose ce nombre en ses facteurs premiers (121), que l'on écrit dans une première colonne verticale pour faciliter les opérations; on multiplie le premier facteur 2 par le second 2, les deux premiers facteurs et leur produit 4 par le troisième facteur, en omettant les multiplications qui donneraient des produits déjà obtenus; on multiplie de même les trois premiers facteurs et les produits obtenus par le quatrième facteur, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait employé le dernier facteur comme multiplicateur; tous les facteurs premiers inégaux du nombre proposé, et les produits qu'on a obtenus sont les diviseurs demandés. On dispose les opérations comme il suit :

	1
180	2
90	2, 4
45	3, 6, 12
15	3, 9, 18, 36
5	5, 10, 20, 15, 30, 60, 45, 90, 180.

125. Le *nombre des diviseurs d'un nombre* est égal au produit des sommes qu'on obtient en augmentant d'une unité l'exposant de chaque facteur premier du nombre (121). Ainsi, ayant $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$, le nombre des diviseurs de 180 est, y compris 1 et 180,

$$(2 + 1)\ (2 + 1)\ (1 + 1) = 18.$$

126. *Pour trouver tous les diviseurs communs à plusieurs nombres*, on cherche le plus grand commun diviseur de ces nombres, puis tous les diviseurs de ce plus grand commun diviseur (122 et 124).

LIVRE III.

Fractions et Nombres décimaux.

FRACTIONS.

127. Une ou plusieurs parties d'une unité divisée en parties égales se nomme *fraction* ou *nombre fractionnaire.* Ainsi l'unité ayant été divisée en 9 parties égales, le nombre formé de 5 de ces parties est une fraction.

128. Le *dénominateur* d'une fraction est le nombre qui indique en combien de parties l'unité est divisée. Son *numérateur* est le nombre qui indique combien elle contient de parties égales de l'unité. Ainsi, dans l'exemple précédent, 9 est le dénominateur et 5 le numérateur. Le numérateur et le dénominateur sont les deux *termes* de la fraction.

Remarque. On conçoit qu'une fraction peut contenir toutes les parties d'une ou de plusieurs unités, et même toutes les parties d'une ou de plusieurs unités, plus des parties d'une autre unité : ces unités étant les mêmes et étant toutes divisées en un même nombre de parties égales.

Lorsque la fraction ne renferme pas toutes les parties de l'unité, c'est-à-dire lorsque son numérateur est moindre que son dénominateur, elle est plus petite que l'unité. Si elle contient toutes les parties de l'unité, ses deux termes sont égaux, et elle est égale à l'unité. Enfin, si le numérateur est plus grand que le dénominateur, la fraction est plus grande que l'unité.

129. *Pour énoncer une fraction*, on énonce son numérateur, puis son dénominateur, auquel on ajoute la terminaison *ième.* Ainsi la fraction dont il est question au n° 127 s'énonce *cinq neuvièmes.* Il y a exception pour les dénominateurs 2, 3, 4; ainsi au lieu de un deuxième, un troisième, trois quatrièmes, on dit : un *demi*, un *tiers*, trois *quarts.*

130. *Pour écrire en chiffres une fraction*, on écrit en chiffres le dénominateur sous le numérateur, en les séparant par un trait horizontal. Ainsi la fraction *cinq neuvièmes* s'écrit $\frac{5}{9}$.

131. Une fraction représente le quotient de la division de son numérateur par son dénominateur (48). Ainsi $\frac{5}{9}$ est égal au quotient de 5 divisé par 9.

132. ***Pour mettre une fraction plus grande que l'unité sous la forme d'un entier joint à une fraction moindre que l'unité***, **on divise son numérateur par son dénominateur, et l'on ajoute au quotient entier une** fraction ayant respectivement pour numérateur et pour dénominateur **le reste de la division et le dénominateur de la fraction proposée. Ainsi**

$$\frac{63}{9}=7, \quad \text{et} \quad \frac{37}{5}=7+\frac{2}{5}.$$

133. *Pour convertir un nombre entier 7 en une fraction équivalente ayant un dénominateur donné* 9, on prend pour numérateur de la fraction demandée le produit 63 de son dénominateur 9 par le nombre entier 7. Ainsi

$$7=\frac{7\times 9}{9}=\frac{63}{9}.$$

134. ***En ajoutant terme à terme plusieurs fractions égales entre elles***, **on obtient une fraction égale à chacune des fractions proposées :**

$$\frac{3}{7}=\frac{3}{7}=\frac{3}{7}=\frac{3}{7}=\frac{12}{28}, \quad \frac{4}{6}=\frac{10}{15}=\frac{14}{21}=\frac{4+10+14}{6+15+21}=\frac{28}{42}.$$

De même, en retranchant terme à terme deux fractions égales entre elles, et qui n'ont pas les mêmes termes, **on obtient une fraction égale à chacune des fractions proposées :**

$$\frac{28}{42}=\frac{10}{15}=\frac{28-10}{42-15}=\frac{18}{27}.$$

135. *Lorsqu'on ajoute terme à terme deux et en général un nombre quelconque de fractions inégales*, la fraction qui en résulte est intermédiaire à la plus petite et à la plus grande des fractions proposées :

$$\frac{4}{7}<\frac{4+9}{7+5}<\frac{9}{5}, \quad \frac{4}{7}<\frac{4+8+9}{7+5+5}<\frac{9}{5}.$$

136. ***Lorsqu'on ajoute une même quantité aux deux termes d'une fraction***, cette fraction augmente ou diminue selon qu'elle est plus petite **ou plus grande que 1. Dans les deux cas l'unité est la *limite* dont elle s'approche de plus en plus à mesure que ses termes deviennent plus grands, mais qu'elle ne peut atteindre, puisque ses termes ne peuvent jamais être égaux entre eux. On a**

$$\frac{5}{9}<\frac{5+3}{9+3}, \quad \text{et} \quad \frac{11}{4}>\frac{11+2}{4+2}.$$

Au contraire, si l'on retranche une même quantité de chacun des termes d'une fraction, cette fraction diminue ou augmente selon qu'elle **est plus petite ou plus grande que 1; dans les deux cas elle s'éloigne de** l'unité. On a

$$\frac{8}{12}>\frac{8-3}{12-3}, \quad \text{et} \quad \frac{13}{6}<\frac{13-2}{6-2}.$$

Lorsque la fraction est égale à l'unité, elle ne change pas de valeur, soit qu'on augmente, soit qu'on diminue ses deux termes d'une même quantité. En effet, ses deux termes restent toujours égaux entre eux.

137. *Pour multiplier une fraction par un nombre entier*, on multiplie son numérateur ou, si cela est possible sans reste, on divise son dénominateur par le nombre entier. Ainsi

$$\frac{3}{7}\times 4=\frac{12}{7},\quad \text{et}\quad \frac{3}{8}\times 4=\frac{3}{2}.$$

138. *Pour diviser une fraction par un nombre entier*, on multiplie son dénominateur ou, si cela est possible sans reste, on divise son numérateur par ce nombre entier. Ainsi

$$\frac{3}{7}:4=\frac{3}{7\times 4}=\frac{3}{28},\quad \text{et}\quad \frac{8}{7}:4=\frac{8:4}{7}=\frac{2}{7}.$$

139. *Une fraction ne change pas de valeur lorsqu'on multiplie ou qu'on divise ses deux termes par un même nombre :*

$$\frac{3}{4}=\frac{3\times 2}{4\times 2}=\frac{6}{8},\quad \text{et}\quad \frac{8}{12}=\frac{8:4}{12:4}=\frac{2}{3}.$$

140. *Réduire plusieurs fractions au même dénominateur*, c'est trouver des fractions égales aux fractions proposées, et dont les dénominateurs soient tous égaux entre eux (128).

141. *Pour réduire deux fractions au même dénominateur*, on multiplie les deux termes de chaque fraction par le dénominateur de l'autre. Et, en général, *pour réduire plusieurs fractions au même dénominateur*, on multiplie chaque numérateur par le produit des dénominateurs des autres, et l'on donne aux numérateurs qui en résultent pour dénominateur commun le produit des dénominateurs des fractions :

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times 6}{3\times 6}=\frac{12}{18}\qquad \frac{1}{2}=\frac{3\times 5\times 6}{2\times 3\times 5\times 6}=\frac{90}{180}$$

$$\frac{5}{6}=\frac{5\times 3}{18}=\frac{15}{18}\qquad \frac{2}{3}=\frac{2\times 2\times 5\times 6}{180}=\frac{120}{180}$$

$$\frac{4}{5}=\frac{4\times 2\times 3\times 6}{180}=\frac{144}{180}$$

$$\frac{5}{6}=\frac{5\times 2\times 3\times 5}{180}=\frac{150}{180}.$$

Quand on reconnaît qu'un nombre est divisible par tous les dénominateurs des fractions proposées, c'est-à-dire qu'il est commun multiple de ces dénominateurs (123), on le prend pour dénominateur commun, et on multiplie le numérateur de chaque fraction par le quotient obtenu en divisant ce dénominateur commun par le dénominateur de la fraction. Ainsi, pour les exemples précédents, on reconnaît de suite que l'on peut prendre 6 et 30 pour dénominateurs communs, et l'on a :

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times 2}{6}=\frac{4}{6} \qquad \frac{1}{2}=\frac{1\times 15}{30}=\frac{15}{30}$$

$$\frac{5}{6}=\frac{5}{6}=\frac{5}{6} \qquad \frac{2}{3}=\frac{2\times 10}{30}=\frac{20}{30}$$

$$\frac{4}{5}=\frac{4\times 6}{30}=\frac{24}{30}$$

$$\frac{5}{6}=\frac{5\times 5}{30}=\frac{25}{30}.$$

On peut toujours rechercher le plus petit commun multiple des dénominateurs (123), et le prendre pour dénominateur commun, comme on vient de le faire; mais cette recherche conduit quelquefois à des calculs assez longs. Lorsque les dénominateurs des fractions proposées sont premiers entre eux, leur plus petit commun multiple est égal à leur produit, et alors pour réduire les fractions au même dénominateur on suit la règle générale sans simplification possible (162).

ADDITION DES FRACTIONS.

142. *Pour additionner des fractions*, on les réduit, si cela est nécessaire, au même dénominateur (141); on fait la somme des numérateurs qui en résultent, et l'on prend pour résultat la fraction qui a cette somme pour numérateur et pour dénominateur le dénominateur commun. Exemples :

$$\frac{5}{12}+\frac{7}{12}+\frac{17}{12}, \quad \text{somme } \frac{5+7+17}{12}=\frac{29}{12}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{20}{30}, \quad +\frac{7}{5}=\frac{42}{30}, \quad +\frac{5}{6}=\frac{25}{30}, \quad \text{somme } \frac{87}{30}.$$

143. *Pour ajouter un nombre entier à une fraction*, on convertit ce nombre entier en une fraction équivalente ayant pour dénominateur celui de la fraction (133), et l'on continue comme dans le cas précédent. Cela revient à ajouter au numérateur de la fraction proposée le produit du dénominateur par le nombre entier :

$$\frac{4}{5}+7=\frac{4+5\times 7}{5}=\frac{39}{5}.$$

144. *Pour ajouter plusieurs fractions et plusieurs nombres entiers*, on fait séparément la somme des nombres entiers et celle des fractions; puis on opère sur ces sommes comme dans le cas précédent :

$$\frac{1}{4}+5+3+\frac{2}{3}=(5+3)+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)=8+\frac{11}{12}=\frac{107}{12}.$$

SOUSTRACTION DES FRACTIONS.

145. *Pour avoir la différence de deux fractions*, on les réduit, si cela est nécessaire, au même dénominateur (141); on prend la différence des numérateurs qui en résultent, et le résultat cherché a pour numérateur cette différence et pour dénominateur le dénominateur commun :

$$\frac{7}{8}-\frac{3}{8}=\frac{7-3}{8}=\frac{4}{8},\qquad \frac{3}{4}-\frac{1}{7}=\frac{21}{28}-\frac{4}{28}=\frac{17}{28}.$$

146. *Pour soustraire une fraction d'un nombre entier ou réciproquement*, on convertit ce nombre entier en une fraction équivalente ayant pour dénominateur celui de la fraction (133), et l'on rentre dans le cas précédent. Ainsi :

$$8-\frac{4}{7}=\frac{56}{7}-\frac{4}{7}=\frac{56-4}{7}=\frac{52}{7},\qquad \frac{15}{4}-3=\frac{15}{4}-\frac{12}{4}=\frac{3}{4}.$$

147. *Pour soustraire un nombre entier joint à une fraction d'un nombre entier joint à une fraction*, $4+\frac{1}{3}$ de $7+\frac{3}{5}$ par exemple, on peut convertir chacune de ces quantités en une fraction équivalente (143), puis prendre la différence des fractions obtenues (145 et 146). Mais il est plus simple de prendre d'abord la différence $\frac{3}{5}-\frac{1}{3}=\frac{9}{15}-\frac{5}{15}=\frac{4}{15}$ des fractions, puis celle $7-4=3$ des nombres entiers; ce qui donne le résultat $3+\frac{4}{15}$.

Dans le cas où la fraction dont on soustrait serait la plus petite, on l'augmenterait d'une unité, ce qui reviendrait à augmenter son numérateur d'un nombre égal à son dénominateur, et, par compensation, on diminuerait d'une unité le nombre entier dont on soustrait. Comme cas particulier, la fraction dont on soustrait peut être nulle. Exemples :

$$\begin{array}{lcl} 7+\frac{3}{5} & \text{ou} & 7+\frac{9}{15} \\ 4+\frac{1}{3} & & 4+\frac{5}{15} \\ \hline \text{Différence} & & 3+\frac{4}{15} \end{array}\qquad \begin{array}{lclcl} 7+\frac{1}{3} & \text{ou} & 7+\frac{5}{15} & \text{ou} & 6+\frac{20}{15} \\ 4+\frac{3}{5} & & 4+\frac{9}{15} & & 4+\frac{9}{15} \\ \hline & & \text{Différence} & & 2+\frac{11}{15} \end{array}\qquad \begin{array}{lcl} 8 & \text{ou} & 7+\frac{5}{5} \\ 3+\frac{2}{5} & & 3+\frac{2}{5} \\ \hline \text{Différence} & & 4+\frac{3}{5} \end{array}$$

Pour soustraire plusieurs nombres entiers joints à des fractions, de plusieurs nombres entiers joints à des fractions, on convertirait en un nombre entier joint à une fraction toutes les quantités dont on veut soustraire (144); on en ferait autant de toutes les quantités à soustraire, et l'on retomberait dans le cas précédent.

MULTIPLICATION DES FRACTIONS

148. *Pour multiplier une quantité par une fraction*, on la multiplie par le numérateur de la fraction, puis on divise le produit par son dénominateur.

Remarque. Le produit d'une quantité par une fraction est égal au multiplicande, plus petit ou plus grand que le multiplicande, selon que la fraction multiplicateur est égale à l'unité, plus petite ou plus grande que l'unité.

149. Deux nombres sont *inverses* l'un de l'autre, lorsque leur produit est égal à l'unité. Ainsi l'inverse du nombre 7 est la fraction $\frac{1}{7}$.

150. *Le produit d'un nombre entier par une fraction* s'obtient comme celui d'une fraction par un nombre entier (137). Ainsi

$$9 \times \frac{3}{4} = \frac{9 \times 3}{4} = \frac{27}{4}, \quad 3 \times \frac{7}{9} = \frac{7}{9:3} = \frac{7}{3}.$$

151. *Le produit d'une fraction par une autre* a pour numérateur le produit des numérateurs des fractions proposées, et pour dénominateur celui des dénominateurs.

$$\frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{3 \times 7}{4 \times 5} = \frac{21}{20}.$$

152. *Le produit de tant de nombres qu'on voudra, entiers et fractionnaires*, est une fraction dont le numérateur a pour facteurs les nombres entiers et les numérateurs des fractions proposées, et dont le dénominateur est égal au produit des dénominateurs de ces mêmes fractions.

$$5 \times \frac{3}{4} \times 2 \times \frac{2}{7} = \frac{5 \times 3 \times 2 \times 2}{4 \times 7} = \frac{60}{28}.$$

153. *Prendre des fractions de fractions d'une quantité quelconque*, c'est multiplier cette quantité par le produit des fractions (152). Ainsi

les $\frac{2}{3}$ de 5 sont $5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$;

le $\frac{1}{4}$ des $\frac{2}{3}$ de 5 vaut $5 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{10}{12}$;

les $\frac{3}{7}$ du $\frac{1}{4}$ des $\frac{2}{3}$ de 5 valent $5 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{7} = \frac{30}{84}$.

Remarque. Prendre d'une quantité une fraction qui a l'unité pour numérateur, c'est diviser cette quantité par le dénominateur de la fraction. Ainsi le $\frac{1}{6}$ de 15 vaut $\frac{15}{6}$ (62).

154. Les numéros 32, 33, 40, 41, 42 sont encore vrais lorsqu'il s'agit de nombres entiers et fractionnaires.

DIVISION DES FRACTIONS.

155. *Pour diviser une quantité par une fraction*, on multiplie cette quantité par la fraction diviseur renversée (150 et 151).

$$7 : \frac{3}{4} = 7 \times \frac{4}{3} = \frac{28}{3}, \quad \frac{4}{7} : \frac{2}{5} = \frac{4}{7} \times \frac{5}{2} = \frac{20}{14}.$$

Remarque. Le quotient est égal au dividende, plus petit ou plus grand que le dividende, selon que la fraction diviseur est égale à l'unité, plus grande ou plus petite que l'unité.

156. Les propositions 53, 56, 57, 58, 59, 60, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, et quelques-unes de leurs conséquences immédiates, étant fondées sur des principes applicables aux nombres fractionnaires comme aux nombres entiers, s'étendent elles-mêmes à ces deux espèces de nombres.

157. *Pour diviser des nombres entiers joints à des fractions par des nombres entiers joints à des fractions*, on convertit le dividende en une seule fraction (144 et 147), ainsi que le diviseur, ce qui ramène le calcul à diviser une quantité par une fraction (155).

$$\left(3 + \frac{2}{5}\right) : \left(2 + \frac{1}{4}\right) = \frac{17}{5} : \frac{9}{4} = \frac{17}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{68}{45}.$$

FRACTIONS IRRÉDUCTIBLES.

158. *Simplifier une fraction* ou *la réduire à une plus simple expression*, c'est rendre ses deux termes plus petits sans changer sa valeur.

159. Une *fraction* est *irréductible* ou *réduite à sa plus simple expression*, lorsqu'elle ne peut être simplifiée. Telles sont les fractions $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{11}$ (161).

160. Les deux termes d'une fraction irréductible, $\frac{7}{8}$ par exemple, sont premiers entre eux (77).

161. *Pour réduire une fraction $\frac{30}{45}$ à une plus simple expression*, il suffit de diviser ses deux termes par un commun diviseur (139) :

$$\frac{30}{45} = \frac{30 : 3}{45 : 3} = \frac{10}{15}.$$

Pour réduire une fraction $\frac{30}{45}$ à sa plus simple expression, on divise ses deux termes par leur plus grand commun diviseur 15 (99).

$$\frac{30}{45} = \frac{30 : 15}{45 : 15} = \frac{2}{3};$$

ou encore on supprime tous les facteurs premiers communs à ses deux termes (122).

$$\frac{30}{45}=\frac{2\times3\times5}{3\times3\times5}=\frac{2}{3}.$$

162. *Le plus petit commun multiple* 36 *des dénominateurs de plusieurs fractions irréductibles* $\frac{5}{6}, \frac{4}{9}, \frac{7}{12}$ est le plus petit dénominateur commun auquel on puisse réduire ces fractions (141).

163. *Le plus grand commun diviseur de plusieurs fractions irréductibles* $\frac{6}{5}, \frac{9}{4}, \frac{12}{7}$ est la fraction $\frac{3}{140}$, qui a pour numérateur le plus grand commun diviseur 3 des numérateurs (101), et pour dénominateur le plus petit commun multiple 140 de leurs dénominateurs (116).

164. *Le plus petit commun multiple de plusieurs fractions irréductibles* $\frac{5}{6}, \frac{4}{9}, \frac{7}{12}$ est la fraction irréductible $\frac{140}{3}$, qui a pour numérateur le plus petit commun multiple 140 des numérateurs des fractions proposées, et pour dénominateur le plus grand commun diviseur 3 de leurs dénominateurs.

NOMBRES DÉCIMAUX.

165. *Une fraction décimale* est une fraction qui a pour dénominateur une puissance de 10 (82 et 83). Telles sont les fractions $\frac{3}{10}$ et $\frac{378}{100}$.

166. Un nombre décimal est un nombre composé d'un nombre entier, qui peut être nul, et d'une ou de plusieurs fractions décimales dont les numérateurs sont moindres que la base 10 et dont les dénominateurs sont des puissances différentes de cette base. Tels sont les nombres :

$$\left(37+\frac{5}{10}+\frac{8}{1000}\right), \quad \text{et} \quad \left(\frac{3}{10}+\frac{5}{100}+\frac{7}{1000}\right).$$

167. *Numération des nombres décimaux.* Pour simplifier l'écriture d'un nombre décimal, on est convenu que lorsque plusieurs chiffres seraient écrits les uns à la suite des autres sur une même ligne horizontale, et séparés en deux parties par une virgule, la partie à gauche exprimerait les unités; le premier chiffre à droite de la virgule, des *dixièmes* ou des *unités décimales de premier ordre;* le second, des *centièmes* ou des *unités décimales de second ordre*, et ainsi de suite; de sorte que dans un nombre décimal, comme dans un nombre entier, un chiffre quelconque placé à la gauche d'un autre exprime des unités dix fois plus grandes que celui-ci (7).

D'après cette convention, le nombre $\left(37+\frac{5}{10}+\frac{8}{1000}\right)$ s'écrit 37,508, et celui $\left(\frac{3}{10}+\frac{5}{100}+\frac{7}{1000}\right)$ s'écrit 0,357.

Pour énoncer un nombre décimal écrit en chiffres, on énonce successivement la partie entière et la partie décimale, en ajoutant à chaque énoncé le nom des unités qu'exprime le premier chiffre à droite de chaque partie. Ainsi le nombre 37,508 s'énonce *trente-sept unités cinq cent huit millièmes*, et celui 0,357 s'énonce *zéro unité trois cent cinquante-sept millièmes*, ou simplement, en négligeant le zéro, *trois cent cinquante-sept millièmes*.

Lorsque la partie décimale contient plus de 5 ou 6 chiffres, pour l'énoncer, il convient de la partager en tranches de trois chiffres à partir de la virgule, sauf à ne laisser qu'un ou deux chiffres à la dernière tranche à droite; puis, en commençant par la gauche, d'énoncer successivement chaque tranche, en désignant le nom des unités qu'exprime son premier chiffre à droite. Ainsi le nombre

$$37,325\,046\,457\,69$$

s'énoncera : 37 *unités*, 325 *millièmes*, 46 *millionièmes*, 457 *billionièmes*, 69 *cent-billionièmes* ou 690 *trillionièmes*, en complétant par un zéro le nombre 3 des chiffres de la dernière tranche.

Réciproquement, *pour écrire en chiffres un nombre décimal énoncé*, on écrit successivement la partie entière, que l'on remplace par un 0 quand elle est nulle, la virgule, et la partie décimale, que l'on écrit comme un nombre entier, mais de manière que son premier chiffre à droite exprime des unités décimales de l'ordre énoncé. Ainsi le nombre décimal *dix-huit unités deux cent sept dix-millièmes* s'écrit 18,0207, et celui *trois cent cinquante-sept millièmes* s'écrit 0,357.

De même, le nombre décimal 25 *unités*, 427 *millièmes*, 8 *millionièmes*, 35 *billionièmes*, 9 *dix-billionièmes* s'écrit

$$25,427\,008\,035\,9.$$

168. Chacun des chiffres placés à la droite de la virgule est une *décimale* ou un *chiffre décimal* du nombre proposé. Sa forme indique sa valeur absolue, et la position qu'il occupe sa valeur relative (8).

169. Un nombre décimal ne change pas de valeur quand on écrit ou quand on supprime un ou plusieurs zéros à sa droite.

$$32,45 = 32,4500, \text{ et } 3,125\,00 = 3,125.$$

170. *Pour mettre un nombre décimal sous la forme d'une fraction décimale* (165), on prend pour numérateur de la fraction demandée le nombre proposé, abstraction faite de la virgule, et pour dénominateur, l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres décimaux.

$$27,347 = \frac{27347}{1000}.$$

171. Réciproquement, *pour mettre une fraction décimale sous la forme d'un nombre décimal*, il suffit d'écrire son numérateur et de séparer sur sa droite autant de chiffres décimaux qu'il y a de zéros au dénomina-

teur. Dans le cas où le nombre des chiffres du numérateur serait moindre que celui des zéros du dénominateur, on y suppléerait en écrivant des zéros à la gauche du numérateur.

$$\frac{2348}{1000} = 2,348, \quad \text{et} \quad \frac{37}{1000} = 0,037.$$

172. Une quantité est une valeur d'une autre quantité, approchée à moins d'une troisième quantité, lorsque la différence des deux premières quantités est moindre que la troisième. Ainsi 24,37 est une valeur approchée de 24,376 à moins de un centième, parce que la différence 0,006 des deux premiers nombres est moindre que 0,01.

173. Une valeur d'une quantité est dite approchée par *défaut* ou par *excès*, suivant qu'elle est plus petite ou plus grande que cette quantité. Ainsi 8,7 est une valeur de 8,76 approchée par défaut, 8,8 est une valeur approchée par excès (196 et suivants).

174. *La valeur la plus approchée d'un nombre décimal, à moins d'une unité décimale d'un ordre déterminé*, est le résultat qu'on obtient en supprimant dans le nombre proposé toutes les décimales écrites à la droite du chiffre qui exprime des unités de l'ordre indiqué. Ainsi la valeur du nombre 7,465 37, approchée à moins d'un millième, est 7,465.

175. *Pour approcher le plus possible de la valeur d'un nombre décimal en ne conservant qu'un nombre déterminé de chiffres décimaux*, on distingue trois cas : 1° si le premier chiffre qui suit le dernier que l'on veut conserver est moindre que 5, on le supprime avec ceux qui suivent; 2° s'il est plus grand que 5, ou si, étant 5, il est suivi d'autres chiffres significatifs, on le supprime avec ceux qui suivent, et l'on augmente d'une unité le dernier chiffre conservé; 3° enfin, s'il est 5 sans être suivi d'autres chiffres, on le supprime encore, et l'on augmente ou non le dernier chiffre conservé. Dans tous les cas, l'erreur ne peut excéder une demi-unité du dernier ordre conservé. En ne conservant qu'un chiffre décimal, la valeur la plus approchée de 4,8365 est 4,8; en en conservant deux, elle est 4,84; en en conservant trois, elle est 4,836 ou 4,837.

176. Pour multplier ou pour diviser un nombre décimal par l'unité suivie d'un ou plusieurs zéros, il suffit d'avancer la virgule d'autant de rangs vers la droite ou vers la gauche qu'il y a de zéros après l'unité.

$$3,127 \times 100 = 312,7; \quad 25,83 : 1000 = 0,025\,83.$$

Remarque. La même règle est applicable au cas où le dividende est un nombre entier, 453 : 100 = 4,53.

DES QUATRE OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES DÉCIMAUX

177. *Pour additionner des nombres décimaux*, on les dispose et on opère comme pour l'addition des nombres entiers (24), en plaçant la virgule au résultat sur la même ligne verticale que dans les nombres

proposés. (Cette règle est également applicable au cas où quelques-uns des nombres proposés sont entiers.)

```
 37,425
  8,72
436
  0,54
 68,034
-------
550,719
```

178. *Pour trouver la différence de deux nombres décimaux*, ou d'un nombre décimal et d'un nombre entier, on les dispose et on opère comme pour les nombres entiers (28), en plaçant la virgule au résultat sur la même ligne verticale que dans les nombres proposés. (Lorsqu'il y a plus de chiffres décimaux dans l'un des nombres que dans l'autre, on écrit ou l'on suppose écrits à la droite de ce dernier nombre autant de zéros qu'il est nécessaire pour qu'il contienne autant de chiffres décimaux que le premier.)

```
68,740       837
53,837        73,534
------       -------
14,903       763,466
```

179. *Pour effectuer le produit de plusieurs nombres décimaux, ou de plusieurs nombres les uns décimaux et les autres entiers*, on opère comme pour les nombres entiers (46), en faisant abstraction de la virgule, et l'on sépare sur la droite du résultat autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans tous les facteurs.

```
   3,27       0,2
   4,005      0,3
   -----      ----
    1635      0,06
 13 0800
--------
13,09635
```

$8{,}75 \times 4 \times 6{,}3 = 220{,}500 = 220{,}5.$

Remarque. Tout nombre décimal pouvant être mis sous la forme d'une fraction décimale (170), les principes applicables aux fractions s'étendent aux nombres décimaux (154). Ainsi, par exemple, le produit de plusieurs nombres décimaux ne change pas de valeur quand on intervertit l'ordre des facteurs.

180. *Pour diviser un nombre décimal par un nombre entier*, on dispose les opérations comme pour les nombres entiers (62). Puis on divise la partie entière du dividende par le diviseur, ce qui donne la partie entière du quotient; on convertit le reste en dixièmes, auxquels on ajoute les dixièmes du dividende, ce qui se fait en écrivant simplement le chiffre des dixièmes du dividende à la droite du reste; on divise le nombre qui en résulte par le diviseur, ce qui donne le chiffre des dixièmes du quotient; on convertit le nouveau reste en centièmes, auxquels on ajoute les centièmes du dividende, c'est-à-dire qu'on écrit le chiffre des centièmes du dividende à la droite du nouveau reste; on divise le nombre qui en résulte par le diviseur, ce qui donne le chiffre des centièmes du quotient, et l'on continue ainsi de suite, jus-

qu'à ce qu'on ait un reste nul, ou au quotient un chiffre qui exprime des unités d'un ordre indiqué. Dans ce dernier cas, on a la valeur du quotient à moins d'une unité décimale de cet ordre. Si l'on voulait avoir la valeur la plus approchée du quotient en ne conservant qu'un nombre déterminé de chiffres décimaux, il faudrait, d'après ce qui a été dit n° 175, calculer le chiffre qui suit le dernier que l'on veut conserver.

Cette règle est encore applicable au cas où le dividende étant un nombre entier, on se propose d'obtenir le quotient avec des décimales.

```
35,427  | 12              135 | 12
11 4    |--------          15 |------
   62   | 2,95225           30 | 11,25
    27                       60
     30                       0
      60
       0
```

Si l'on avait demandé le quotient à moins d'un millième, on aurait arrêté l'opération après avoir obtenu 2,952 au quotient.

181. *Pour diviser un nombre entier ou décimal par un nombre décimal*, on prend pour diviseur le diviseur proposé, abstraction faite de la virgule, et pour dividende le nombre qu'on obtient en multipliant le dividende proposé par l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y avait de décimales au diviseur (176), ce qui ramène l'opération à la division d'un nombre entier ou décimal par un nombre entier (180). Ainsi pour diviser 3,3756 par 0,45, on opère de cette manière :

```
337,56 | 45
 22 5  |------
   060 | 7,501
    15
```

Remarque 1. Les propositions du n° 156 sont encore applicables aux nombres décimaux.

Remarque 2. Les preuves des opérations s'effectuent pour les nombres décimaux comme pour les nombres entiers (25, 29, 47, 63). Pour les preuves par 9 et par 11, on néglige la virgule (94, 95, 96, 97, 98).

RÉDUCTION DES FRACTIONS EN DÉCIMALES.

182. Un nombre décimal est *périodique*, lorsqu'un ou plusieurs de ses chiffres décimaux se reproduisent dans le même ordre et indéfiniment : tel est le nombre 2,374 74... Le nombre 74, formé par les chiffres 7 et 4 qui se reproduisent dans le même ordre et indéfiniment, est la *période* du nombre décimal.

183. Un nombre décimal est *périodique simple* ou *périodique mixte* selon que la période commence ou non au chiffre des dixièmes. Ainsi le nombre décimal 3,4545... est périodique simple, et celui 2,374 74... est périodique mixte.

184. *Une quantité constante est limite d'une quantité variable*, lorsque la différence de ces quantités peut devenir aussi petite que l'on veut sans être nulle. Ainsi l'unité est la limite du nombre décimal 0,999... Car on peut prendre assez de chiffres 9 pour que l'excès de l'unité sur le nombre qui en résulte soit moindre qu'une *partie aliquote* ou sous-multiple de l'unité aussi petit que l'on veut (37 et 136).

Remarque. Une quantité variable 0,999... ne peut avoir qu'une limite; ou, autrement, deux quantités variables dont les valeurs sont constamment égales entre elles ont la même limite.

185. *Réduire une fraction en décimales*, c'est mettre cette fraction sous la forme d'un nombre décimal.

186. *Pour réduire une fraction en décimales*, on divise son numérateur par son dénominateur, en opérant comme dans la division d'un nombre décimal par un nombre entier (180).

$$\frac{27}{8} = 3{,}375.$$

187. Lorsque le dénominateur d'une fraction irréductible (159) ne contient que les facteurs premiers 2 et 5, la réduction de cette fraction en décimales conduit à un quotient exact, dans lequel le nombre des chiffres décimaux est égal au plus grand des exposants des facteurs 2 et 5 au dénominateur.

$$\frac{127}{40} = \frac{127}{2^3 \times 5} = 3{,}175.$$

188. Toute fraction irréductible dont le dénominateur contient un ou plusieurs facteurs premiers autres que 2 et 5 ne peut pas se réduire exactement en décimales, et la division de son numérateur par son dénominateur conduit à un quotient périodique (182).

$$\frac{127}{30} = \frac{127}{2 \times 3 \times 5} = 4{,}2333\ldots$$

189. Toute fraction $\frac{127}{30}$ est la *limite* (184) du quotient périodique 4,2333... auquel conduit sa réduction en décimales (185).

190. Lorsque le dénominateur d'une fraction irréductible $\frac{7}{3}$ ne contient aucun des facteurs 2 et 5, la réduction de cette fraction en décimales conduit à un quotient périodique simple (183).

$$\frac{7}{3} = 2{,}333\ldots$$

191. Lorsque le dénominateur d'une fraction irréductible contient un ou plusieurs des facteurs 2 et 5 avec d'autres facteurs premiers, la réduction de cette fraction en décimales conduit à un quotient périodique mixte, dans lequel le nombre des chiffres décimaux non périodiques est

égal au plus grand des exposants des facteurs 2 et 5 au dénominateur. Ainsi la fraction irréductible $\frac{85}{84} = \frac{85}{2^2 \times 3 \times 7}$ conduira à deux chiffres décimaux non périodiques.

192. *Le nombre des chiffres contenus dans la période* ne peut excéder le produit moins un des facteurs premiers autres que 2 et 5 qui entrent au dénominateur de la fraction proposée; ainsi dans l'exemple précédent il ne peut excéder $3 \times 7 - 1$ ou 20.

193. *Tout nombre décimal* 0,2727..., *périodique simple, moindre que l'unité, et dont la période n'est pas* 9, *a pour génératrice* la fraction $\frac{27}{99}$, qui a pour numérateur la période et pour dénominateur le nombre formé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période. Ainsi,

$$\frac{27}{99} = 0,2727\ldots \text{ (194, } \textit{Remarque.}\text{)}$$

194. Tout nombre décimal 4,2727..., périodique simple, plus grand que l'unité, et dont la période n'est pas 9, provient de la réduction d'une fraction en décimales. Il en est de même de toute fraction périodique mixte 4,342727... dont la période n'est pas 9.

Pour obtenir la fraction génératrice d'un nombre décimal 4,2727..., *périodique simple et plus grand que l'unité*, il suffit de prendre pour numérateur la partie entière suivie de la période, moins la partie entière, et pour dénominateur un nombre formé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période. Elle est donc

$$\frac{427 - 4}{99} = \frac{423}{99}.$$

Pour obtenir la fraction génératrice d'un nombre décimal 15,273434..., *périodique mixte*, il suffit de prendre pour numérateur la partie entière suivie de la partie décimale non périodique et de la première période, moins la partie entière suivie de la partie décimale non périodique, et pour dénominateur un nombre formé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période et suivi d'autant de zéros qu'il y a de chiffres dans la partie décimale non périodique. Elle est par conséquent.

$$\frac{152734 - 1527}{9900} = \frac{151207}{9900}.$$

Remarque. Lorsque la période est le chiffre 9, le nombre décimal n'a pas de génératrice; on obtient sa limite en supprimant les périodes et en augmentant d'une unité le dernier chiffre à droite du nombre qui en résulte. On a en effet

$$0,999\ldots = \frac{9}{9} = 1;\ 4,999\ldots = \frac{49-4}{9} = 5;\ 4,34999\ldots = \frac{4349-434}{900} = 4,35.$$

OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES FRACTIONNAIRES ET DÉCIMAUX COMBINÉS.

195. *Pour additionner des nombres fractionnaires et décimaux*, on met chaque nombre décimal sous la forme d'une fraction (170); ce qui ramène l'opération à une addition de fractions (142).

Remarque. Lorsque les nombres décimaux proposés ont un nombre limité de chiffres et que les fractions sont exactement réductibles en décimales (186), on peut, en effectuant cette réduction, ramener l'opération à une addition de nombres décimaux.

On trouvera de même la différence de deux nombres, l'un fractionnaire et l'autre décimal.

Quant à la multiplication et à la division d'une fraction par un nombre décimal, elles se ramènent aux mêmes opérations sur des fractions, en mettant chaque nombre décimal sous la forme d'une fraction (170), sauf à convertir ensuite la fraction résultante en décimales (186).

APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES. OPÉRATIONS ABRÉGÉES.

196. Lorsqu'on remplace une quantité par une valeur approchée par défaut ou par excès (173), la différence entre la valeur exacte et la valeur approchée se nomme *erreur absolue*, et le quotient de l'erreur absolue par la valeur exacte est appelée *erreur relative*.

Ainsi la distance de deux points étant de 40 mètres, si on la suppose égale à 42 mètres ou à 38 mètres, l'erreur absolue sera de $42 - 40$ ou $40 - 38 = 2$ mètres, et l'erreur relative sera $\frac{2}{40} = \frac{1}{20}$.

L'erreur relative exprime quelle fraction l'erreur absolue commise est de la quantité considérée, ou encore le rapport de l'erreur absolue à cette quantité (205).

197. Lorsqu'on remplace un nombre entier 314 159 par 314 100, ou un nombre décimal 3,141 59 par 3,141, ou encore 0,031 415 9 par 0,031 41, c'est-à-dire lorsqu'on supprime des chiffres sur la droite du nombre, en les remplaçant par des zéros si le nombre est entier ou s'ils se trouvent à gauche de la virgule dans le nombre décimal, l'erreur absolue est respectivement 59, 0,000 59, 0,000 005 9, nombres formés par les chiffres supprimés; et l'erreur relative est

$$\frac{59}{314\,159} = \frac{0{,}000\,59}{3{,}141\,59} = \frac{0{,}000\,0059}{0{,}031\,4159}.$$

Ces exemples font voir que, pour des nombres qui ne diffèrent que par la position de la virgule, l'erreur relative ne dépend que des chiffres supprimés, et non de la position de la virgule; mais que quant à l'erreur absolue, elle dépend à la fois des chiffres supprimés et de la position de la virgule.

L'erreur absolue est respectivement moindre que 100, 0,001 et 0,000 01,

c'est-à-dire qu'*une unité de l'ordre du dernier chiffre conservé*, et *l'erreur relative est moindre que* $\frac{100}{314\,159}=\frac{0,001}{3,141\,59}=\frac{0,000\,01}{0,031\,4159}$, et à plus forte raison que $\frac{100}{300\,000}=\frac{1}{3000}$ et surtout que $\frac{1}{1000}=0,001$, c'est-à-dire qu'*une unité décimale d'un ordre marqué par le nombre moins un des chiffres conservés*, ce nombre ne comprenant pas les zéros qui peuvent se trouver à gauche du premier chiffre significatif conservé.

Il en résulte que *pour avoir une valeur approchée par défaut d'un nombre entier ou décimal avec une erreur relative moindre que* 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001... *il suffit de conserver respectivement sur la gauche du nombre* 2, 3, 4, 5... chiffres, *à partir du premier chiffre significatif.* Ainsi la valeur approchée par défaut des nombres 314 159, 31 415,9, 3,141 59 et 0,031 4159, avec une erreur relative moindre que 0,001 est respectivement 314 100, 31 410, 3,141 et 0,031 41.

Remarque 1. Lorsque le premier chiffre significatif à gauche du nombre est plus grand que 1, l'erreur relative fournie par la règle précédente est moindre qu'une demi-unité décimale de l'ordre marqué par le nombre moins un des chiffres conservés. En effet, pour le nombre 0,031 4159 remplacé par 0,031 41, l'erreur relative étant moindre que $\frac{1}{3000}$, elle est à plus forte raison moindre que $\frac{1}{2000}$ ou qu'un demi-millième.

Remarque 2. Lorsque le premier chiffre significatif à gauche de la partie conservée est 1, et que le premier chiffre à gauche de la partie supprimée est plus petit que 5 ou 5 non suivi d'autres chiffres significatifs, l'erreur relative est encore moindre qu'une demi-unité de l'ordre marqué par le nombre moins un des chiffres conservés. En effet, le nombre 1,141 37 étant remplacé par 1,141, l'erreur absolue 0,000 37 est moindre qu'un demi-millième, et le nombre proposé excédant 1000 millièmes, l'erreur relative est moindre qu'un demi-millième divisé par 1000 millièmes ou par 1, c'est-à-dire que un demi-millième.

Remarque 3. Des deux remarques précédentes, il résulte que dans la plupart des cas (17 environ sur 18), la valeur relative d'un nombre entier ou décimal, à la droite duquel on supprime un ou plusieurs chiffres, est moindre qu'une demi-unité décimale de l'ordre marqué par le nombre moins 1 des chiffres conservés à partir du premier chiffre significatif à gauche.

Remarque 4. Lorsqu'on prend une valeur approchée par excès d'un nombre entier ou décimal, en supprimant des chiffres à sa droite et en augmentant d'une unité le dernier conservé, tout ce qui précède est encore applicable. Ainsi pour approcher par excès du nombre 1,141 59 avec une erreur relative moindre que 0,001, on le remplacera par 1,142. Le nombre 3,141 59 étant remplacé par 3,142, l'erreur relative sera moindre que un demi-millième (*Remarque* 1).

Remarque 5. En ne conservant qu'un nombre déterminé de chiffres, il est évident que l'erreur relative sera d'autant plus petite que l'erreur

absolue sera moindre; il y aura donc lieu de prendre celle des valeurs approchées par défaut ou par excès qui donnera la plus petite erreur absolue (175).

198. *Addition. L'erreur absolue de la somme de plusieurs nombres* dont toutes les valeurs sont approchées par défaut ou par excès est égale à la somme des erreurs absolues de ces nombres.

Lorsque des nombres ont des valeurs approchées par défaut et d'autres des valeurs approchées par excès, on fait la somme des erreurs par défaut et celle des erreurs par excès, et la différence des deux résultats obtenus est l'erreur absolue de la somme des nombres proposés. Le sens des erreurs qui ont fourni la plus grande somme est celui de l'erreur absolue du résultat de l'addition.

L'erreur relative de la somme de plusieurs nombres est égale à l'erreur absolue divisée par cette somme.

Pour calculer, avec une erreur absolue moindre qu'une unité d'un ordre déterminé, la somme de moins de 11 nombres, on fait la somme à partir des chiffres qui expriment des unités d'un ordre immédiatement inférieur à celui désigné, en négligeant tous les chiffres à droite. Ainsi *pour calculer, avec une erreur absolue moindre que* 0,1, *la somme*

$$5,347 + 8,7537 + 0,0425 = 14,1432$$

on fait simplement la somme

$$5,34 + 8,75 + 0,04 = 14,13.$$

En effet, l'erreur absolue sur chaque nombre étant plus petite que 0,01, comme il y a moins de 11 nombres, l'erreur absolue de la somme sera plus petite que $0,01 \times 10 = 0,1$.

S'il y avait plus de 10 nombres et moins de 101, on prendrait un chiffre décimal de plus en faisant la somme.

Soit maintenant à *calculer, avec une erreur relative moindre que* 0,01, *la somme*

$$75,347 + 8,7537 + 0,6425 = 84,7432.$$

On fait la somme

$$70 + 8 + 0,6 = 78,6$$

des nombres formés par les premiers chiffres à gauche des nombres proposés; on divise cette somme par 100, formé de l'unité suivie d'autant de zéros que l'indique l'ordre de l'unité énoncé (0,01), ce qui donne 0,786; on divise cette somme par le nombre 3 des nombres à ajouter, et le premier chiffre à gauche du quotient 0,262 exprimant des dixièmes, cela indique qu'il suffit de prendre chacun des nombres proposés avec un chiffre décimal seulement. Si ce premier chiffre à gauche avait exprimé des centièmes, on aurait pris les nombres avec deux chiffres décimaux; s'il avait exprimé des millièmes, on en aurait pris trois... Ainsi la somme cherchée est

$$75,3 + 8,7 + 0,6 = 84,6.$$



En effet, l'erreur relative de la somme des nombres proposés devenant moindre que 0,01 dès que l'erreur absolue est moindre que la centième partie de cette somme (197), comme la somme des nombres proposés est plus grande que $70+8+0,6=78,6$, et que, par suite, sa centième partie est plus grande que $78,6\times 0,01=0,786$, en prenant chacun des nombres proposés avec une erreur absolue moindre que $\frac{0,786}{3}=0,262$, et moindre surtout que 0,1, ce qu'on fait en les prenant avec un chiffre décimal, on est sûr que l'erreur absolue de leur somme sera moindre que 0,786 et à plus forte raison que la centième partie de la somme des nombres proposés : la somme ainsi calculée satisfait donc à la question.

199. *Soustraction.* Le plus grand nombre étant la somme du plus petit et de la différence, selon que les erreurs absolues des deux nombres proposés ont un même sens, c'est-à-dire sont toutes les deux par défaut ou par excès, ou que ces erreurs sont de sens contraires, l'erreur absolue du résultat est égale à la différence ou à la somme des erreurs absolues de ces nombres :

$$\begin{array}{r}8,67\\3,24\\\hline 5,43\end{array}\qquad\begin{array}{r}8,6\\3,2\\\hline 5,4\end{array}\qquad\begin{array}{r}0,07\\0,04\\\hline 0,03\end{array}\qquad\begin{array}{r}8,7\\3,2\\\hline 5,5\end{array}\qquad\begin{array}{r}0,03\\0,04\\\hline 0,07\end{array}$$

D'après ce qui a été dit pour l'addition (198), il résulte que *pour calculer avec une erreur relative moindre que* 0,01, par exemple, *la différence*

$$75,3478-26,5363=48,8115,$$

on prend la différence

$$70-20=50$$

des nombres formés par les premiers chiffres à gauche de ces nombres; on multiplie cette différence par l'unité indiquée 0,01, ce qui donne 0,5; on prend la moitié 0,25 de ce produit, et le premier chiffre 2 à gauche de cette moitié exprimant des dixièmes, cela indique qu'il suffit de prendre chacun des nombres proposés avec un chiffre décimal; ce qui donne pour le résultat demandé

$$75,3-26,5=48,8.$$

200. *Multiplication.*

1° *L'erreur absolue d'un produit de deux facteurs, dont l'un est approché par défaut ou par excès à moins d'une quantité*, est égale au produit de l'erreur absolue du facteur modifié par l'autre facteur. *Quant à l'erreur relative du produit*, elle est égale à l'erreur relative du facteur modifié (197).

Soit à *calculer à moins de* 0,01 *le produit*

$$3,141\,5926...\times 271,8.$$

L'erreur absolue du produit étant égale à l'erreur absolue du multipli-

cande multipliée par 271,8, il suffit de prendre le multiplicande avec une erreur absolue moindre que $\frac{0,01}{271,8}$ et à plus forte raison plus petite que $\frac{0,01}{1000} = 0,000\,01$; ce qui donne 3,141 59.

Cela revient à prendre le facteur modifié avec un nombre $2 + 3 = 5$ de chiffres décimaux égal à celui 2 que l'on veut avoir au produit, plus celui 3 des chiffres de la partie entière du facteur non modifié.

Pour calculer le même produit avec une erreur relative moindre que 0,01, il suffit de prendre le facteur modifié avec une erreur relative moindre que 0,01, c'est-à-dire avec trois chiffres décimaux (197), ce qui donne $3,141 \times 271,8$.

2° *Lorsque les deux facteurs d'un produit sont remplacés par des valeurs approchées, dont l'une au moins par défaut, l'erreur absolue du produit* est moindre que la somme des produits de chacun des facteurs par l'erreur absolue de l'autre facteur, d'une quantité égale au produit des erreurs absolues des deux facteurs. *L'erreur relative du produit* est moindre que la somme des erreurs relatives des deux facteurs.

Soit à *calculer, avec une erreur absolue moindre que* 0,01, *le produit*

$$314,159\,26\ldots \times 27,182\,818\,28\ldots$$

L'erreur absolue du produit répondra à la question dès qu'elle sera moindre que

$$\frac{0,005}{28} + \frac{0,005}{315},$$

et à plus forte raison que

$$\frac{0,005}{30} + \frac{0,005}{400} = 0,000\,16\ldots + 0,000\,012\ldots,$$

condition qui sera satisfaite en prenant le premier facteur avec 4 chiffres décimaux et le second avec 5.

Au lieu de diviser en deux parties égales l'erreur absolue 0,01, on peut la diviser d'une manière quelconque pourvu que la somme des deux parties soit égale à 0,01.

Pour avoir le produit précédent avec une erreur relative moindre que 0,01, il suffit que l'erreur relative de chaque facteur soit moindre que 0,005, et à plus forte raison que 0,001; ce qui conduit à prendre les 4 chiffres à gauche de chacun des facteurs, et l'on a

$$314,1 \times 27,18.$$

L'erreur relative d'un produit de plusieurs facteurs remplacés par des valeurs approchées par défaut est moindre que la somme des erreurs relatives de tous les facteurs; et *l'erreur relative d'une puissance d'un nombre remplacé par une valeur approchée par défaut* est moindre que le produit de l'erreur relative de ce nombre par le degré de la puissance.

Soit à *calculer, avec une erreur relative moindre que* 0,01, *le produit*

$$314,159\,26\ldots \times 27,182\,818\,28\ldots \times 2,342\,467\,35\ldots$$

Il suffit que la somme des erreurs relatives des facteurs soit moindre que 0,01; par conséquent, en prenant chacun des facteurs avec une erreur relative moindre que $\frac{0,01}{3}$ et surtout que 0,001, ce qui conduit au produit

$$314,1 \times 27,18 \times 2,342,$$

on est sûr de satisfaire à la question (197).

Pour un produit de valeurs approchées,

$$314,15 \times 27,18 \times 2,34,$$

les erreurs relatives des facteurs étant respectivement moindres que 0,000 1, 0,001 et 0,01, dont la somme est 0,011 1, on en conclut que l'erreur relative du produit est moindre que 0,1, et probablement même que 0,01.

Si l'on demandait, avec une erreur absolue moindre que 0,1, le produit

$$314,159\,26\ldots\ldots \times 27,182\,818\,28\ldots\ldots \times 2,342\,467\,35\ldots\ldots,$$

on remarquerait qu'il suffit que l'erreur relative soit moindre que 0,1 divisé par un nombre $320 \times 30 \times 3 = 28\,800$ plus grand que le produit; ce qui fait pour chaque facteur une erreur relative moindre que $\frac{0,1}{3 \times 28\,800} = \frac{0,1}{86\,400}$ et à plus forte raison moindre que $\frac{0,1}{100\,000} = 0,000\,001$; ce qui indique qu'il faut prendre chaque facteur avec ses 7 premiers chiffres à gauche :

$$314,159\,2 \times 27,182\,81 \times 2,342\,467.$$

Remarque. L'erreur relative d'un produit de plusieurs facteurs remplacés par des valeurs approchées par excès est plus grande que la somme des erreurs relatives de tous les facteurs; et *l'erreur relative d'une puissance d'un nombre remplacé par une valeur approchée par excès* est plus grande que le produit de l'erreur relative de ce nombre par le degré de la puissance.

201. *Multiplication abrégée d'Oughtred.* Pour calculer, à moins d'une unité entière ou décimale, 0,1 par exemple, le produit de deux nombres entiers ou décimaux, 3,141 5926... × 32,186 42... (suivre sur l'opération suivante) on écrit, dans un ordre inverse, les chiffres du multiplicateur sous le multiplicande, de manière que le chiffre 2 des unités simples corresponde à celui 1 du multiplicande, qui exprime des (0,001) unités cent fois plus petites que celles de l'ordre énoncé (0,1); puis, à partir de la droite, on multiplie successivement le multiplicande par chaque chiffre du multiplicateur, en négligeant les chiffres du multiplicande qui se trouvent à la droite de celui qui sert de multiplicateur (Pour le chiffre 3, par exemple, on néglige 926...); ce qui conduit à ne pas employer les chiffres du multiplicateur qui se trouvent à gauche du der-

nier chiffre 3 du multiplicande. On écrit les produits partiels sous le multiplicateur, en plaçant leurs premiers chiffres à droite dans une même colonne verticale, et on en fait la somme en les considérant comme exprimant des unités cent fois plus petites que celle de l'ordre énoncé (0,1); enfin on supprime deux chiffres (07) sur la droite du résultat, et on augmente d'une unité le dernier chiffre conservé. On obtient ainsi 101,2 pour le produit cherché.

```
   3,1 4 159 26...
...46 8 1 23
---------------
   9 4 2 45
     6 2 82
       3 14
       2 48
         18
-------------
  10 1,1 07
  10 1,2
```

Remarque. La règle précédente suppose le cas le plus général, celui où la somme des chiffres employés au multiplicateur, augmentée du premier chiffre négligé 4, est plus grande que 10 et moindre que 101. Dans le cas où cette somme ne dépasserait pas 10, et dans celui où elle serait comprise entre 100 et 1001, on opérerait encore de la même manière, mais en écrivant le chiffre des unités du multiplicateur respectivement sous le chiffre du multiplicande qui exprime des unités dix fois ou mille fois plus petites que celles de l'ordre énoncé.

202. *Division.*

Quand on remplace le dividende par une valeur approchée par défaut ou par excès (196), l'erreur absolue du quotient est égale à l'erreur absolue du dividende divisée par le diviseur, et son erreur relative est égale à celle du dividende. Ainsi, remplaçant

$$\frac{3,141\,59}{38} \quad \text{par} \quad \frac{3,14}{38},$$

l'erreur absolue et l'erreur relative du quotient sont respectivement :

$$\frac{0,001\,59}{38}, \quad \text{et} \quad \frac{0,001\,59}{3,141\,59}.$$

Quand on remplace le diviseur par une valeur approchée par défaut ou par excès, l'erreur absolue du quotient est égale à ce quotient multiplié par l'erreur absolue du diviseur divisée par sa valeur approchée, et son erreur relative est égale à l'erreur absolue du diviseur divisée par sa valeur approchée. Ainsi, remplaçant

$$\frac{38}{3,141\,59} \quad \text{par} \quad \frac{38}{3,14},$$

l'erreur absolue et l'erreur relative du quotient sont respectivement :

$$\frac{38}{3,141\,59} \times \frac{0,001\,59}{3,14} \quad \text{et} \quad \frac{0,001\,59}{3,14}.$$

De l'expression de l'erreur relative il découle que, suivant que le diviseur est approché par défaut ou par excès, l'erreur relative du quotient est plus grande ou plus petite que celle du diviseur; et de celle de l'erreur absolue, il résulte que quand la partie entière du diviseur est plus grande que le quotient multiplié par un nombre a, si l'on remplace ce diviseur par sa partie entière, l'erreur absolue du quotient est moindre que $\frac{1}{a}$. Ainsi, remplaçant $\frac{8}{6,7}$ par $\frac{8}{6}$, comme on a $6 > \frac{8}{6,7} \times 5$, l'erreur absolue sera moindre que $\frac{1}{5}$,

Le dividende étant égal au produit du diviseur par le quotient, *l'erreur relative du quotient pourra être considérée comme étant égale à la différence des erreurs relatives du dividende et du diviseur* (2° 200), *et, par suite, moindre que l'une d'elles au moins.* Par conséquent, pour rendre l'erreur relative du quotient de deux nombres moindre que 0,1, 0,01, 0,001..., on rendra les erreurs relatives de ces deux nombres moindres que ces mêmes quantités, c'est-à-dire qu'on prendra respectivement les 2, 3, 4... premiers chiffres à gauche du dividende et du diviseur. Ainsi pour calculer, avec une erreur relative moindre que 0,001, le quotient de 3,141 5926... par 32,186 4... on divisera 3,141 par 32,18.

203. *Division abrégée.* Pour calculer à moins d'une unité entière ou décimale, 0,001 par exemple, le quotient d'un nombre entier ou décimal par un nombre entier ou décimal, 3,141 592 65... par 0,321 864 18... par exemple, on commence par déterminer le nombre 1 des chiffres qu'il y aura à la partie entière du quotient (62), et, par suite, le nombre total $n = 1 + 3 = 4$ des chiffres qu'il y aura au quotient cherché. Si la partie entière était nulle, on aurait $n = 3$; si de plus le chiffre des dixièmes du quotient était égal à 0, on aurait $n = 2$; et si le chiffre des centièmes était encore nul, on aurait $n = 1$; (l'inspection du dividende et du diviseur fait facilement reconnaître de quel ordre seront les plus hautes unités du quotient, et, par suite, quelle sera la valeur de n). Puis, (suivre sur l'opération suivante) faisant abstraction des virgules du dividende et du diviseur, on prend sur la gauche du diviseur juste assez de chiffres pour que le nombre 32 qui en résulte soit au moins égal à $n = 4$; à la droite de 32 on écrit les $n = 4$ chiffres suivants du diviseur, et le nombre 321 864 qui en résulte est le premier diviseur partiel. Pour former le premier dividende partiel, on sépare sur la gauche du dividende juste assez de chiffres pour que le nombre décimal 3 141 592,65... qui en résulte soit au moins égal au nombre décimal 321 864,18... formé en plaçant dans le diviseur donné une virgule à la droite du premier diviseur partiel, et la partie 3 141 592 séparée à gauche du dividende est le premier dividende partiel. Le quotient 9 de la division du premier dividende partiel par le premier diviseur partiel est le premier chiffre à gauche du quotient cherché. On prend le reste obtenu 244 816 pour second dividende partiel, et en négligeant le premier chiffre 4 à la droite du premier diviseur partiel, le nombre

32 186 ainsi formé est le second diviseur partiel; le quotient 7 de 244 816 par 32 186 est le second chiffre du quotient demandé. Prenant le nouveau reste 19 514 pour troisième dividende partiel, et le nombre 3218, obtenu en supprimant le premier chiffre 6 à droite du second diviseur partiel, pour troisième diviseur partiel, et continuant ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait obtenu les $n=4$ chiffres du quotient, en séparant sur la droite assez de chiffres pour que le premier à droite exprime des unités de l'ordre énoncé (des 0,001), le nombre 9,760 qu'on obtient est le quotient cherché.

3,141 592 65...	0,321 864 18...	3 141 592	321'8'6'4
		244 816	9,760
		19 514	
		206	

Il peut arriver qu'un dividende partiel contienne 10 fois le diviseur partiel correspondant, alors on prend 10 pour quotient partiel, c'est-à-dire qu'on écrit 0 au quotient et on augmente d'une unité le dernier chiffre précédemment obtenu; en continuant la règle, on arrive à des 0 pour tous les chiffres suivants. Le quotient que l'on obtient dans ce cas est toujours approché par excès à moins d'une unité de l'ordre énoncé. Un exemple qui est dans ce cas est celui où l'on a à calculer, à moins de 0,001, le quotient de 26,389 292... par 3,141 5926...

2 638 929	314'1'5'9
125 657	83
31 412	10
2	8,400

204. L'erreur relative e' d'une puissance d'un nombre approché par excès étant plus grande que le produit $e \times n$ de l'erreur relative e de ce nombre par le degré n de la puissance (200. *Remarque*), il en résulte que *l'erreur relative* e *de la racine d'un nombre approché par excès est moindre que le quotient* $\frac{e'}{n}$ *de l'erreur relative* e′ *de ce nombre par l'indice* n *de la racine.*

Application. Soit à extraire $\sqrt[3]{65,368\,74...}$

Si l'on prend 4 chiffres sur la gauche du nombre proposé, en forçant le dernier chiffre, ce qui donne 65,37, on a pour ce nombre

$$e' < \frac{1}{6000},$$

et pour la racine

$$e < \frac{e'}{3} < \frac{1}{6\,000 \times 3} < \frac{1}{10\,000} \text{ ou } 0,0001.$$

Ainsi, en prenant, pour cet exemple, le nombre proposé avec 2 chiffres décimaux exacts, on obtiendra 4 chiffres exacts à la racine, c'est-à-dire le chiffre de la partie entière et 3 chiffres décimaux.

DÉFINITIONS RELATIVES AUX MESURES USITÉES.

205. Le *rapport* de deux quantités de même espèce est un nombre tel, qu'en multipliant la seconde des deux quantités par ce nombre, on reproduit la première. Ainsi, par exemple, lorsqu'une longueur contient 5 fois exactement une autre longueur, le rapport de la première longueur à la seconde est égal à 5, et le rapport de la seconde à la première est égal à 1/5.

Remarque. Le rapport d'un nombre à un autre est égal au quotient de la division du premier par le second, ou encore à une fraction qui a le premier nombre pour numérateur et le second pour dénominateur (131).

206. *Rapporter une quantité à une autre*, c'est chercher le rapport de la première à la seconde.

207. On nomme *unité* ou *mesure*, toute quantité à laquelle on rapporte d'autres quantités de même espèce pour se former une idée de leur grandeur. Le nombre *un*, qu'il est inutile et d'ailleurs impossible de définir, est *l'unité numérique* (1 et 5).

208. *Mesurer une quantité*, c'est la rapporter à l'unité de son espèce.

209. Le rapport d'une quantité à l'unité de son espèce est la *mesure* de cette quantité.

210. Une quantité est une *commune mesure* de plusieurs autres quantités, lorsqu'elle est contenue une ou plusieurs fois exactement dans chacune d'elles.

211. Deux quantités sont *commensurables* ou *incommensurables*, selon qu'elles ont une commune mesure ou qu'elles n'en ont pas. On dit aussi, dans les mêmes cas, que le rapport de ces deux quantités est *commensurable* ou *incommensurable*.

212. *La moyenne arithmétique de plusieurs quantités de même espèce* est le quotient de la somme de ces quantités par leur nombre : ainsi la moyenne arithmétique des nombres 3, 7 et 5 est $\frac{3+7+5}{3}=5$.

SYSTÈME MÉTRIQUE.

213. On désigne sous le nom de *système métrique*, l'ensemble des unités ou mesures qui ont pour base le *mètre*, qui est la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre (207).

Les résultats des opérations exécutées par Méchain, Delambre et Borda, pour déterminer, avec toute la précision possible, la longueur du mètre, furent approuvés par le corps législatif le 4 messidor an VII (22 juin 1799), et le mètre et le kilogramme étalons furent déposés aux archives. Le mètre étalon est en platine, et il donne la longueur légale à la température de la glace fondante. Le kilogramme étalon est un cylindre en platine d'une longueur égale à son diamètre.

Les opérations géodésiques et les calculs auxiliaires donnèrent 5 130 740 toises pour la longueur du quart du méridien terrestre elliptique

passant par Paris, en allant de Dunkerque à Barcelone, ce qui fait pour la longueur légale du mètre 0toise,513 074 0 ou 443lignes,296. Des calculs plus récents ayant donné 5 131 276 toises pour la longueur du quart du méridien terrestre, il en résulte que sa dix-millionième partie 0toise,513 127 6 ou 443lignes,342 est un peu supérieure au mètre légal; mais seulement de 0ligne,046.

214. Le système métrique comprend cinq principales unités, qui sont: l'unité *linéaire* ou de *longueur;* l'unité de *superficie* ou de *surface;* l'unité de *volume* ou *de capacité;* l'unité de *poids*, et l'unité *monétaire.*

1° L'unité linéaire est le *mètre* (213).

2° L'unité de surface est le *mètre carré*, ou le carré qui a un mètre de côté.

Les surfaces des terrains s'évaluent en *ares:* l'are est un carré dont le côté a 10 mètres; il équivaut à 100 mètres carrés.

3° L'unité de volume est le *mètre cube*, ou le cube qui a un mètre de côté.

Le mètre cube se désigne sous le nom de *stère* lorsqu'il s'agit de la mesure des bois.

Pour mesurer les grains et les liquides on emploie le *litre*, qui est un cylindre creux dont la capacité est un décimètre cube, ou un cube qui a pour côté la dixième partie du mètre; il équivaut à la millième partie d'un mètre cube.

4° L'unité de poids est le *gramme*, ou le poids dans le vide d'un *centimètre cube* d'eau distillée, prise à son maximum de densité, qui correspond à la température de 4 degrés centigrades au-dessus de zéro (213). Le *centimètre cube* est un cube qui a pour côté la centième partie du mètre; il équivaut à la millième partie d'un décimètre cube ou à la millionième partie d'un mètre cube.

5° L'unité monétaire est le *franc;* le franc est une pièce qui se compose de quatre grammes et demi d'argent alliés avec un demi-gramme de cuivre (219).

215. *Pour exprimer dans le système métrique les multiples d'une unité*, on fait précéder le nom de cette unité des mots *déca*, *hecto*, *kilo*, *myria*, qui signifient respectivement 10, 100, 1000, 10000. Ainsi pour exprimer 1000 grammes, on dit un *kilogramme*, et pour exprimer 10000 mètres, on dit un *myriamètre*. Ces mots ne sont pas employés pour désigner les multiples de l'unité monétaire.

Pour exprimer les sous-multiples d'une unité (37), on fait précéder le nom de cette unité des mots *déci*, *centi*, *milli*, qui signifient respectivement $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$. Ainsi, pour exprimer la centième partie du gramme, on dit un *centigramme*, et pour exprimer la millième partie du mètre, on dit un *millimètre*.

Lorsqu'il s'agit de l'unité monétaire, on remplace le mot *franc* par la terminaison *me:* ainsi, au lieu de dire un décifranc, un centifranc, un millifranc, on dit un *décime*, un *centime*, un *millime*.

216. Dans le système métrique, les unités multiples de l'unité principale étant, comme dans les nombres décimaux, de dix fois en dix fois

plus grandes, et les unités sous-multiples étant de dix fois en dix fois plus petites, il en résulte :

1° *Qu'un nombre décimal concret* (12) *s'énonce* comme un nombre décimal abstrait (167), mais en remplaçant le nom de l'unité abstraite par celui de l'unité concrète qu'elle représente. Ainsi le nombre 325,87, considéré comme exprimant des mètres, s'énonce 325 *mètres* 87 *centimètres.*

2° *Qu'un nombre décimal concret s'écrit* comme un nombre décimal abstrait, mais en mettant à la droite et un peu au-dessus du chiffre des unités la lettre initiale du mot qui exprime l'unité concrète. Ainsi le nombre précédent s'écrit $325^{m},87$.

217. *Les mesures dont on fait principalement usage sont :*

1° Pour les longueurs :

myriamètre, kilomètre, décamètre, mètre, décimètre, centimètre, millimètre,

qui valent respectivement en mètres :

10000^{m} 1000^{m} 10^{m} 1^{m} $0^{m},1$ $0^{m},01$ $0^{m},001$

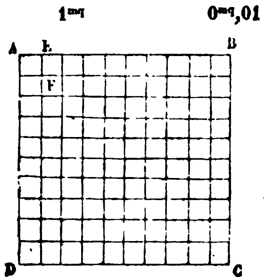
Dans l'industrie on se sert ordinairement du mètre; en arpentage on mesure les distances avec une chaîne qui a 1 décamètre de longueur; les distances géographiques s'évaluent en myriamètres ou en kilomètres, et quelquefois en *lieues de poste.* La lieue de poste vaut 4 kilomètres ou 4000 mètres. On se sert encore de la lieue de 25 au degré, qui vaut $4444^{m},44$; de la *lieue marine* ou de 20 au degré, qui est de $5555^{m},56$; du *mille marin* de 60 au degré ou de 1 minute, contenant $1851^{m},85$. L'unité de vitesse des navires est le *nœud,* qui est égal au mille marin, ou à peu près à 1852^{m}.

2° Pour les surfaces :

mètre carré, décimètre carré, centimètre carré, millimètre carré,

qui valent en mètres carrés :

1^{mq} $0^{mq},01$ $0^{mq},0001$ $0^{mq},000001$



On voit, comme le montre la figure, que le décimètre carré n'est que le 0,01 d'un mètre carré, que le centimètre carré est le 0,01 du décimètre carré, et ainsi de suite.

hectare, are, déciare, centiare,

dont les valeurs respectives en ares de 100 mètres carrés sont :

100^{a} 1^{a} $0^{a},1^{a}$ $0^{a},01^{a}$

3° Pour les volumes :

mètre cube, décimètre cube, centimètre cube, millimètre cube,

qui valent en mètres cubes :

1^{mc} $0^{mc},001$ $0^{mc},000\,001$ $0^{mc},000\,000\,001$

On voit que le décimètre cube n'est que le 0,001 du mètre cube; le centimètre cube, le 0,001 du décimètre cube, etc.

hectolitre, décalitre, litre, décilitre, centilitre,

qui valent en litres :

100^{l} 10^{l} 1^{l} $0^{l},1$ $0^{l},01$

Pour mesurer les liquides on se sert de vases d'étain cylindriques, d'une hauteur double du diamètre intérieur, et dont les contenances sont : 1^l, $0^l,5$, $0^l,2$, $0^l,1$, $0^l,05$, $0^l,02$, $0^l,01$.

Pour mesurer les grains, on se sert de vases cylindriques en bois, d'une hauteur égale à leur diamètre, et dont les contenances sont : 1 *hectolitre*, 5 *décalitres*, 2 *décalitres*, 1 *décalitre*, 2 *litres* et 1 *litre*.

décastère, *stère*, *décistère*, *centistère*, *millistère*,

qui valent en mètres cubes ou en stères :

10st 1st $0^{st},1$ $0^{st},01$ $0^{st},001$

Dans les chantiers de Paris, le bois de chauffage se mesure encore quelquefois à la *voie*, qui vaut 2 stères.

4° Pour les poids :

myriagramme, *kilog.*, *hectog.*, *décag.*, *gramme*, *décig.*, *centig.*, *millig.*,

qui valent en grammes :

10000^g 1000^g 100^g 10^g 1^g $0^g,1$ $0^g,01$ $0^g,001$

Dans l'industrie, pour évaluer des poids considérables, on fait quelquefois usage du *quintal métrique*, qui vaut 100 kilogrammes, et du *millier*, qui vaut 10 quintaux métriques ou 1000 kilogrammes. Dans la marine on emploie le *tonneau*, qui est de 1000 kilogrammes. Pour le transport des marchandises sur routes, chemins de fer et canaux, on fait usage de la *tonne*, qui vaut 1000 kilogrammes.

Les poids usités dans le commerce se divisent en *gros poids*, qui dépassent 1 kilog.; en *poids moyens*, qui vont de 1 kilog. à 1 gramme; en *petits poids*, qui sont comptés à partir de 1 gramme. On les fait en fonte de fer ou en cuivre jaune.

Ceux en fonte sont de : 50 kilog., 20 kilog., 10 kilog., 5 kilog., 2 kilog., 1 kilog., 5 hectog., 2 hectog., 1 hectog., 5 décag.;

Ceux en cuivre sont de : 20 kilog., 10 kilog., 5 kilog., 2 kilog., 1 kilog., 2 hectog., 1 hectog., 5 décag., 2 décag., 1 décag., 5 gram., 2 gram, 1 gram., 5 décig., 2 décig., 1 décigr., 5 centig., 2 centig., 1 centig., 5 millig., 2 millig., 1 millig.

Les poids inférieurs au gramme sont des petites plaques de cuivre carrées, dont l'un des angles est ordinairement relevé pour qu'on puisse les saisir avec une petite pince. On les emploie surtout pour les pesées pharmaceutiques, dans les analyses chimiques, et dans les expériences de physique.

Le poids des diamants, des perles fines et des pierres précieuses s'évalue en *karats* ou *carats* Le carat se divise en $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$, et il varie si peu d'un pays à un autre, qu'on peut le considérer comme universel.

En France, les diamants se pèsent à l'once de $29^g,592$ milligrammes. Cette once vaut 144 karats et chaque karat se divise en 4 grains.

Les poids en karats étant :

1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ ou grain $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{32}$ $\frac{1}{64}$,

les poids en milligrammes sont respectivement :

205,5000 102,7500 51,3750 25,6875 12,8438 6,4219 3,2109

La valeur approximative des diamants bruts s'obtient en multipliant 50 francs par le carré de leur poids karat. Ainsi un diamant brut de 3 karats vaut $50 \times 3 \times 3 = 450$ francs.

Les diamants travaillés sont supposés avoir perdu la moitié de leur poids quand ils sortent à l'état de perfection des mains du lapidaire, et pour en connaître la valeur, on est dans l'usage de multiplier 50 francs par le carré du double de leur poids karat; ce qui donne, pour un diamant travaillé pesant 3 karats, $50 \times (3 \times 2)^2 = 50 \times 36 = 1800$ francs.

On conçoit que la valeur réelle ne peut s'obtenir que par le cours commercial. Si le

prix courant d'un diamant de 1 karat est de 125 francs, la valeur d'un diamant de même eau pesant 3 karats s'obtient en multipliant 125 francs par le carré 9 du poids 3 karats, ce qui donne 1125 francs.

5° Pour les monnaies :

franc, *décime,* *centime,*

dont la valeur en francs est :

1f 0f,1 0f,01

218. En faisant fondre ensemble plusieurs métaux on obtient un *alliage.*

Le *titre* de l'alliage par rapport à l'un des métaux qui le composent est le rapport du poids de ce métal à celui de l'alliage. Ainsi en faisant fondre ensemble 9 grammes d'argent et 1 gramme de cuivre, par rapport à l'argent le titre de l'alliage est 9/10.

Les métaux précieux, comme l'or et l'argent, sont appelés métaux *fins*, et l'alliage précédent est dit à 9/10 *de fin.*

219. Le système monétaire français se compose de pièces d'or, d'argent et de bronze. Les pièces d'or et d'argent sont au titre de 0,9 de fin avec une tolérance de 0,002 en plus ou en moins, et elles contiennent 0,1 de cuivre; celles en bronze se composent en poids de 95 de cuivre, 4 d'étain et 1 de zinc.

Les difficultés d'exécution ont fait admettre une tolérance en plus ou en moins sur les poids des pièces comme sur les titres.

Tableau des valeurs nominales, des poids, des tolérances en millièmes du poids, et des diamètres des pièces de monnaie.

VALEURS DES PIÈCES.	POIDS.	TOLÉRANCES en millièmes du poids.	DIAMÈTRES.
OR.	grammes.	millièmes.	millimètres.
100 francs	32,25800	1	35
50 *id.*	16,12900	2	28
20 *id.*	6,45161	2	21
10 *id.*	3,22580	2,5	19
5 *id.*	1,61290	3	17
ARGENT.			
5 francs	25	3	37
2 *id.*	10	3	27
1 *id.*	5	5	23
50 centimes	2,5	7	18
20 *id.*	1	10	15
CUIVRE.			
10 centimes	10	10	30
5 *id.*	5	10	25
2 *id.*	2	15	20
1 *id.*	1	15	15

De ce tableau, il résulte que 1 kilogramme de monnaie vaut :

1° Pour l'argent, 200ᶠ (40 pièces de 5ᶠ).

2° Pour l'or, 3 100ᶠ (31 pièces de 100ᶠ, ou 155 pièces de 20ᶠ).

3° Pour le cuivre, 10ᶠ (100 pièces de 10 centimes).

Ainsi, à poids égal, la monnaie d'or vaut 15 fois et demie celle de l'argent, et celle de cuivre vaut 20 fois moins.

La retenue au Change des Monnaies pour frais de fabrication, déchets compris, ou la différence entre la valeur intrinsèque et la valeur nominale, est de 6ᶠ,70 par kilogramme d'or et de 1ᶠ,50 par kilogramme d'argent. Il en résulte que 1 kilogramme, selon qu'il est en :

	or à 0,9 de fin.	or pur.	arg. à 0,9 de fin.	argent pur
vaut :	3 093ᶠ,30	$3093{,}30 \times \frac{10}{9} = 3437^f$	198ᶠ,50	$198{,}50 \times \frac{10}{9} = 220^f{,}55.$

Une loi du 25 mai 1864 a baissé le titre à 0,835 de fin pour les pièces d'argent de 50 et de 20 centimes.

220. *Unités de temps.* Les diverses unités de temps ne sont pas liées entre elles par la loi décimale, et elles sont indépendantes du système métrique (213).

Le *jour vrai* ou *jour solaire* est le temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs du centre du soleil au même méridien terrestre, d'un même côté de l'axe de la terre.

L'*année solaire* est le temps que met la terre à faire une révolution entière autour du soleil ; elle se compose d'un nombre de jours vrais compris entre 365 et 366.

L'année solaire est constante, mais les jours vrais dont elle se compose n'ont pas tous la même durée, et cela pour deux causes : 1° l'inégale vitesse de la terre dans son orbite, par suite de laquelle le mouvement diurne apparent du soleil est plus rapide en hiver qu'en été ; 2° l'obliquité de l'écliptique, qui fait que le mouvement diurne apparent du soleil en ascension droite, c'est-à-dire dans le plan de l'équateur terrestre, est plus lent aux équinoxes qu'aux solstices.

L'*unité principale de temps* est le *jour moyen* ou la valeur moyenne des 365 jours vrais qui font partie de l'année solaire. Le jour moyen se divise en 24 portions égales appelées *heures*, l'heure en 60 parties égales qu'on appelle *minutes*, la minute en 60 *secondes*, la seconde en 60 *tierces* ou le plus souvent en dixièmes et centièmes de secondes.

Pour qu'un nombre écrit en chiffres exprime des minutes ou des secondes, on écrit un ou deux accents ou mieux les initiale des mots minutes et secondes à la droite et un peu au-dessus du nombre proposé. Ainsi $3^j\ 8^h\ 35'\ 45''$ ou $3^j\ 8^h\ 35^m\ 45^s$ représente 3 *jours* 8 *heures* 35 *minutes* 45 *secondes*.

Le *jour sidéral* est le temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs d'une étoile quelconque au même méridien terrestre, d'un même côté de l'axe de la terre, c'est le temps que met la terre à faire une

révolution complète autour de son axe; sa durée est constante et égale à $23^h\ 56'\ 4''$ du temps moyen.

Remarque. Le rapport de l'année solaire au jour moyen est environ 365,24225.

L'*année civile* est l'année solaire appropriée aux usages civils, c'est-à-dire diminuée ou augmentée de manière que le temps qui en résulte se compose toujours d'un nombre entier 365 ou 366 jours moyens.

Cent années consécutives forment un *siècle*.

L'année civile se divise en 12 parties qu'on appelle *mois*, et qui se désignent sous les noms de *janvier*, *février*, *mars*, *avril*, *mai*, *juin*, *juillet*, *août*, *septembre*, *octobre*, *novembre*, *décembre*. Avril, juin, septembre et novembre se composent chacun de 30 jours moyens; février en contient ordinairement 28, et chacun des 7 autres mois se compose de 31 jours, ce qui reproduit les 365 jours qui forment la durée ordinaire de l'année civile.

L'excès de l'année solaire sur l'année civile ordinaire étant $0^j,24225$, on voit que si l'année civile se composait constamment de 365 jours, elle serait, au bout de 4 ans, en avance sur l'année solaire de $0^j,969$: c'est pourquoi tous les 4 ans on ajoute un jour à l'année civile, qui alors se compose de 366 jours, et qu'on nomme *année bissextile*. Cette augmentation porte sur le mois de février, qui contient alors 29 jours au lieu de 28. Il résulte de cette première correction, que tous les 4 ans l'année civile est en retard sur l'année solaire de $1 - 0,969 = 0^j,031$: cette différence produit au bout de 100 ans ou d'un siècle $0^j,031 \times 25 = 0^j,775$; c'est pourquoi la dernière année de chaque siècle n'est pas bissextile. Ainsi l'année civile est tous les siècles en avance sur l'année solaire de $1^j - 0^j,775 = 0^j,225$, et tous les 4 siècles de $0^j,225 \times 4 = 0^j,9 = 1^j - 0^j,1$; ce qui conduit à rétablir, tous les 4 siècles, une année bissextile. Après cette 3ᵉ correction, l'année civile est en retard sur l'année solaire de $0^j,1$ tous les 400 ans ou d'un jour tous les 4000 ans; de sorte qu'en supprimant tous les 4000 ans une année bissextile, l'année civile se termine au même instant que l'année solaire, en admettant comme exacte la valeur $365^j,24225$, qui n'est en réalité qu'une valeur approchée de l'année solaire. On peut se représenter ces quatre corrections successives en mettant le rapport de l'année solaire au jour moyen sous la forme $365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} - \frac{1}{4000}$.

L'*ère*, ou la manière de compter les années, se rattache ordinairement à un événement remarquable; l'*ère vulgaire* remonte à la naissance de Jésus-Christ.

Le *calendrier Julien*, institué 46 ans avant notre ère, par Jules César, devenu maître du monde romain, fut en usage dans l'ancien monde romain jusqu'en 1582, époque à laquelle le pape Grégoire XIII institua le *calendrier grégorien*, en usage aujourd'hui chez presque tous les peuples.

Le gouvernement républicain francais de 1789, à qui l'on doit le système métrique des poids et mesures, l'une des plus belles créations

du siècle, voulut appliquer ce système à la division du temps, tout en créant une ère nouvelle, dite *ère républicaine*. Cette nouvelle ère commençait à l'équinoxe d'automne, le 22 septembre à minuit, de l'année 1792, première année de la liberté.

L'année fut divisée en 12 mois de chacun 30 jours, et chaque année terminée par 5 jours *complémentaires*, par 6 pour les années bissextiles, afin d'établir la concordance entre l'année civile et l'année solaire. Chaque mois fut divisé en 3 *décades* de chacune 10 jours, le 10ᵉ jour étant celui de repos et devant remplacer le dimanche.

Les noms des mois furent tirés de phénomènes propres au climat particulier de la France. Ils sont : pour l'automne : *vendémiaire* (mois des vendanges), *brumaire* (mois des brouillards), *frimaire* (mois des frimas); pour l'hiver: *nivôse* (mois de la neige), *pluviôse* (mois de la pluie), *ventôse* (mois du vent); pour le printemps : *germinal* (mois de la germination), *floréal* (mois des fleurs), *prairial* (mois des prairies); pour l'été: *messidor* (mois de la moisson), *thermidor* (mois de la chaleur), *fructidor* (mois des fruits).

Les jours complémentaires n'appartenaient à aucun mois. Ils terminaient l'année, et étaient réservés pour les fêtes nationales, désignées sous le nom de *sans-culottides*. La 1ʳᵉ *sans-culottidé* fut consacrée au *génie;* la 2ᵉ, au *travail;* la 3ᵉ, aux *belles actions;* la 4ᵉ, aux *récompenses;* la 5ᵉ, à l'*opinion*, espèce de carnaval politique de 24 heures, pendant lequel il était permis de dire et d'écrire impunément sur tout homme public, tout ce qu'il plaisait au peuple et aux écrivains d'imaginer; enfin la 6ᵉ *sans-culottide*, qui arrivait à chaque année bisssextile, c'est-à-dire à peu près tous les 4 ans, était consacrée à la *révolution*.

Un sénatus-consulte du 22 fructidor an XIII ordonna qu'à compter du 11 nivôse an XIV (1ᵉʳ janvier 1806), le calendrier grégorien serait de nouveau seul mis en usage en France.

Le 1ᵉʳ jour de l'année russe correspond à notre 13 janvier; il en résulte que les dates russes sont en retard de 12 jours sur celles du calendrier grégorien.

Tableau de concordance entre le calendrier républicain et le calendrier grégorien.

	An II.	An III.	An IV.	An V.	An VI.	An VII.	An VIII.	An IX.	An X.	An XI.	An XII.	An XIII.	An XIV.
	1793	**1794**	**1795**	**1796**	**1797**	**1798**	**1799**	**1800**	**1801**	**1802**	**1803**	**1804**	**1805**
1er vendémiaire. .	22 sept.	22 sept.	23 sept.	22 sept.	22 sept.	22 sept.	23 sept.	23 sept.	23 sept.	23 sept.	24 sept.	23 sept.	23 sept.
15 *id.*	6 oct.	6 oct.	7 oct.	6 oct.	6 oct.	6 oct.	7 oct.	7 oct.	7 oct.	7 oct.	8 oct.	7 oct.	7 oct.
1er brumaire. . .	22 oct.	22 oct.	23 oct.	22 oct.	22 oct.	22 oct.	23 oct.	23 oct.	23 oct.	23 oct.	24 oct.	23 oct.	23 oct.
15 *id.*	5 nov.	5 nov.	6 nov.	5 nov.	5 nov.	5 nov.	6 nov.	6 nov.	6 nov	6 nov.	7 nov.	6 nov.	6 nov.
1er frimaire. . . .	21 nov.	21 nov.	22 nov.	21 nov.	21 nov.	21 nov.	22 nov.	22 nov.	22 nov.	22 nov.	23 nov.	22 nov.	22 nov.
15 *id.*	5 déc.	5 déc.	6 déc.	5 déc.	5 déc.	5 déc.	6 déc.	6 déc.	6 déc.	6 déc.	7 déc.	6 déc.	6 déc.
1er nivôse.	21 déc.	21 déc.	22 déc.	21 déc.	21 déc.	21 déc.	22 déc.	22 déc.	22 déc.	22 déc.	23 déc.	22 déc.	22 déc.
	1794	**1795**	**1796**	**1797**	**1798**	**1799**	**1800**	**1801**	**1802**	**1803**	**1804**	**1805**	
15 *id.*	4 janv.	4 janv.	5 janv.	4 janv.	4 janv.	4 janv.	5 janv.	5 janv.	5 janv.	5 janv.	6 janv.	5 janv.	
1er pluviôse. . . .	20 janv.	20 janv.	21 janv.	20 janv.	20 janv.	20 janv.	21 janv.	21 janv.	21 janv.	21 janv.	22 janv.	21 janv.	
15 *id.*	3 févr.	3 févr.	4 févr.	3 févr.	3 févr.	3 févr.	4 févr.	4 févr.	4 févr.	4 févr.	5 févr.	4 févr.	
1er ventôse. . . .	19 févr.	19 févr.	20 févr.	19 févr.	19 févr.	19 févr.	20 févr.	20 févr.	20 févr.	20 févr.	21 févr.	20 févr.	
15 *id.*	5 mars.	5 mars.	5 mars.	5 mars.	5 mars.	5 mars.	6 mars.	6 mars.	6 mars.	6 mars.	6 mars.	6 mars.	
1er germinal. . .	21 mars.	21 mars.	21 mars.	21 mars.	21 mars.	21 mars.	22 mars.	22 mars.	22 mars.	22 mars.	22 mars.	22 mars.	
15 *id.*	4 avril.	4 avril.	4 avril.	4 avril.	4 avril.	4 avril.	5 avril.	5 avril.	5 avril.	5 avril.	5 avril.	5 avril.	
1er floréal. . . .	20 avril.	20 avril.	20 avril.	20 avril.	20 avril.	20 avril.	21 avril.	21 avril.	21 avril.	21 avril.	21 avril.	21 avril.	
15 *id.*	4 mai.	4 mai.	4 mai.	4 mai.	4 mai.	4 mai.	5 mai.	5 mai.	5 mai.	5 mai.	5 mai.	5 mai.	
1er prairial. . . .	20 mai.	20 mai.	20 mai.	20 mai.	20 mai.	20 mai.	21 mai.	21 mai.	21 mai.	21 mai.	21 mai.	21 mai.	
15 *id.*	3 juin.	3 juin.	3 juin.	3 juin.	3 juin.	3 juin.	4 juin.	4 juin.	4 juin.	4 juin.	4 juin.	4 juin.	
1er messidor. . .	19 juin.	19 juin.	19 juin.	19 juin.	19 juin.	19 juin.	20 juin.	20 juin.	20 juin.	20 juin.	20 juin.	20 juin.	
15 *id.*	3 juill.	3 juill.	3 juill.	3 juill.	3 juill.	3 juill.	4 juill.	4 juill.	4 juill.	4 juill.	4 juill.	4 juill.	
1er thermidor. . .	19 juill.	19 juill.	19 juill.	19 juill.	19 juill.	19 juill.	20 juill.	20 juill.	20 juill.	20 juill.	20 juill.	20 juill.	
15 *id.*	2 août.	2 août.	2 août.	2 août.	2 août.	2 août.	3 août.	3 août.	3 août.	3 août.	3 août.	3 août.	
1er fructidor. . .	18 août.	18 août.	18 août.	18 août.	18 août.	18 août.	19 août.	19 août.	19 août.	19 août.	19 août.	19 août.	
15 *id.*	1er sept.	1er sept.	1er sept.	1er sept.	1er sept.	1er sept.	2 sept.	2 sept.	2 sept.	2 sept.	2 sept.	2 sept.	
5e jour complém.	21 sept.	21 sept.	21 sept.	21 sept.	21 sept.	21 sept.	22 sept.	22 sept.	22 sept.	22 sept.	22 sept.	22 sept.	
6e *id.*		22 sept.				22 sept.				23 sept.			

221. La circonférence se divise en 360 parties égales qu'on nomme *degrés;* le degré en 60 parties égales appelées *minutes*, et la minute en 60 parties égales dites *secondes.*

Le degré, la minute et la seconde sont des unités qui servent à évaluer les arcs ou les angles correspondants. (*Voir* Géométrie.)

Ces mesures échappent, comme celles du temps, à la loi décimale et au système métrique (213).

Quelquefois on divise la circonférence en 400 degrés, le degré en 100 minutes et la minutes en 100 secondes.

Pour qu'un nombre écrit en chiffres exprime des degrés, on place le signe ° à la droite et un peu au-dessus du nombre proposé; ainsi 248° représente 248 degrés. La minute et la seconde s'indiquent par un et par deux accents, comme on le fait quelquefois pour les sous-multiples de l'heure (220); ainsi 3°17′28″ signifie 3 *degrés* 17 *minutes* 28 *secondes.*

222. On nomme *quantité complexe*, une quantité composée de plusieurs parties rapportées à différentes unités de son espèce. Telles sont les quantités $7^{j}\,16^{h}\,34^{m}$ et 42° 21′ 15″.

ANCIENNES MESURES.

223. *Anciennes mesures.* Le système des nouvelles mesures est obligatoire en France depuis le 1er janvier 1840. Cependant, comme des praticiens font quelquefois usage des anciennes mesures, et qu'on les rencontre dans des ouvrages anciens bons à consulter, nous allons énumérer celles dont on peut avoir besoin.

1° L'unité de longueur était la *toise*, qui se subdivisait en 6 *pieds*, le pied en 12 *pouces*, le pouce en 12 *lignes* et la ligne en 12 *points.*

Un nombre composé, par exemple, de 25 toises, 3 pieds, 5 pouces, 7 lignes, 2 points, s'écrit $25^{t}\,3^{pi}\,5^{po}\,7^{li}\,2^{p}$.

La *toise* vaut $1^{m},94904$; le *pied*, $0^{m},32484$; le *pouce*, $0^{m},02707$, et la ligne, $0^{m},002256$.
La *perche des eaux et forêts* avait $22^{pi} = 7^{m},14647$ de longueur.
La *perche de Paris* avait $18^{pi} = 5^{m},84711$ de longueur.
Les *mesures itinéraires* étaient la *lieue* et le *mille.*
La *lieue terrestre,* de 25 au degré, vaut $2280^{t},32888$.
La *lieue marine,* de 20 au degré, vaut $2850^{t},4111$.
La *lieue de poste* valait 2000 toises et le *mille* 1000 toises.

2° Les *mesures de surface* étaient la *toise carrée*, le *pied carré, le pouce carré*, la *ligne carrée* et le *point carré*, qui sont des carrés ayant respectivement pour côté une toise, un pied, un pouce, une ligne et un point.

La *toise carrée* vaut 36 pieds carrés ou $3^{mq},7987$, et le *pied carré,* 144 pouces carrés ou $0^{mq},1055$.
Les *mesures agraires* étaient :
La *perche des eaux et forêts,* carré de 22 pieds de côté; ce qui fait $484^{pi} = 13^{t},44 = 51^{m},072$ carrés de surface.
L'*arpent des eaux et forêts,* qui vaut 100 perches ou 5 107,20 mètres carrés, ou encore 0,51072 hectare.



La *perche de Paris*, carré de 18 pieds de côté, ce qui fait $324^{pi} = 9^{t} = 34^{m},1887$ carrés de surface.

L'*arpent de Paris*, qui vaut 100 perches ou 3418,87 mètres carrés, ou encore 0,341 887 hectare.

L'on voit que 1 hectare vaut à peu près 2 arpents des eaux et forêts et 3 arpents de Paris.

3° Les *mesures de volume* étaient la *toise cube*, le *pied cube*, le *pouce cube*, etc., cubes qui ont respectivement une toise, un pied, un pouce, etc., de côté.

La *toise cube* vaut $216^{pi} = 7^{m},403890$ cubes, et le *pied cube*, $1728^{po} = 0^{m},034277$ cube.

On mesurait les liquides à l'aide du *muid*, qui valait 2 *feuillettes;* la feuillette 2 *quartauts;* le quartaut, 9 *veltes;* la velte, 8 *pintes*. La pinte était d'une contenance de 0,952 litre.

Pour les matières sèches, on se servait du *muid;* le muid de Paris valait 12 *setiers;* un setier, 12 *boisseaux;* un boisseau, 16 *litrons*. Le litron valait 0,813 litre.

Pour les bois de chauffage, on employait la *voie*, de 56 pieds cubes ou $1^{mc},91952$, et la *corde* des eaux et forêts, qui valait deux voies. Les bois de charpente se mesuraient à la *solive*, qui valait 3 pieds cubes ou $0^{mc},102832$.

4° Les *mesures de poids* étaient le *quintal*, qui vaut 100 *livres;* la livre, qui vaut 2 *marcs* ou 16 *onces;* l'once, 8 *gros*, et le gros, 72 *grains*.

La *livre* vaut $0^{k},4895$; l'*once* 30,59 grammes; le *gros* 3,82 grammes; le *grain* 0,053 gramme.

Le *kilogramme* vaut 2,0429 livres.

5° Les *unités monétaires* étaient la *livre tournois*, qui vaut 20 *sous;* le *sou*, qui vaut 4 *liards*, et le *liard*, 3 *deniers*.

81 livres valent 80 francs, ou une livre $\frac{80}{81} = 0^{f},98765$, soit $0^{f},99$.

PROBLÈMES RELATIFS AUX MESURES.

224. En général, *les opérations s'effectuent sur les nombres décimaux concrets comme sur les nombres décimaux abstraits* (177 à 181).

225. *Application au payement des ouvriers.* Un ouvrier gagne $4^{f},75$ par jour; pour un mois de 26 jours travail effectif il lui sera dû

$$4^{f},75 \times 26 = 123^{f},50.$$

Le tableau suivant donne directement ce qui est dû à un ouvrier d'après son gain journalier et le nombre de jours de travail effectif.

Admettant que la journée est de 10 heures de travail effectif, pour avoir ce qui est dû pour 7 heures, par exemple, à un ouvrier qui gagne $4^{f},75$ par jour, il suffira de chercher dans le tableau le gain $33^{f},25$ de cet ouvrier pour 7 jours, et de le diviser par 10, ce qui donnera $3^{f},33$.

Pour 26 jours et 7 heures de travail effectif, il sera donc dû à cet ouvrier

$$123^{f},50 + 3^{f},33 = 126^{f},83.$$

Jours	à 0f,50	à 0f,60	à 0f,70	à 0f,75	à 0f,90	à 1f,00	à 1f,25	à 1f,50	à 1f,75	à 2f,00
1	0,50	0,60	0,70	0,75	0,90	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
2	1,00	1,20	1,40	1,50	1,80	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00
3	1,50	1,80	2,10	2,25	2,70	3,00	3,75	4,50	5,25	6,00
4	2,00	2,40	2,80	3,00	3,60	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00
5	2,50	3,00	3,50	3,75	4,50	5,00	6,25	7,50	8,75	10,00
6	3,00	3,60	4,20	4,50	5,40	6,00	7,50	9,00	10,50	12,00
7	3,50	4,20	4,90	5,25	6,30	7,00	8,75	10,50	12,25	14,00
8	4,00	4,80	5,60	6,00	7,20	8,00	10,00	12,00	14,00	16,00
9	4,50	5,40	6,30	6,75	8,10	9,00	11,25	13,50	15,75	18,00
10	5,00	6,00	7,00	7,50	9,00	10,00	12,50	15,00	17,50	20,00
11	5,50	6,60	7,70	8,25	9,90	11,00	13,75	16,50	19,25	22,00
12	6,00	7,20	8,40	9,00	10,80	12,00	15,00	18,00	21,00	24,00
13	6,50	7,80	9,10	9,75	11,70	13,00	16,25	19,50	22,75	26,00
14	7,00	8,40	9,80	10,50	12,60	14,00	17,50	21,00	24,50	28,00
15	7,50	9,00	10,50	11,25	13,50	15,00	18,75	22,50	26,25	30,00
16	8,00	9,60	11,20	12,00	14,40	16,00	20,00	24,00	28,00	32,00
17	8,50	10,20	11,90	12,75	15,30	17,00	21,25	25,50	29,75	34,00
18	9,00	10,80	12,60	13,50	16,20	18,00	22,50	27,00	31,50	36,00
19	9,50	11,40	13,30	14,25	17,10	19,00	23,75	28,50	33,25	38,00
20	10,00	12,00	14,00	15,00	18,00	20,00	25,00	30,00	35,00	40,00
21	10,50	12,60	14,70	15,75	18,90	21,00	26,25	31,50	36,75	42,00
22	11,00	13,20	15,40	16,50	19,80	22,00	27,50	33,00	38,50	44,00
23	11,50	13,80	16,10	17,25	20,70	23,00	28,75	34,50	40,25	46,00
24	12,00	14,40	16,80	18,00	21,60	24,00	30,00	36,00	42,00	48,00
25	12,50	15,00	17,50	18,75	22,50	25,00	31,25	37,50	43,75	50,00
26	13,00	15,60	18,20	19,50	23,40	26,00	32,50	39,00	45,50	52,00
27	13,50	16,20	18,90	20,25	24,30	27,00	33,75	40,50	47,25	54,00
28	14,00	16,80	19,60	21,00	25,20	28,00	35,00	42,00	49,00	56,00
29	14,50	17,40	20,30	21,75	26,10	29,00	36,25	43,50	50,75	58,00
30	15,00	18,00	21,00	22,50	27,00	30,00	37,50	45,00	52,50	60,00

Jours	à 2f,25	à 2f,50	à 2f,75	à 3f,00	à 3f,25	à 3f,50	à 3f,75	à 4f,00	à 4f,25	à 4f,50
1	2,25	2,50	2,75	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,25	4,50
2	4,50	5,00	5,50	6,00	6,50	7,00	7,50	8,00	8,50	9,00
3	6,75	7,50	8,25	9,00	9,75	10,50	11,25	12,00	12,75	13,50
4	9,00	10,00	11,00	12,00	13,00	14,00	15,00	16,00	17,00	18,00
5	11,25	12,50	13,75	15,00	16,25	17,50	18,75	20,00	21,25	22,50
6	13,50	15,00	16,50	18,00	19,50	21,00	22,50	24,00	25,50	27,00
7	15,75	17,50	19,25	21,00	22,75	24,50	26,25	28,00	29,75	31,50
8	18,00	20,00	22,00	24,00	26,00	28,00	30,00	32,00	34,00	36,00
9	20,25	22,50	24,75	27,00	29,25	31,50	33,75	36,00	38,25	40,50
10	22,50	25,00	27,50	30,00	32,50	35,00	37,50	40,00	42,50	45,00
11	24,75	27,50	30,25	33,00	35,75	38,50	41,25	44,00	46,75	49,50
12	27,00	30,00	33,00	36,00	39,00	42,00	45,00	48,00	51,00	54,00
13	29,25	32,50	35,75	39,00	42,25	45,50	48,75	52,00	55,25	58,50
14	31,50	35,00	38,50	42,00	45,50	49,00	52,50	56,00	59,50	63,00
15	33,75	37,50	41,25	45,00	48,75	52,50	56,25	60,00	63,75	67,50
16	36,00	40,00	44,00	48,00	52,00	56,00	60,00	64,00	68,00	72,00
17	38,25	42,50	46,75	51,00	55,25	59,50	63,75	68,00	72,25	76,50
18	40,50	45,00	49,50	54,00	58,50	63,00	67,50	72,00	76,50	81,00
19	42,75	47,50	52,25	57,00	61,75	66,50	71,25	76,00	80,75	85,50
20	45,00	50,00	55,00	60,00	65,00	70,00	75,00	80,00	85,00	90,00
21	47,25	52,50	57,75	63,00	68,25	73,50	78,75	84,00	89,25	94,50
22	49,50	55,00	60,50	66,00	71,50	77,00	82,50	88,00	93,50	99,00
23	51,75	57,50	63,25	69,00	74,75	80,50	86,25	92,00	97,75	103,50
24	54,00	60,00	66,00	72,00	78,00	84,00	90,00	96,00	102,00	108,00
25	56,25	62,50	68,75	75,00	81,25	87,50	93,75	100,00	106,25	112,50
26	58,50	65,00	71,50	78,00	84,50	91,00	97,50	104,00	110,50	117,00
27	60,75	67,50	74,25	81,00	87,75	94,50	101,25	108,00	114,75	121,50
28	63,00	70,00	77,00	84,00	91,00	98,00	105,00	112,00	119,00	126,00
29	65,25	72,50	79,75	87,00	94,25	101,50	108,75	116,00	123,25	130,50
30	67,50	75,00	82,50	90,00	97,50	105,00	112,50	120,00	127,50	135,00

Jours	à 4f,75	à 5f,00	à 5f,25	à 5f,50	à 5f,75	à 6f,00	à 6f,25	à 6f,50	à 6f,75	à 7f,00
1	4,75	5,00	5,25	5,50	5,75	6,00	6,25	6,50	6,75	7,00
2	9,50	10,00	10,50	11,00	11,50	12,00	12,50	13,00	13,50	14,00
3	14,25	15,00	15,75	16,50	17,25	18,00	18,75	19,50	20,25	21,00
4	19,00	20,00	21,00	22,00	23,00	24,00	25,00	26,00	27,00	28,00
5	23,75	25,00	26,25	27,50	28,75	30,00	31,25	32,50	33,75	35,00
6	28,50	30,00	31,50	33,00	34,50	36,00	37,50	39,00	40,50	42,00
7	33,25	35,00	36,75	38,50	40,25	42,00	47,75	45,50	47,25	49,00
8	38,00	40,00	42,00	44,00	46,00	48,00	50,00	52,00	54,00	56,00
9	42,75	45,00	47,25	49,50	51,75	54,00	56,25	58,50	60,75	63,00
10	47,50	50,00	52,50	55,00	57,50	60,00	62,50	65,00	67,50	70,00
11	52,25	55,00	57,75	60,50	63,25	66,00	68,75	71,50	74,25	77,00
12	57,00	60,00	63,00	66,00	69,00	72,00	75,00	78,00	81,00	84,00
13	61,75	65,00	68,25	71,50	74,75	78,00	81,25	84,50	87,75	91,00
14	66,50	70,00	73,50	77,00	80,50	84,00	87,50	91,00	94,50	98,00
15	71,25	75,00	78,75	82,50	86,25	90,00	93,75	97,50	101,25	105,00
16	76,00	80,00	84,00	88,00	92,00	96,00	100,00	104,00	108,00	112,00
17	80,75	85,00	89,25	93,50	97,75	102,00	106,25	110,50	114,75	119,00
18	85,50	90,00	94,50	99,00	103,50	108,00	112,50	117,00	121,50	126,00
19	90,25	95,00	99,75	104,50	109,25	114,00	118,75	123,50	128,25	133,00
20	95,00	100,00	105,00	110,00	115,00	120,00	125,00	130,00	135,00	140,00
21	99,75	105,00	110,25	115,50	120,75	126,00	131,25	136,50	141,75	147,00
22	104,50	110,00	115,50	121,00	126,50	132,00	137,50	143,00	148,50	154,00
23	109,25	115,00	120,75	126,50	132,25	138,00	143,75	149,50	155,25	161,00
24	114,00	120,00	126,00	132,00	138,00	144,00	150,00	156,00	162,00	168,00
25	118,75	125,00	131,25	137,50	143,75	150,00	156,25	162,50	168,75	175,00
26	123,50	130,00	136,50	143,00	149,50	156,00	162,50	169,00	175,50	182,00
27	128,25	135,00	141,75	148,50	155,25	162,00	168,75	175,50	182,25	189,00
28	133,00	140,00	147,00	154,00	161,00	168,00	175,00	182,00	189,00	196,00
29	137,75	145,00	152,25	159,50	166,75	174,00	181,25	188,50	195,75	203,00
30	142,50	150,00	157,50	165,00	172,50	180,00	187,50	195,00	202,50	210,00

Jours	à 7f,25	à 7f,50	à 7f,75	à 8f,00	à 8f,25	à 8f,50	à 8f,75	à 9f,00	à 9f,50	à 10f,00
1	7,25	7,50	7,75	8,00	8,25	8,50	8,75	9,00	9,50	10,00
2	14,50	15,00	15,50	16,00	16,50	17,00	17,50	18,00	19,00	20,00
3	21,75	22,50	23,25	24,00	24,75	25,50	26,25	27,00	28,50	30,00
4	29,00	30,00	31,00	32,00	33,00	34,00	35,00	36,00	38,00	40,00
5	36,25	37,50	38,75	40,00	41,25	42,50	43,75	45,00	47,50	50,00
6	43,50	45,00	46,50	48,00	49,50	51,00	52,50	54,00	57,00	60,00
7	50,75	52,50	54,25	56,00	57,75	59,50	61,25	63,00	66,50	70,00
8	58,00	60,00	62,00	64,00	66,00	68,00	70,00	72,00	76,00	80,00
9	65,25	67,50	69,75	72,00	74,25	76,50	78,75	81,00	85,50	90,00
10	72,50	75,00	77,50	80,00	82,50	85,00	87,50	90,00	95,00	100,00
11	79,75	82,50	85,25	88,00	90,75	93,50	96,25	99,00	104,50	110,00
12	87,00	90,00	93,00	96,00	99,00	102,00	105,00	108,00	114,00	120,00
13	94,25	97,50	100,75	104,00	107,25	110,50	113,75	117,00	123,50	130,00
14	101,50	105,00	108,50	112,00	115,50	119,00	122,50	126,00	133,00	140,00
15	108,75	112,50	116,25	120,00	123,75	127,50	131,25	135,00	142,50	150,00
16	116,00	120,00	124,00	128,00	132,00	136,00	140,00	144,00	152,00	160,00
17	123,25	127,50	131,75	136,00	140,25	144,50	148,75	153,00	161,50	170,00
18	130,50	135,00	139,50	144,00	148,50	153,00	157,50	162,00	171,00	180,00
19	137,75	142,50	147,25	152,00	156,75	161,50	166,25	171,00	180,50	190,00
20	145,00	150,00	155,00	160,00	165,00	170,00	175,00	180,00	190,00	200,00
21	152,25	157,50	162,75	168,00	173,25	178,50	183,75	189,00	199,50	210,00
22	159,50	165,00	170,50	176,00	181,50	187,00	192,50	198,00	209,00	220,00
23	166,75	172,50	178,25	184,00	189,75	195,50	201,25	207,00	218,50	230,00
24	174,00	180,00	186,00	192,00	198,00	204,00	210,00	216,00	228,00	240,00
25	181,25	187,50	193,75	200,00	206,25	212,50	218,75	225,00	237,50	250,00
26	188,50	195,00	201,50	208,00	214,50	221,00	227,50	234,00	247,00	260,00
27	195,75	202,50	209,25	216,00	222,75	229,50	236,25	243,00	256,50	270,00
28	203,00	210,00	217,00	224,00	231,00	238,00	245,00	252,00	266,00	280,00
29	210,25	217,50	224,75	232,00	239,25	246,50	253,75	261,00	275,50	290,00
30	217,50	225,00	232,50	240,00	247,50	255,00	262,50	270,00	285,00	300,00

226. *Pour rapporter une quantité exprimée par un nombre décimal concret à l'une des unités de son espèce*, il suffit de placer la virgule à la droite du chiffre qui représente des unités de cette grandeur. Ainsi, pour rapporter la quantité $365^{m},867$ au centimètre, on avance la virgule de deux rangs vers la droite, et l'on a $36\,586^{cm},7$, c'est-à-dire un nombre cent fois plus grand qui exprime des unités cent fois plus petites que le nombre proposé.

227. *Rapporter la quantité complexe* 5 *ans* 7 *mois* 8 *jours à l'une de ses unités.*

Soit à rapporter cette quantité à l'année, par exemple, ce qui revient à trouver le rapport de $5^{a}\ 7^{m}\ 8^{j}$ à l'année. L'année valant 12 mois, $5^{a}+7^{m}$ valent $5\times 12+7=67^{m}$, et comme un mois vaut 30 jours, $67^{m}+8^{j}$ valent $67\times 30+8=2018^{j}$. Mais $1^{a}=12\times 30=360^{j}$, donc $5^{a}+7^{m}+8^{j}=\frac{2018}{360}\ ans=5^{a},60555\ldots$ (180).

Le mois valant 30^{j}, on trouverait de même que

$$5^{a}+7^{m}+8^{j}=\frac{2018}{30}\ mois=67^{m},2666\ldots$$

228. *Problème inverse du précédent.* Transformer $\frac{2018}{360}$ années en années, mois, jours, etc.

Cela revient à diviser 2018 ans par 360 :

$$\begin{array}{r|l}
2188^{a} & 360 \\ \cline{2-2}
218 & 5^{a}\ 7^{m}\ 8^{j} \\
12 & \\ \cline{1-1}
436 & \\
218 & \\ \cline{1-1}
2616 & \\
96 & \\
30 & \\ \cline{1-1}
2880 & \\ \cline{1-1}
00 &
\end{array}$$

La division de 2018 par 360 donnant 5 pour quotient et 218 pour reste, c'est qu'on a :

$$\frac{2018}{360}\ ans=5^{a}+\frac{218}{360}\ a.=5^{a}+\frac{218\times 12}{360}\ mois=5^{a}+\frac{2616}{360}\ m.$$

$$=5^{a}+7^{m}+\frac{96}{360}\ mois=5^{a}+7^{m}+\frac{96\times 30}{360}\ jours=5^{a}+7^{m}+8^{j}.$$

229. *Même problème*, le nombre d'années $5^{a},60555\ldots$ étant exprimé en décimales.

Mettant le nombre décimal sous la forme d'une fraction décimale $\frac{560555}{100000}$, on ramène l'opération à la précédente; seulement la facilité d'effectuer la division par l'unité suivie de zéros rend l'opération plus

simple dans ce cas que dans le précédent, en la ramenant seulement à une série de multiplications (176).

On a $5^a,60555 = 5^a + 0^a,60555 = 5^a + 0,60555 \times 12$ *mois*
$= 5^a + 7^m,2666 = 5^a + 7^m + 0,2666 \times 30$ *jours* $= 5^a + 7^m + 8^j$.

230. Les 4 *opérations sur les nombres complexes* s'effectuent en suivant la même marche que pour les nombres entiers et que pour les nombres décimaux, en observant que les unités de chaque grandeur n'étant plus égales à 10 unités de la grandeur immédiatement inférieure, il faudra avoir égard à ce rapport soit lors de la conversion de chaque résultat partiel en unités de la grandeur immédiatement supérieure (addition et multiplication) ou inférieure (division), soit pour rendre une soustraction partielle possible, quand on augmente le nombre partiel dont on soustrait d'une unité de la grandeur immédiatement supérieure. Il est à remarquer aussi que les nombres d'unités de chaque grandeur peuvent avoir plus d'un chiffre.

Addition.

$7^h\ 5^m\ 54^s,8$
$2\ \ 10\ \ 40,4$
$5\ \ 18\ \ 47,6$
$\overline{14^h\ 35^m\ 22^s,8}$

Soustraction.

$9^h\ 25^m\ 14^s,8$
$3\ \ 31\ \ 30,4$
$\overline{5^h\ 53^m\ 44^s,4}$

Multiplication.

$5^j\ 8^h\ 19^m\ 16^s,3$
7
$\overline{37^j\ 10^h\ 14^m\ 54^s,1}$

Division (228).

Dividende	Diviseur / Quotient
$7^h\ 18^m\ 13^s,5$	4
3	$1^h\ 49^m\ 33^s,375$
60	
180	
18	
198	
38	
2	
60	
120	
13,5	
133,5	
13	
15	
30	
20	
0	

Si le multiplicateur était une fraction, on multiplierait le nombre complexe par son numérateur, et on diviserait le produit obtenu par son dénominateur.

Si le diviseur était une fraction, on multiplierait le dividende complexe par la fraction diviseur renversée.

Quand un problème conduit à *multiplier ou à diviser un nombre complexe par un autre nombre complexe*, on peut toujours rapporter ce der-

nier à l'une de ses unités (227) qui est déterminée dans l'énoncé, et l'opération est ramenée à multiplier ou à diviser un nombre complexe par une fraction.

Exemple de division. Un mobile met $5^h 10^m 3^s$ pour parcourir $2^\circ 18' 15''$ d'une circonférence; en combien de temps a-t-il parcouru 1°, sa vitesse étant constante? L'énoncé indique que l'on doit rapporter $2^\circ 18' 15''$ au degré; ce qui donne $\frac{8295}{3600} = \frac{553}{240}$ en divisant par les facteurs communs 3 et 5. Le temps demandé est alors

$$(5^h 10^m 3^s) \times \frac{240}{553} = \frac{1240^h 12^m}{553} = 2^h 14^m 33^s,63.$$

LIVRE IV.

Puissances et Racines.

DÉFINITIONS.

231. Ce que nous avons dit nos 82, 83, 84, 85, relativement aux puissances des nombres entiers, s'applique à un nombre quelconque, fractionnaire, décimal ou complexe.

232. Tout nombre qui a pour puissance un nombre donné est une *racine* de ce nombre.

233. Deux nombres qui sont tels que l'un est la puissance d'un degré quelconque de l'autre, celui-ci est la racine du même *degré* ou *indice* du premier. Ainsi 3 ayant 3, 9, 27, 81... pour 1re, 2e, 3e, 4e... puissances, ces nombres respectifs ont 3 pour racines 1re, 2e, 3e, 4e....

234. Les racines deuxième et troisième prennent respectivement les noms de *racine carrée* et *racine cubique*.

235. Pour indiquer une racine d'un nombre, on écrit ce nombre sous le signe $\sqrt{}$, appelé *radical*, entre les branches duquel on écrit l'indice de la racine. Ainsi

$$\sqrt[2]{9}, \quad \sqrt[3]{27 \times 3}, \quad \sqrt[4]{4+16}, \quad \sqrt[5]{\frac{35}{74}},$$

expriment respectivement les racines carrée, cubique, quatrième et cinquième des quantités 9, 27×3, $4 + 16$ et $\frac{35}{74}$.

Remarque. La racine première d'un nombre étant égale à ce nombre, on supprime le radical et l'indice. Pour la racine carrée, on a l'habitude de supprimer l'indice; ainsi, au lieu d'écrire $\sqrt[2]{9}$, on écrit simplement $\sqrt{9}$.

CARRÉS ET RACINES CARRÉES.

236. *Pour former le carré, et en général une puissance quelconque d'une quantité*, on n'éprouve pas d'autres difficultés que celles provenant de la multiplication de ces quantités. Ainsi pour obtenir, par exemple, le carré de la fraction $\frac{3}{4}$, il suffira (151) de faire le produit

$$\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3\times 3}{4\times 4}=\frac{3^2}{4^2}=\frac{9}{16}.$$

237. *Usage de la table des carrés et des cubes des nombres entiers consécutifs de* 1 *à* 1000 *pour élever un nombre entier, décimal ou fractionnaire au carré ou au cube* (291).

La table donne directement le carré et le cube d'un nombre entier qui n'est pas supérieur à 1000, ce qui satisfait aux cas les plus habituels de la pratique.

Pour un nombre décimal, abstrait ou concret, si, en négligeant la virgule, le nombre entier qui en résulte n'est pas supérieur à 1000, on cherche dans la table le carré ou le cube de ce nombre entier, et l'on sépare sur sa droite deux ou trois fois plus de chiffres décimaux qu'il n'y en a dans le nombre proposé.

1er *Exemple.* Soit à déterminer la surface d'un carré de $7^{m},96$ de côté. Adoptant le centimètre pour unité, on a pour le côté du carré 796^{cm}, et la table donne pour la surface $63\,36\,16^{cmq} = 63^{mq},36\,16$.

2e *Exemple.* Volume d'un cube de $0^{m},796$ de côté. Adoptant le millimètre pour unité, le côté du cube est 796^{mm}, et la table donne pour le volume $504\,358\,336^{mmc} = 0^{mc},504\,358\,336$.

Si le nombre proposé, abstraction faite de la virgule s'il est décimal, était supérieur à 1000, on le convertirait en unités telles, que la partie entière fût la plus grande possible sans être supérieure à 1000, et le carré ou le cube de cette partie entière, que donnerait la table, pourrait être pris pour le carré ou le cube demandé, avec une approximation ordinairement suffisante pour la pratique.

Ainsi le côté du carré du 1er exemple étant $7^{m},963$, on adopterait le centimètre pour unité, ce qui donnerait $796^{cm},3$ pour le côté; et négligeant les 3 millimètres, on chercherait, comme ci-dessus, dans la table, la surface $63\,36\,16^{cmq} = 63^{mq},36\,16$ du carré de 796^{cm} de côté, et on l'adopterait pour la surface du carré de $7^{m},963$ de côté.

Si le côté était $7^{m},96\,8$, au lieu de prendre 796^{cm}, on adopterait 797^{cm}, afin d'avoir un résultat plus approché.

Pour une fraction, la table en donne le carré ou le cube en donnant les carrés et les cubes de ses deux termes (236).

238. *Tableau des carrés et des cubes des nombres entiers non supérieurs* à 10.

Racines	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Carrés	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Cubes	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

239. Le carré d'un nombre entier d'un seul chiffre n'a qu'un ou deux chiffres; celui de deux en a trois ou quatre; celui de trois en a cinq ou six, etc. De là il résulte que *pour avoir le nombre des chiffres de la racine carrée d'un nombre entier donné,* il suffit de séparer ce nombre en tranches de deux chiffres, sauf à n'en laisser qu'un à la dernière tranche. Le nombre des tranches indique le nombre des chiffres.

240. *Le carré d'une quantité formée de deux parties se compose :* 1° du carré de la première partie; 2° du double produit de la première partie par la seconde; 3° du carré de la seconde.

Ainsi $(3+5)^2 = 3^2 + 2\times3\times5 + 5^2 = 9 + 30 + 25 = 64.$

Comme cas particulier, *le carré d'un nombre composé de dizaines et d'unités se compose :* 1° du carré des dizaines; 2° du double produit des dizaines par les unités; 3° du carré des unités :

$$54^2 = 50^2 + 2\times50\times4 + 4^2 = 2500 + 400 + 16 = 2916;$$
$$273^2 = 270^2 + 2\times270\times3 + 3^2 = 72900 + 1620 + 9 = 74529.$$

241. *La différence des carrés de deux nombres entiers consécutifs est égale au double du plus petit de ces nombres, plus un.*

$$(26+1)^2 - 26^2 = 26\times2 + 1 = 53.$$

242. *Pour extraire la racine carrée d'un nombre entier,* 74529 par exemple, on le sépare en tranches de deux chiffres à partir de la droite, sauf à ne laisser qu'un ou deux chiffres à la dernière tranche à gauche (le nombre des tranches est celui des chiffres de la racine) (239), et l'on tire un trait vertical à sa droite pour le séparer de la racine. On prend la racine carrée 2 du plus grand carré 4 contenu dans la première tranche à gauche 7; cette racine 2, qui ne peut avoir qu'un seul chiffre (239), est le premier chiffre à gauche de la racine. On retranche le carré du chiffre trouvé de la première tranche à gauche; à la droite du reste 3 on écrit la tranche suivante 45; on sépare le premier chiffre 5 à droite

7.45.29	273		
4	48	47	543
34.5	8	7	3
32 9	384	329	1629
162.9			
162 9			
0			

7.4 5.29	273
3 4.5	48
1	47
162.9	543
0	

du nombre qui en résulte; on divise la partie à gauche 34, considérée comme exprimant des unités simples, par le double 4 de la partie obtenue de la racine, ce qui donne pour quotient le chiffre 8, qui est le chiffre suivant de la racine, ou un chiffre trop fort. Pour le vérifier, on l'écrit à la droite du double de la partie obtenue de la racine; on multiplie le nombre 48 qui en résulte par 8, et le produit 384 étant plus fort

que le nombre 345, c'est que le chiffre 8 est trop fort. Opérant sur le chiffre 7 comme sur le chiffre 8, le produit 329 du double de la partie de racine obtenue par ce chiffre étant moindre que 345, 7 est le chiffre suivant de la racine. On retranche le double produit 329 de 345; à la droite du reste 16 on écrit la tranche suivante 29; on sépare le chiffre 9 à droite du nombre qui en résulte; on divise la partie à gauche 162, considérée comme exprimant des unités simples, par le double $27 \times 2 = 54$ de la partie de racine obtenue, ce qui donne pour quotient le chiffre suivant de la racine ou un chiffre trop fort; on le vérifie comme dans le cas précédent, et l'on continue ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait opéré sur toutes les tranches.

En général, on se dispense d'écrire les produits par les chiffres de la racine, et l'on retranche ces produits au fur et à mesure qu'on en obtient les chiffres; c'est ce qui a été fait dans la seconde manière d'opérer ci-dessus.

243. Quand, pendant l'extraction de la racine carrée, le reste qui correspond à la partie de racine obtenue n'est pas moindre que le double plus 1 de cette partie de racine, la partie de racine obtenue est trop petite au moins d'une unité; et lorsque le reste est moindre que le double plus 1 de la partie de racine obtenue, cette partie de racine ne peut être augmentée de 1.

Ainsi, le dernier reste doit toujours être moindre que le double de la racine plus 1. Lorsqu'il est moindre que la racine, cette racine est approchée par défaut à moins d'une demi-unité. Dans le cas contraire, cette racine augmentée d'une unité est approchée par excès à moins d'une demi-unité (204).

244. Si, comme dans l'exemple précédent, on obtient un dernier reste nul, c'est que le nombre proposé est un *carré parfait.*

Si au contraire le dernier reste n'est pas nul, c'est que le nombre proposé n'est pas un carré parfait. La racine obtenue est alors sa racine à moins d'une unité par défaut (243), c'est-à-dire la partie entière de la racine exacte (174). Elle est la racine exacte du plus grand carré parfait contenu dans le nombre proposé, et le reste est la différence entre le nombre proposé et ce plus grand carré. La racine exacte du nombre proposé, quoiqu'elle existe, ne peut être exprimée exactement par aucun nombre, entier, fractionnaire ou décimal; elle est incommensurable (211), et ne peut par conséquent non plus être exprimée par un nombre décimal périodique (193, 194 et 204).

245. *Un nombre entier n'est pas un carré parfait :*

1° Quand il ne contient pas tous ses facteurs premiers à une puissance d'un degré pair (121, 270);

2° Quand, étant un nombre pair, il n'est pas divisible par $2^2 = 4$;

3° Quand les zéros qui peuvent le terminer ne sont pas en nombre pair (44);

4° Quand il est terminé par un des 4 chiffres 2, 3, 7, 8;

5° Quand, étant terminé par un 5, son chiffre des dizaines n'est pas 2.

CUBES ET RACINES CUBIQUES.

246. Le cube d'un nombre entier d'un seul chiffre n'ayant pas plus de trois chiffres; celui d'un nombre de deux chiffres n'en renfermant que 4, 5 ou 6, etc., il en résulte que *pour avoir le nombre des chiffres de la racine cubique d'un nombre entier*, il suffit de diviser ce nombre en tranches de trois chiffres, sauf à n'en laisser qu'un ou deux à la dernière tranche. Le nombre des tranches est celui des chiffres de la racine (239).

En général, *pour avoir le nombre des chiffres de la racine* m[e] *d'un nombre entier*, on divise ce nombre en tranches de m chiffres, sauf à laisser moins de m chiffres à la dernière tranche, et le nombre des tranches est celui des chiffres de la racine.

247. *Le cube d'une quantité formée de deux parties se compose :* 1° du cube de la première partie; 2° du triple produit du carré de la première partie par la seconde; 3° du triple produit de la première partie par le carré de la seconde; 4° du cube de la seconde. Ainsi

$$(4+5)^3 = 4^3 + 3\times 4^2\times 5 + 3\times 4\times 5^2 + 5^3 = 64 + 240 + 300 + 125 = 729.$$

Comme cas particulier, *le cube d'un nombre renfermant des dizaines et des unités se compose des 4 parties :* 1° le cube des dizaines; 2° le triple produit du carré des dizaines par les unités; 3° le triple produit des dizaines par le carré des unités; 4° le cube des unités. Ainsi

$$\begin{aligned} 145^3 &= 140^3 + 3\times 140^2\times 5 + 3\times 140\times 5^2 + 5^3 \\ &= 2744000 + 294000 + 10500 + 125 = 3048625. \end{aligned}$$

248. *La différence des cubes de deux nombres entiers consécutifs est égale au triple carré du plus petit de ces nombres, plus le triple de ce plus petit nombre, plus* 1 :

$$(26+1)^3 - 26^3 = 26^2\times 3 + 26\times 3 + 1.$$

249. *Pour extraire la racine cubique d'un nombre entier*, 3 048 625 par exemple, on le sépare en tranches de trois chiffres à partir de la droite, sauf à ne laisser qu'un ou deux chiffres à la dernière tranche à gauche (le nombre des tranches indique le nombre des chiffres de la racine) (246).

On prend la racine cubique 1 du plus grand cube 1 contenu dans la première tranche à gauche 3; cette racine 1, qui ne peut avoir qu'un seul chiffre (246), est le premier chiffre à gauche de la racine. On retranche le cube du chiffre trouvé de la première tranche à gauche; à la droite du reste 2 on écrit la tranche suivante 048; on sépare les deux chiffres à droite du nombre qui en résulte; on divise la partie à gauche 2 , considérée comme des unités simples, par le triple carré $3\times 1^2 = 3$ de la partie obtenue de la racine, ce qui donne pour quotient le chiffre 6, qui est le chiffre suivant de la racine ou un chiffre trop fort. Pour le vérifier, on forme les trois autres parties qui, outre le cube des

dizaines, qui a été retranché, entrent dans le cube 3048, c'est-à-dire le triple carré des dizaines par les unités $3 \times 10^2 \times 6 = 1800$, le triple des

3.048.625	145		
1	$3 \times 1^2 = 3$	$3 \times 1^2 = 3$	$3 \times 14^2 = 588$
20.48	$3 \times 10^2 \times 6 = 1800$	$3 \times 10^2 \times 4 = 1200$	$3 \times 140^2 \times 5 = 294000$
17 44	$3 \times 10 \times 6^2 = 1080$	$3 \times 10 \times 4^2 = 480$	$3 \times 140 \times 5^2 = 10500$
3 04 6.25	$6^3 = 216$	$4^3 = 64$	$5^3 = 125$
3 04 6 25	3096	1744	304625
0			

dizaines par le carré des unités $3 \times 10 \times 6^2 = 1080$, et le cube des unités $6^3 = 216$; on fait la somme 3096 de ces trois parties, et cette somme étant plus forte que 2048, c'est que le chiffre 6 est trop fort. On verrait de même que le chiffre 5 est trop grand. Essayant 4, la somme 1744 des trois autres parties qui entrent dans 3048 étant moindre que 2048, c'est que ce chiffre est le suivant de la racine. On retranche la somme 1744 de 2048; à la droite du reste 304 on écrit la tranche suivante 625; on sépare deux chiffres sur la droite du nombre qui en résulte; on divise la partie à gauche 3046, considérée comme des unités simples, par le triple carré $3 \times 14^2 = 588$ de la partie obtenue de la racine, ce qui donne pour quotient le chiffre 5, qui est le chiffre suivant de la racine ou un chiffre trop fort. Pour le vérifier, comme pour le précédent, on forme les trois autres parties qui, avec le cube des dizaines, qui a été retranché, entrent dans le cube 3048625, c'est-à-dire le triple carré des dizaines par les unités $3 \times 140^2 \times 5 = 294000$, le triple des dizaines par le carré des unités $3 \times 140 \times 5^2 = 10500$, et le cube des unités $5^3 = 125$; on fait la somme 304625 de ces trois parties, et cette somme n'étant pas supérieure au nombre 304625, duquel on doit la retrancher, c'est que le chiffre 5 est le suivant de la racine. On continuerait ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait opéré sur toutes les tranches.

250. Le plus grand reste qu'il est possible d'obtenir dans l'extraction de la racine cubique ne peut atteindre le triple carré de la racine déjà obtenue, plus le triple de cette même racine, plus un. Si le reste atteignait ou dépassait cette limite, c'est que le chiffre de la racine serait trop faible; il faudrait alors l'augmenter.

251. Dans tout le cours des opérations relatives à l'extraction de la racine cubique, chaque reste, suivi de toutes les tranches sur lesquelles on n'a pas encore opéré, est égal au nombre dont on cherche la racine, diminué du cube de la partie de racine déjà obtenue.

Comme pour la racine carrée (244), si la racine cubique d'un nombre entier tombe entre deux nombres entiers consécutifs, cette racine, quoiqu'elle existe, ne peut être exprimée par aucun nombre, entier, fractionnaire ou décimal; elle est incommensurable.

252. Un nombre pair ne peut être un cube parfait que lorsqu'il est divisible par $2^3 = 8$. Un nombre terminé par des zéros ne peut être

un cube parfait que quand le nombre de ces zéros est un multiple de 3 (245).

253. *Preuve par* 9. Une puissance d'un nombre étant le résultat de la multiplication de ce nombre pris plusieurs fois comme facteur, la preuve par 9 de l'élévation d'un nombre à une puissance se fait d'après la marche suivie pour la preuve par 9 de la multiplication (96).

Pour faire la preuve par 9 de l'extraction d'une racine, le nombre proposé étant égal à une puissance de la racine d'un degré égal à l'indice, plus le reste, on suivra une marche analogue à celle suivie pour la division (97). Ainsi pour faire la preuve par 9 de l'exemple du n° 249, on cherche le reste 1 de la racine 145 par 9, on prend le cube 1 de ce reste, et le reste 1 de ce cube par 9, ajouté au reste 0 par 9 du reste de l'extraction donne une somme 1, dont le reste 1 par 9 doit être égal au reste par 9 du nombre proposé 3048625.

Les *preuves par* 11 des puissances et des racines s'effectuent en suivant les mêmes marches que pour les preuves par 9 (98).

CARRÉS, CUBES, RACINES CARRÉES ET RACINES CUBIQUES DES FRACTIONS ET DES NOMBRES DÉCIMAUX.

254. *Le carré d'une fraction* étant le produit de cette fraction par elle-même, on l'obtient en élevant chacun de ses termes au carré (151 et 237).

$$\left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{4^2}{7^2} = \frac{16}{49}.$$

255. De même, *le cube d'une fraction* étant le produit de cette fraction prise trois fois comme facteur, on l'obtient en élevant chacun de ses termes au cube (237).

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4^3}{5^3} = \frac{64}{125}.$$

256. De la manière dont se forment le carré et le cube d'une fraction (254, 255), il résulte que *pour obtenir la racine carrée ou la racine cubique* d'une fraction, il suffit d'extraire la racine carrée ou la racine cubique de ses deux termes (233). Ainsi

$$\sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}} = \frac{4}{7}, \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{4}{5}.$$

257. *On peut ramener le calcul de l'extraction de la racine carrée ou cubique d'une fraction à l'extraction de la racine d'un seul nombre.* Pour cela, il suffit de multiplier les deux termes de la fraction proposée par le dénominateur de cette fraction, s'il s'agit d'extraire la racine carrée, ou par le carré de ce dénominateur, s'il s'agit d'extraire la racine cubique. En effet,

$$\sqrt{\frac{4}{7}} = \sqrt{\frac{4 \times 7}{7 \times 7}} = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7^2}} = \frac{\sqrt{28}}{7},$$

et

$$\sqrt[3]{\frac{4}{5}} = \sqrt[3]{\frac{4 \times 5^2}{5 \times 5^2}} = \frac{\sqrt[3]{4 \times 5 \times 5}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{100}}{5}.$$

On voit que, par cette manière d'opérer, le dénominateur de la racine obtenue est égal au dénominateur de la fraction proposée (266).

258. Le carré d'un nombre décimal étant le produit de ce nombre par lui-même, et le cube d'un nombre décimal étant le produit de ce nombre pris trois fois comme facteur, *on obtiendra le carré et le cube d'un nombre décimal* d'après la règle de la multiplication des nombres décimaux (179) :

$$3{,}546^2 = 3{,}546 \times 3{,}546 = 12{,}574116;$$
$$23{,}7^3 = 23{,}7 \times 23{,}7 \times 23{,}7 = 13312{,}053.$$

259. La règle de la formation du carré d'un nombre décimal revenant à multiplier ce nombre décimal par lui-même, abstraction faite de la virgule, et à séparer sur la droite du produit deux fois autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans le nombre proposé, on voit que le carré d'un nombre décimal contient toujours un nombre pair de chiffres décimaux, et que ce nombre est double de celui des chiffres décimaux du nombre proposé.

De la règle semblable de la formation du cube d'un nombre décimal, il résulte de même que ce cube contient trois fois autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans le nombre proposé.

260. Des règles de la formation du carré et du cube d'un nombre décimal (258), on conclut :

1° Que *pour revenir du carré d'un nombre décimal à la racine*, on en extrait la racine carrée comme si c'était un nombre entier, abstraction faite de la virgule, et l'on sépare sur la droite de la racine trouvée moitié moins de chiffres décimaux qu'il n'y en a dans le nombre décimal proposé :

$$\sqrt{54{,}76} = \frac{\sqrt{54\,76}}{\sqrt{1\,00}} = \frac{74}{10} = 7{,}4 \qquad (170 \text{ et } 256)$$

2° Que *pour revenir du cube d'un nombre décimal à la racine cubique*, on extrait la racine cubique du nombre donné comme si c'était un nombre entier, abstraction faite de la virgule, et l'on sépare sur la droite de la racine trouvée trois fois moins de chiffres décimaux qu'il n'y en a dans le nombre proposé :

$$\sqrt[3]{3{,}048\,625} = \frac{\sqrt[3]{3\,048\,625}}{\sqrt[3]{1\,000\,000}} = \frac{145}{100} = 1{,}45.$$

261. *Pour obtenir la racine carrée d'un nombre quelconque à moins d'une unité décimale d'un ordre déterminé* (174), on prépare ce nombre de manière qu'il contienne deux fois autant de décimales qu'on en demande à la racine, en écrivant, si cela est nécessaire, des zéros à la



droite du nombre proposé, réduit au besoin en décimales; ainsi lorsqu'on veut obtenir la racine carrée à moins d'une unité, ou d'un dixième, ou d'un centième, ou d'un millième, etc., on prépare le nombre proposé de manière qu'il contienne zéro, ou deux, ou quatre, ou six, etc., chiffres décimaux. Puis, faisant abstraction de la virgule, on calcule la partie entière de la racine du nombre qui en résulte (242), et l'on sépare sur sa droite assez de chiffres pour que le dernier exprime des unités de l'ordre déterminé.

On trouve ainsi que la racine carrée de 247 à moins d'une unité est 15;

Que celle de ce même nombre à moins d'un centième est fournie par $\sqrt{247{,}0000}$, et qu'elle est 15,71;

Que celle de 2,5 à moins d'un centième est fournie par

$$\sqrt{2{,}5} = \sqrt{2{,}5000}, \text{ ce qui donne } 1{,}58;$$

Que celle de $\frac{5}{11}$ à moins d'un millième d'unité est

$$\sqrt{\frac{5}{11}} = \sqrt{0{,}454545\ldots}, \text{ ce qui donne } 0{,}674.$$

262. Extraire la racine carrée de 0,454545... à moins de 0,001 revenant à extraire la racine carrée de 454545 à moins d'une unité (261), et à séparer trois chiffres décimaux sur la droite du résultat, on peut appliquer la règle du n° 287; ainsi l'on calcule $\sqrt{0{,}454500}$, ce qui donne 0,674 à la racine et 0,224 pour reste; et la racine cherchée, approchée à moins de 0,001 par excès, est 0,675.

On voit qu'il suffisait de calculer 4 chiffres décimaux du quotient de 5 divisé par 11.

263. *Pour obtenir la racine cubique d'un nombre quelconque à moins d'une unité décimale d'un ordre déterminé*, on opère comme pour la racine carrée (261); seulement, au lieu de préparer le nombre proposé de manière qu'il contienne deux fois plus de décimales qu'on n'en demande à la racine, on le prépare de manière qu'il en contienne trois fois autant. Ainsi la racine cubique de 12,5 à moins d'un centième est donnée par

$$\sqrt[3]{12{,}500000}, \text{ ce qui fournit } 2{,}32;$$

Celle de 0,000012755427 à moins d'un millième est donnée par

$$\sqrt[3]{0{,}000012755}, \text{ et l'on trouve } 0{,}023;$$

Celle de $\frac{71}{22}$ à moins d'un centième est donnée par

$$\sqrt[3]{\frac{71}{22}} = \sqrt[3]{3{,}227272}, \text{ ce qui fournit } 1{,}47.$$

264. Comme pour la racine carrée (262), la règle du n° 287 est encore

applicable aux nombres décimaux. Ainsi la racine cubique, approchée à moins de 0,001, du nombre 0,000012755, s'obtient en extrayant la racine cubique 0,023, approchée par excès à moins de 0,001, du nombre 0,000012000.

De même, pour obtenir la racine cubique, à moins de 0,01, du nombre 3,227272..., il suffit d'extraire la racine cubique 1,48, approchée à moins de 0,01 par excès, du nombre 3,220000.

265. *Remarque.* Les racines carrées et cubiques qu'on a obtenues aux numéros 261 et 263 pèchent par défaut; en augmentant d'un leur dernier chiffre à droite, on aurait encore, mais avec excès, les racines demandées à moins d'une unité décimale de l'ordre déterminé.

Pour obtenir la racine la plus approchée, carrée ou cubique, d'un nombre quelconque en ne conservant qu'un nombre déterminé de chiffres décimaux, on calcule une décimale de plus qu'on n'en veut conserver à la racine, et l'on supprime cette décimale d'après la règle du n° 175.

266. *Pour déterminer la racine carrée ou la racine cubique d'un nombre entier à moins d'une fraction donnée dont le numérateur est l'unité*, on transforme ce nombre en une fraction équivalente ayant pour dénominateur le carré ou le cube du dénominateur de la fraction donnée, et on en extrait la racine (133 et 257).

Ainsi la racine carrée de 8 à moins de $\frac{1}{7}$ s'obtient en observant que

$$\sqrt{8}=\sqrt{\frac{8\times 7^2}{7^2}}=\frac{\sqrt{392}}{7}.$$

La racine carrée de 392 étant comprise entre 19 et 20, celle de 8 tombe entre $\frac{19}{7}$ et $\frac{20}{7}$, et chacune de ces fractions exprime $\sqrt{8}$ à moins de $\frac{1}{7}$ d'unité.

De même, la racine cubique de 5 à moins de $\frac{1}{7}$ d'unité s'obtient en observant que

$$\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{\frac{5\times 7^3}{7^3}}=\frac{\sqrt[3]{1715}}{7},$$

et que $\sqrt[3]{1715}$ étant comprise entre 11 et 12, celle de 5 à moins de $\frac{1}{7}$ est $\frac{11}{7}$ et $\frac{12}{7}$.

PUISSANCES ET RACINES DE DEGRÉS OU INDICES QUELCONQUES.

267. *Le produit de plusieurs puissances d'un même nombre* est une puissance de ce nombre, d'un degré égal à la somme des degrés des puissances des facteurs :

$$3^2\times 3^2=3^4=81;\quad 3^2\times 3^3\times 3^4=3^9=19683.$$

268. *Toute puissance d'une puissance d'un nombre* est une puissance de ce nombre, d'un degré égal au produit des degrés désignés. Ainsi

$$(3^2)^2 = 3^4 = 81, \quad (3^2)^3 = 3^6 = 729, \quad [(2^2)^3]^3 = 2^{18} = 262144.$$

269. Du numéro précédent, il résulte que *pour extraire d'un nombre une racine dont l'indice ne renferme que les facteurs* 2 *et* 3, il suffit d'extraire successivement, dans un ordre quelconque, autant de racines carrées et cubiques que les facteurs respectifs 2 et 3 entrent de fois dans l'indice de la racine. Ainsi :

$$\sqrt[4]{81} = \sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{9} = 3;$$
$$\sqrt[6]{4096} = \sqrt[3]{\sqrt{4096}} = \sqrt[3]{64} = 4;$$
$$\sqrt[18]{262144} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{262144}}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{512}} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

270. *Pour élever au carré ou au cube, et en général à une puissance quelconque, le produit de plusieurs facteurs*, on élève chacun de ses facteurs à la puissance indiquée :

$$(3 \times 4)^2 = 3^2 \times 4^2 = 144, \quad (2^2 \times 5)^3 = 2^6 \times 5^3 = 8000.$$

271. *Puissance d'un quotient.* On a de même

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}.$$

272. *Pour extraire une racine d'un produit*, on extrait cette racine de chacun des facteurs de ce produit. Ainsi :

$$\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{4} \times \sqrt{9} = 2 \times 3 = 6;$$
$$\sqrt[3]{\frac{8}{27} \times 64} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} \times \sqrt[3]{64} = \frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3}.$$

273. *Racine d'un quotient.* On a aussi

$$\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{2}{3}.$$

274. *Pour élever la somme ou la différence de plusieurs nombres à une puissance*, on effectue la somme ou la différence, et on l'élève à la puissance indiquée :

$$(3 + 4 + 5)^2 = 12^2 = 144; \quad (9 + 2 - 5)^2 = 6^2 = 36;$$
$$\left(\frac{1}{2} + 1,4 + 3\right)^3 = (0,5 + 1,4 + 3)^3 = (4,9)^3 = 117,649.$$

275. De même, *pour extraire une racine de la somme ou de la différence de plusieurs nombres*, on effectue la somme ou la différence de ces

nombres, et on extrait la racine du résultat. Ainsi :

$$\sqrt{87+57}=\sqrt{144}=12;\quad \sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4;$$
$$\sqrt[3]{25,17+49,715+42,764}=\sqrt[3]{117,649}=4,9.$$

276. *Le quotient d'une puissance d'un nombre divisée par une puissance de ce nombre est égal à ce même nombre élevé à une puissance d'un degré égal au degré de la puissance dividende, moins le degré de la puissance diviseur.*

Ainsi $\frac{3^6}{3^2}=3^{6-2}=3^4,$

et $\frac{3^2}{3^6}=3^{2-6}=3^{-4}.$

Comme $\frac{3^2}{3^6}=\frac{3^2}{3^2\times 3^4}=\frac{1}{3^4},$

on a donc $\frac{1}{3^4}=3^{-4}.$

Cas particulier $\frac{3^4}{3^4}$ ou $1=3^{4-4}=3^0;$

ce qui montre qu'un nombre élevé à la puissance 0 est égal à 1.

$$\frac{3^5}{3^4}\text{ ou } 3=3^{5-4}=3^1;$$

ce qui fait voir que la puissance du degré 1 d'un nombre est égale à ce nombre.

On a de même $\frac{3^4}{3^5}$ ou $\frac{1}{3}=3^{4-5}=3^{-1}.$

277. *Une racine d'une puissance d'un nombre est égale à ce nombre élevé à une puissance d'un degré fractionnaire dont le numérateur est le degré de la puissance primitive, et le dénominateur l'indice de la racine.* Ainsi

$$\sqrt[2]{3^6}=3^{\frac{6}{2}}=3^3,$$
$$\sqrt[6]{3^2}\text{ ou }\sqrt[3]{3}=3^{\frac{2}{6}}=3^{\frac{1}{3}},$$
$$\sqrt[6]{\frac{1}{3}}\text{ ou }\sqrt[6]{3^{-1}}=3^{-\frac{1}{6}}.$$

USAGE DE LA TABLE DES CARRÉS ET DES CUBES DES NOMBRES ENTIERS CONSÉCUTIFS DE 1 A 1000 POUR EXTRAIRE LA RACINE CARRÉE ET LA RACINE CUBIQUE D'UN NOMBRE.

278. *Remarque.* Les règles exposées dans les chapitres précédents montrent que l'extraction de la racine carrée et de la racine cubique d'un nombre quelconque, entier, décimal ou fractionnaire, se ramène toujours à l'extraction de la racine carrée ou de la racine cubique, à moins d'une unité, d'un nombre entier (242, 249, 261 et 263).



270. *Usage de la table des carrés des nombres entiers consécutifs de 1 à 1000 pour abréger l'extraction de la racine carrée : 1° à moins d'une unité entière; 2° à moins d'une unité décimale d'un ordre déterminé, d'un nombre quelconque, entier, décimal ou fractionnaire.*

1° *Extraire la racine carrée, à moins d'une unité, d'un nombre quelconque.* L'opération consistant à extraire la racine carrée, à moins d'une unité, d'un nombre entier, ou de la partie entière d'un nombre décimal, ou encore de la partie entière d'une fraction réduite en décimales (261), on n'a besoin, dans ce 1°, que de considérer les nombres entiers, et l'on a deux cas à distinguer, selon que le nombre entier dont on a à extraire la racine carrée, à moins d'une unité, n'est pas supérieur au carré 1 00 00 00 du plus grand nombre 1000 contenu dans la table, ou qu'il est supérieur à ce carré.

1er *cas.* Extraire la racine carrée, à moins d'une unité, du nombre entier 78 65 45.

Cherchant dans la colonne des carrés de la table, le carré 78 49 96 qui approche le plus du nombre proposé 78 65 45 sans le surpasser, ce carré est le plus grand carré entier contenu dans ce nombre; donc sa racine carrée 886, qui se trouve en regard dans la première colonne verticale, est la racine carrée, à moins d'une unité, du nombre proposé. Cette racine pèche par défaut; 887 est la racine carrée, par excès à moins d'une unité, du nombre proposé. L'excès 1549 du nombre proposé sur le plus grand carré entier qu'il contient est le reste que fournirait l'extraction de la racine carrée, à moins d'une unité, du nombre proposé : 78 65 45 — 78 49 96 = 15 49.

Tout nombre décimal, 786 545,273 par exemple, ayant pour partie entière 78 65 45, aurait également 886 pour racine carrée, à moins d'une unité; le reste serait 1549,273.

2e *cas.* Extraire la racine carrée, à moins d'une unité, du nombre entier 78 75 12 74 37.

Séparant sur la droite de ce nombre un nombre pair 4 de chiffres, tel que la partie à gauche 78 75 12 soit la plus grande possible, mais inférieure au carré de 1000, cette partie à gauche rentrant dans les nombres du 1er cas, la table donne 887 pour sa racine carrée à moins d'une unité, c'est-à-dire pour la racine carrée du plus grand carré quelle contient, et 78 75 12 — 78 67 69 = 743 est le reste; donc le nombre 887 est formé de 3 premiers chiffres à gauche de la racine cherchée (242). Pour obtenir les suivants, on continue l'opération conformément à la règle du n° 242 :

78 75 12.74.3 7	88 741	
78 67 69	17744	177 481
7 43 7.4	4	1
7 09 7 6	70 976	177 481
33 9 83.7		
17 7 48 1		
16 2 35 6		

Ainsi, à la droite du reste 743 on écrit la tranche suivante 74, on sépare le chiffre 4 sur la droite du nombre qui en résulte, et on divise la partie à gauche par le double 1774 de la partie 887 de racine obtenue; ce qui donne au quotient le chiffre 4, qui est le chiffre suivant de la racine ou un chiffre trop fort. On le vérifie et on continue l'opération comme au n° 242. On trouve ainsi que la racine carrée, à moins d'une unité, du nombre proposé est 8 87 41, et que le reste est 12 23 56.

On voit que la table donne directement les 3 premiers chiffres à gauche de la racine.

Tout nombre décimal, 78 75 12 74 37,45 par exemple, ayant pour partie entière le nombre de l'exemple précédent, aurait la même racine carrée; le reste serait 12 23 56,45.

2° *Extraire la racine carrée, à moins d'une unité décimale, d'un nombre quelconque.*

De la règle du n° 261, il résulte que les calculs se ramènent à ceux du 1°, et qu'on a encore à distinguer deux cas analogues à ceux de ce 1°.

1er *cas.* Extraire la racine carrée, à moins d'un centième, du nombre 78,65 45 27 3.

Préparant ce nombre de manière qu'il contienne 4 chiffres décimaux, il devient 78,65 45; faisant abstraction de la virgule, et extrayant la racine carrée, à moins d'une unité, comme au 1er cas du 1°, la table donne 886 pour racine et 15 49 pour reste; donc 8,86 est la racine cherchée, et 0,15 49 27 3 le reste.

2° *cas.* Extraire la racine carrée, à moins d'un millième, du nombre 78 75,12 74.

Préparant ce nombre de manière qu'il contienne 6 chiffres décimaux, et négligeant la virgule, on obtient le nombre 78 75 12 74 00, dont la racine carrée, à moins d'une unité, se calcule comme au 2° cas du 1°. Ce qui donne 8 87 41 pour racine et 16 23 19 pour reste, donc 88,74 1 est la racine cherchée et 0,16 23 19 le reste.

280. *Usage de la table des cubes des nombres entiers consécutifs de* 1 *à* 1000 *pour abréger l'extraction de la racine cubique:* 1° *à moins d'une unité entière;* 2° *à moins d'une unité décimale d'un ordre déterminé, d'un nombre quelconque, entier, décimal ou fractionnaire.*

Ce qui suit, relativement à la racine cubique, est identique à ce qui a été exposé au numéro précédent pour la racine carrée.

1° *Extraire la racine cubique, à moins d'une unité, d'un nombre quelconque.*

L'opération consistant à extraire la racine cubique, à moins d'une unité, d'un nombre entier, ou de la partie entière d'un nombre décimal, ou encore de la partie entière d'un nombre fractionnaire réduit en décimales (263), on n'a besoin, dans ce 1°, que de considérer les nombres entiers, et l'on a deux cas à distinguer, selon que le nombre entier dont on a à extraire la racine cubique, à moins d'une unité, n'est pas supérieur au cube 1 000 000 000 du plus grand nombre 1 000 contenu dans la table, ou qu'il est supérieur à ce cube.

1er *cas.* Extraire la racine cubique, à moins d'une unité, du nombre 97 062 526.

Cherchant, dans la colonne des cubes de la table, le cube 96 702 579 qui approche le plus du nombre proposé sans le surpasser, ce cube est le plus grand cube entier contenu dans ce nombre; donc sa racine 459, qui se trouve en regard dans la première colonne verticale, est la racine cubique, à moins d'une unité, du nombre proposé. Cette racine pèche par défaut; 460 est la racine cubique, par excès à moins d'une unité, du nombre proposé. L'excès

$$97\,062\,526 - 96\,702\,579 = 359\,947,$$

du nombre proposé sur le plus grand cube entier qu'il contient, est le reste que fournirait l'extraction de la racine cubique, à moins d'une unité, du nombre proposé.

Tout nombre décimal, 97 062 526,38 par exemple, ayant pour partie entière 97 062 526 aurait également 459 pour racine cubique, à moins d'une unité; le reste serait 359 947,38.

2[e] *cas.* Extraire la racine cubique, à moins d'une unité, du nombre entier 97 062 526 893 127.

Séparant sur la droite de ce nombre un nombre 6, multiple de 3, de chiffres, tel que la partie à gauche 97 062 526 soit la plus grande possible, mais inférieure au cube de 1000, cette partie à gauche rentrant dans les nombres du 1[er] cas, la table donne 459 pour sa racine cubique, à moins d'une unité, c'est-à-dire pour la racine cubique du plus grand cube entier qu'elle contient, et 359 947 est le reste; donc 459 est formé des 3 premiers chiffres à gauche de la racine cherchée (249). Pour obtenir les suivants, on n'a qu'à continuer l'extraction de la racine cubique conformément à la règle du n° 249, comme on l'a fait au 2[e] cas du 1° du numéro précédent pour la racine carrée :

97 062 526.8 93.1 27	45 956	
96 702 579	63 204 300 × 5	6 334 207 500 × 6
359 947 8.93	68 850 × 5	827 100 × 6
316 365 8 75	25 × 5	36 × 6
43 582 0 18 1.27	63 273 175 × 5	6 335 034 636 × 6
38 010 2 07 8 16	316 365 875	38 010 207 816
5 571 8 10 3 11		

On trouve ainsi que la racine cubique, à moins d'une unité, du nombre proposé est 45 956, et que le reste est 5 571 810 311.

On voit que, comme pour la racine carrée (279), la table donne immédiatement les 3 premiers chiffres à gauche de la racine. Comme au 1[er] cas, tout nombre décimal ayant pour partie entière le nombre de l'exemple précédent aurait encore 45 956 pour racine cubique, à moins d'une unité, et le reste serait également celui obtenu dans cet exemple, suivi de la partie décimale du nombre proposé.

2° *Extraire la racine cubique, à moins d'une unité décimale d'un ordre déterminé, d'un nombre quelconque.*

De la règle du n° 263, il résulte que les calculs se ramènent à ceux du 1°, et que comme au 2° du numéro précédent on a encore à distinguer deux cas analogues à ceux de ce 1°.

1er *cas*. Extraire la racine cubique, à moins d'un centième, du nombre 97,062 526 32.

Préparant ce nombre de manière qu'il contienne 6 chiffres décimaux, il devient 97,062 526; faisant abstraction de la virgule, et extrayant la racine cubique, à moins d'une unité, comme au 1er cas du 1°, la table donne 459 pour racine et 359 947 pour reste; donc 4,59 est la racine cherchée, et 0,359 947 32 le reste.

2e *cas*. Extraire la racine cubique, à moins d'un millième, du nombre 97 062,526 89. Préparant ce nombre de manière qu'il contienne 9 chiffres décimaux, et négligeant la virgule, on obtient le nombre 97 062 526 890 000, dont la racine cubique, à moins d'une unité, se calcule comme au 2e cas du 1°. Ce qui donne 45 956 pour racine et 5 571 807 184 pour reste; donc 45,956 est la racine cherchée, et 5,571 807 184 le reste.

EXTRACTION DES RACINES CARRÉES ET CUBIQUES AU MOYEN D'ADDITIONS SUCCESSIVES.

281. *De quelques propriétés des carrés des nombres entiers*. Posant, de manière que les termes se correspondent, les trois suites: 1re celle des nombres impairs successifs en commençant par l'unité, 2e celle des nombres entiers successifs, 3e celle des carrés de ces nombres entiers successifs :

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	....
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	....
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	....

1° Le carré c, porté dans la 3e série, d'un nombre entier quelconque n, qui se trouve en regard dans la seconde, est égal à la somme des n premiers termes de la première série (3°). Ainsi, le carré $c = 25$ de $n = 5$ est égal à la somme des cinq premiers termes de la première série; ce qu'il est facile de vérifier.

2° La première série formant une progression arithmétique commençant par l'unité, et dont la raison est 2, le n^e terme t donne

$$t = 1 + 2(n - 1) = 2n - 1.$$

Ainsi le carré entier 49 ayant 7 pour racine carrée, il est la somme des 7 premiers termes de la première série, et le 7e terme de cette série est

$$t = 2 \times 7 - 1 = 13.$$

3° La somme c, des n premiers termes de la première série considérée comme une progression arithmétique, étant égale à la moitié du produit de la somme du premier terme 1 et du $n^{ième}$ t par le nombre n des

termes, on a

$$c = \frac{(1+t)n}{2}.$$

En remplaçant, dans cette expression, t par sa valeur du 2°, il vient bien $c = n^2$, comme on l'a annoncé au 1°.

La somme s des n premiers termes de la 2ᵉ série donne, par la même raison,

$$s = \frac{(1+n)n}{2}; \quad \text{pour } n = 5, \quad s = \frac{(1+5)5}{2} = 15.$$

La somme S des n premiers termes de la 3ᵉ série, c'est-à-dire des carrés des n premiers nombres entiers consécutifs, est égale au produit du double $2n$ de la racine n du plus grand carré, plus l'unité, par le tiers de la somme s des racines de cette suite. Ainsi l'on a

$$S = (2n+1)\,\frac{s}{3}.$$

On a encore, en remplaçant s par sa valeur précédente,

$$S = \frac{1}{6}n\,(n+1)\;(2n+1).$$

Soit à calculer la somme S des carrés des $n = 13$ premiers nombres entiers consécutifs. Suivant qu'on aura ou non calculé la somme $s = \frac{(n+1)n}{2} = \frac{(13+1)13}{2} = 91$ des racines, on fera usage de la 1ʳᵉ ou de la 2ᵉ expression de la valeur de S, et l'on aura

$$S = (2 \times 13 + 1) \times \frac{91}{3} = 819, \quad \text{ou} \quad S = \frac{1}{6} \times 13 \times 14 \times 27 = 819.$$

4° Lorsqu'une suite de carrés entiers consécutifs ne commence pas par l'unité, que, par exemple, son premier carré est $n'^2 = c'$ et son dernier $n^2 = c$, la somme s_1 des racines correspondantes est égale à la différence $c - c'$ entre le plus grand et le plus petit carré, plus la somme $n + n'$ de ces deux carrés, et le tout divisé par 2. Ainsi l'on a

$$s_1 = \frac{c - c' + n + n'}{2}.$$

En effet, la deuxième suite posée ci-dessus, considérée comme une progression arithmétique dont le 1ᵉʳ terme est n' et le dernier n, et dont, par suite, le nombre des termes est $n - n' + 1$, donne comme au 3°

$$s_1 = \frac{(n'+n)(n-n'+1)}{2};$$

ce que fournit bien l'expression précédente, en effectuant les calculs, simplifiant et remplaçant n^2 par c et n'^2 par c'.

Si le premier carré de la suite est $c' = 9$ et le dernier $c = 64$, d'où $n' = 3$ et $n = 8$, la somme de la suite de racines est

$$s_1 = \frac{64 - 9 + 8 + 3}{2} = 33.$$

Ce qu'il est facile de vérifier.

5° Pour avoir la somme des carrés des nombres entiers consécutifs dont le plus petit est n' et le plus grand n, on calcule, comme au 3°, la somme S des carrés des n premiers nombres entiers consécutifs, à partir de 1, et la somme S' des carrés des $n' - 1$ premiers nombres entiers consécutifs, aussi à partir de 1, et retranchant S' de S on a la somme cherchée.

282. *De quelques propriétés des cubes des nombres entiers* (281). Posant, de manière que les termes se correspondent, les quatre suites : 1re celle des nombres successifs formant une progression arithmétique dont le 1er terme est 3 et la raison 6, 2e celle des nombres entiers successifs, 3e celle des cubes de ces nombres entiers successifs, 4e celle des sommes des nombres entiers successifs :

3	9	15	21	27	33	39	45	51	57 ....
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 ....
1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000 ....
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55 ....

1° Le cube C, porté dans la 3e série, d'un nombre entier quelconque n, qui se trouve en regard dans la seconde, est égal au tiers de la somme des n premiers termes de la première série, multiplié par le nombre n des termes (3°). Ainsi, le cube $C = 125$ de $n = 5$ est égal au tiers 25, de la somme $s' = 75$ des 5 premiers termes de la première série, multiplié par 5 ; c'est ce que l'on vérifie facilement.

2° La première série formant une progression arithmétique dont le 1er terme est 3 et la raison 6, le $n^{ième}$ terme t donne

$$t = 3 + 6(n - 1) = 6n - 3.$$

Ainsi, le cube entier 343 ayant 7 pour racine cubique, il est le tiers de la somme des 7 premiers termes de la première série, multiplié par 7 ; et le 7e terme de cette série est

$$t = 6 \times 7 - 3 = 39.$$

3° La somme s' des n premiers termes de la première série considérée comme une progression arithmétique, étant égale à la moitié du produit de la somme de son premier terme 3 et de son $n^{ième}$ t par le nombre n des termes, on a

$$s' = \frac{(3 + t)n}{2}.$$

En remplaçant, dans cette expression, t par sa valeur du 2°, il vient

$$s' = 3n^2, \quad \text{d'où} \quad n^2 = \frac{s'}{3},$$

et, par suite, en multipliant les deux termes par n,

$$n^3 = \text{C} = \frac{s'n}{3}.$$

Résultat annoncé au 1°.

4° Un cube quelconque C d'un nombre entier n est encore égal à six fois la somme des $(n-1)$ premiers termes de la quatrième série, plus le nombre n des termes. Ainsi l'on a

$$n^3 = 8^3 = 6(1+3+6+10+15+21+28)+8 = 6 \times 84 + 8 = 512.$$

5° La somme S des cubes des n nombres entiers consécutifs à partir de l'unité, ou des n premiers termes de la troisième série est égale au carré de la demi-somme du carré n^2 et de n. Ainsi l'on a

$$\text{S} = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2.$$

Ce qui donne, pour $n = 8$,

$$\text{S} = \left(\frac{8^2+8}{2}\right)^2 = 36^2 = 1296.$$

6° Pour avoir la somme des cubes des nombres entiers consécutifs dont le plus petit est n' et le plus grand n, on calcule, comme au 5°, la somme S des cubes des n premiers nombres entiers consécutifs à partir de 1, et la somme S′ des cubes des $n'-1$ premiers nombres entiers consécutifs aussi à partir de 1, et retranchant S′ de S, on a la somme cherchée.

283. *Extraction de la racine carrée par des additions successives.* Cette manière d'opérer repose sur ce que le carré d'un nombre entier n, augmenté du double de ce nombre et d'une unité, donne le carré du nombre entier $(n+1)$ immédiatement supérieur (241).

Nous allons déterminer les 3 premiers chiffres à gauche de la racine en faisant usage de la table, comme au n° 279, et nous suivrons la méthode par additions successives pour obtenir les chiffres suivants, ce qui suffira pour faire bien comprendre comment on opérerait pour extraire la racine uniquement par cette méthode.

Soit à extraire la racine carrée, à moins d'un centième, du nombre 78 75 12,74. L'opération se ramène (279, 2° cas du 2°) à extraire la racine carrée, à moins d'une unité, du nombre 78 75 12 74 00, et à séparer 2 chiffres décimaux sur la droite du résultat.

La table donne, pour les trois premiers chiffres à gauche de la racine, le nombre 887, dont le carré, qui est le plus grand carré entier contenu dans le nombre 78 75 12 formé par les 3 premières tranches à gauche du nombre proposé, est 78 67 69.

Cela établi, posant :

Carré de 8870.	78676900
Double de la racine 8870, plus 1.	17741
La somme ou le carré de 8871 est.	78694641
Double de la racine 8871, plus 1.	17743
La somme ou le carré de 8872 est.	78712384
Double de la racine 8872, plus 1.	17745
La somme ou le carré de 8873 est.	78730129
Double de la racine 8873, plus 1.	17747
La somme ou le carré de 8874 est.	78747876
Double de la racine 8874, plus 1.	17749
La somme ou le carré de 8875 est.	78765625

Ce dernier carré étant supérieur au nombre formé par les 4 premières tranches à gauche du nombre proposé, c'est celui de 8874 qui est le plus grand carré entier contenu dans ce nombre; donc 4 est le 4ᵉ chiffre de la racine.

Pour calculer le 5ᵉ chiffre, on opère comme pour le précédent :

Carré de 88740.	7874787600
Double de la racine 88740, plus 1.	177481
La somme ou le carré de 88741 est.	7874965081
Double de la racine 88741, plus 1.	177483
La somme ou le carré de 88742 est.	7875142564

Ce dernier carré étant supérieur au nombre proposé, c'est que 1 est le 5ᵉ chiffre de la racine, et que, par conséquent, la racine demandée est 887,41.

Quant au reste, on l'obtient en retranchant du nombre formé par toutes les tranches le plus grand carré trouvé qui y est contenu, et en séparant sur la droite de la différence deux fois plus de chiffres décimaux qu'il n'y en a à la racine; on trouve ainsi que, dans l'exemple choisi, ce reste est 16,2319.

Remarquant que les doubles de racines, plus 1, que l'on ajoute successivement, augmentent de deux unités, on voit que l'extraction de la racine se réduit ainsi uniquement à une série d'additions fort simples; et comme, pour chaque chiffre de la racine, le nombre de ces additions est 5 en moyenne, sans jamais dépasser 9, il en résulte que l'on peut, en moins d'une heure, calculer la racine d'un nombre de plus de 60 chiffres, ce qu'on aurait de la peine à faire en une demi-journée en suivant la règle ordinaire (242).

284. *Étant donné le cube d'un nombre entier* n, *trouver celui de* $(n+1)$. On a (247)

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1.$$

Comme $3n^2$ est égal à la somme s' des n premiers termes de la première série (3° n° 282), pour obtenir, par exemple, le cube de 21, con-

naissant celui de 20, on posera :

Cube de $n = 20$	8000
Somme des termes $s' = 3n^2$ ou $\frac{3n^3}{n} = 3 \times 20^2$ ou $\frac{3 \times 20^3}{20}$	1200
3 fois la racine $n = 20$	60
L'unité	1
Faisant la somme, elle sera le cube de 21, qui est bien	9261

285. Étant donnés les cubes de deux nombres entiers consécutifs n et $n+1$, trouver celui du nombre entier immédiatement supérieur $n+2$.

On a d'abord (284), en désignant par d la différence des cubes $(n+1)^3$ et n^3,

$$d = 3n^2 + 3n + 1.$$

Posant ensuite (284)

$$(n+2)^3 = (n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1\,;$$

d'où, en effectuant les calculs,

$$(n+2)^3 = (n+1)^3 + 3n^2 + 6n + 3 + 3n + 3 + 1,$$

et, par suite,

$$(n+2)^3 = (n+1)^3 + (3n^2 + 3n + 1) + 6(n+1)$$
$$= (n+1)^3 + d + 6(n+1).$$

D'après cela, ayant, par exemple, $20^3 = 8000$ et $21^3 = 9261$, pour déterminer le cube de 22, puis celui de 23, etc., on posera :

Cube de 21 (284)	9261
Différence $d = 21^3 - 20^3$	1261
$6(n+1)$, ou 6 fois la racine 21	126
Faisant la somme, elle donne le cube de 22, qui est	10648
Différence de ce cube au précédent	1387
6 fois la racine 22	132
Somme ou cube de 23	12167

286. *Extraction de la racine cubique par des additions successives.* En s'appuyant sur ce qui a été dit aux deux numéros précédents, on peut, comme pour la racine carrée (283), extraire la racine cubique au moyen d'additions successives.

Soit, par exemple, à extraire la racine cubique, à moins d'un millième, du nombre 97 062,526 89. L'opération se ramène (280, 2°, 2° cas) à extraire la racine cubique, à moins d'une unité, du nombre 97 062 526 890 000, et à séparer 3 chiffres décimaux sur la droite du résultat.

La table donne, pour les 3 premiers chiffres à gauche de la racine, le nombre 459, dont le cube, qui est le plus grand cube entier contenu dans le nombre 97 062 526 formé par les 3 premières tranches à gauche du nombre dont on a été amené à extraire la racine, est 96 702 579.

Cela établi, on pose, en remarquant que la table donnant 210681 pour le carré de 459, trois fois le carré de 4590, c'est-à-dire la somme s' des termes de la progression, est $21\,068\,100 \times 3 = 63\,204\,300$.

Cube de 4590.	96702579000
Triple carré de la racine 4590	63204300
3 fois la racine 4590.	13770
L'unité.	1
Somme ou cube de 4591 (284).	96765797071
Différence entre ce cube et le précédent.	63218071
6 fois la racine 4591.	27546
Somme ou cube de 4592 (285).	96829042688
Différence entre ce cube et le précédent.	63245617
6 fois la racine 4592.	27552
Cube de 4593.	96892315857
Différence entre ce cube et le précédent.	63273169
6 fois la racine 4593.	27558
Cube de 4594.	96955616584
Différence entre ce cube et le précédent.	63300727
6 fois la racine 4594.	27564
Cube de 4595.	97018944875
Différence entre ce cube et le précédent.	63328291
6 fois la racine 4595.	27570
Cube de 4596.	97082300736

Ce dernier cube étant supérieur au nombre formé par les 4 premières tranches à gauche du nombre proposé, c'est celui de 4595 qui est le plus grand cube entier contenu dans ce nombre; donc 5 est le 4ᵉ chiffre.

Pour calculer le 5ᵉ chiffre, on opère comme pour le précédent; mais on remarque d'abord que, pour obtenir le triple carré de 45950, on pourra simplifier les calculs en décomposant ce nombre en 45900 et 50, et en posant (240) :

Carré de 45900, qui s'obtient en écrivant 4 zéros à la droite du carré de 459, que donne directement la table.	2106810000
$45900 \times 50 \times 2$.	4590000
Carré de 50.	2500
Somme de ces trois parties ou carré de 45950.	2111402500
Multipliant par 3, on a pour le triple carré.	6334207500

Cette manière de calculer le carré ou le triple carré d'un nombre formé en écrivant un et même plusieurs chiffres à la droite d'un autre nombre, dont on connaît le carré, peut souvent permettre d'abréger des calculs pénibles; c'est ce qui arrive, par exemple, dans l'extraction de la racine cubique, où l'on a besoin de calculer successivement le triple carré de la partie de racine obtenue (249 et 280).

Cela établi, on calculera le 5ᵉ chiffre cherché en formant le tableau suivant d'opérations :

Cube de 45950.	97 018 944 875 000
Triple carré de la racine 45950.	6 334 207 500
3 fois la racine 45950.	137 850
L'unité.	1
Cube de 45951.	97 025 279 220 351
Différence entre ce cube et le précédent.	6 334 345 351
6 fois la racine 45951.	275 706
Cube de 45952.	97 031 613 841 408
Différence.	6 334 621 057
6 fois la racine.	275 712
Cube de 45953.	97 037 948 738 177
Différence.	6 334 896 769
6 fois la racine.	275 718
Cube de 45954.	97 044 283 910 664
Différence.	6 335 172 487
6 fois la racine.	275 724
Cube de 45955.	97 050 619 358 875
Différence.	6 335 448 211
6 fois la racine.	275 730
Cube de 45956.	97 056 955 082 816

En continuant, on trouverait que le cube de 45 957 est plus grand que le nombre 97 062 526 890 000 formé par les 5 premières tranches; donc 6 est le 5e chiffre cherché, et, par suite, la racine demandée est 45,956. Quant au reste, on l'obtient en retranchant du nombre formé par toutes les tranches le plus grand cube trouvé qui y est contenu, et en séparant sur la droite de la différence trois fois plus de chiffres décimaux qu'il y en a à la racine. On trouve ainsi que, dans l'exemple qui nous occupe, le reste est 5,571 807 184.

Quel que soit le nombre des chiffres, on les calculerait comme les chiffres 5 et 6 de l'exemple précédent.

Il est à remarquer que les opérations précédentes se réduisent à des additions; en effet, la différence de deux cubes consécutifs est égale à la somme des deux nombres écrits entre ces cubes, et 6 fois la racine s'obtient en ajoutant simplement 6 au dernier de ces deux nombres.

MOYENS D'ABRÉGER LES CALCULS RELATIFS A L'EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE ET DE LA RACINE CUBIQUE.

287. Pour extraire la racine $m^{ième}$ d'un nombre entier A avec une erreur moindre que l'unité, il suffit de connaître plus de la $m^{ième}$ partie du nombre des chiffres de A, à partir de la gauche; c'est plus de la moitié pour la racine carrée, et plus du tiers pour la racine cubique.

Comme l'erreur tend à diminuer la racine, puisqu'on a diminué le nombre dont on l'extrait, il en résulte que pour extraire la racine $m^{ième}$, à moins d'une unité, d'un nombre entier composé de n chiffres, il suffit de prendre sur la gauche de ce nombre au moins $\frac{n+1}{m}$ chiffres, et de remplacer tous les autres par des zéros; puis d'extraire du nom-

bre qui en résulte la racine $m^{ième}$, approchée par excès à moins d'une unité. Ainsi :

1° La racine carrée 274, approchée par excès à moins d'une unité, du nombre 74600, est la racine carrée, à moins d'une unité, du nombre 74673, et en général de tous les nombres entiers de 5 chiffres dont les 3 premiers à gauche forment le nombre 746. De même, la racine carrée 88742, approchée par excès à moins d'une unité, du nombre 7875120000 est la racine carrée, à moins d'une unité, du nombre 7875127400 (279).

2° La racine cubique 460, approchée par excès à moins d'une unité, du nombre 97000000, est la racine cubique, à moins d'une unité, du nombre 97062526. De même, la racine cubique 45957, approchée par excès à moins d'une unité, du nombre 97062000000000, est la racine cubique, à moins d'une unité, du nombre 97062526893127 (280).

Remarque 1re. Ce qui précède est encore applicable à l'extraction de la racine carrée, de la racine cubique et en général d'une racine $m^{ième}$ d'un nombre, à moins d'une unité décimale d'un ordre déterminée (261, 263, 279 et 280). Ainsi :

1° La racine carrée 2,74, approchée par excès à moins d'un centième, du nombre 7,4600, est la racine carrée, à moins d'un centième, du nombre 7,467342.

2° La racine cubique 45,957, approchée par excès à moins d'un millième, du nombre 97062,000000000, est la racine cubique, à moins d'un millième, du nombre 97062,52689.

Remarque 2. De ce qui précède, il résulte que quand on sera obligé de calculer le nombre dont on aura à extraire une racine, comme, par exemple, lorsqu'il s'agira d'extraire une racine d'une fraction (261 et 263), on pourra ne calculer que le nombre convenable des premiers chiffres à gauche de ce nombre.

288 Lorsqu'en extrayant la racine carrée, à moins d'une unité, d'un nombre entier, on a obtenu plus de la moitié des chiffres de cette racine, on peut obtenir tous les autres en divisant simplement le nombre proposé moins le carré de la partie de racine obtenue, c'est-à-dire le nombre formé par le dernier reste obtenu suivi des tranches sur lesquelles on n'a pas encore opéré, par le double de la partie de racine obtenue.

Ainsi dans l'exemple de la page 79, ayant calculé, soit par la règle générale, soit au moyen de la table, les trois premiers chiffres à gauche de la racine, les deux chiffres suivants de la racine seront donnés, comme le montre l'opération suivante, par le quotient de la division du nombre 7437437, obtenu en écrivant à la droite du dernier reste 743 les tranches sur lesquelles on n'a pas encore opéré, par le double 177400 de la partie de racine obtenue 88700 :

7437437	177400
03414	41
164037	

La racine carrée, à moins d'une unité, ainsi obtenue, est exacte, ou pèche par défaut ou par excès, selon que le carré du quotient 41 est respectivement égal au reste 16 40 37 de la division, ou qu'il est plus petit ou plus grand que ce reste. Ainsi, dans l'exemple qui nous occupe, ayant 41^2 ou $16\,81 < 16\,40\,37$, la racine 8 87 41 pèche par défaut.

En appliquant simultanément cette règle et celle du numéro précédent, on est amené à faire la division suivante :

7 43 00 00	17 74 00
33 40	41
15 66 00	

qui donne encore, pour la racine carrée, à moins d'une unité par excès, 88 742.

289. Lorsqu'en extrayant la racine cubique, à moins d'une unité, d'un nombre entier, on a obtenu au moins la moitié plus un des chiffres de cette racine, on peut obtenir tous les autres en divisant simplement le nombre proposé moins le cube de la partie de racine obtenue, c'est-à-dire le nombre formé par le dernier reste obtenu suivi des tranches sur lesquelles on n'a pas encore opéré, par le triple carré de la partie de racine obtenue.

Ainsi, dans l'exemple de la page 81, ayant calculé, soit par la règle générale, soit au moyen de la table, les 4 premiers chiffres à gauche de la racine, le chiffre suivant (ce serait les 2 chiffres suivants si la racine devait avoir 6 chiffres) de la racine s'obtiendra, comme le montre l'opération suivante, en divisant le nombre 43 582 018 127 par le triple carré 6 334 207 500 de la partie de racine obtenue 45 950

43 582 018 127	6 334 207 500
5 576 773 127	6

La racine cubique, à moins d'une unité, ainsi obtenue, est exacte, ou pèche par défaut ou par excès, selon que le produit de la somme de 3 fois la partie de racine obtenue 45 950, et du quotient 6, par le carré de ce quotient, est respectivement égal au reste 5 576 773 127 de la division, ou qu'il est plus petit ou plus grand que ce reste. Ainsi, dans l'exemple qui nous occupe, ayant

$$(3 \times 45\,950 + 6) \times 6^2 = 4\,962\,816 < 5\,576\,773\,127,$$

la racine 45 956 pèche par défaut, à moins d'une unité.

En appliquant simultanément cette règle et celle du n° 287, on est amené d'abord à déterminer, soit par la règle générale, soit en s'aidant de la table, les 4 premiers chiffres 4595 à gauche de la racine du nombre 97 062 000 000 000, ce qui donne le reste 43 055 125 000; puis à faire la division suivante :

43 055 125 000	6 334 207 500
5 049 880 000	6

Ce qui donne encore, pour la racine cubique, à moins d'une unité par excès, 45 957.

Si la racine devait avoir 6 chiffres, après avoir déterminé les 4 premiers 4595, on aurait obtenu les deux autres par la marche précédente.

290. *Remarque.* Les règles des deux numéros précédents s'appliquent encore à l'extraction de la racine carrée et de la racine cubique, à moins d'une unité décimale d'un ordre déterminé, d'un nombre quelconque, préparé de manière qu'il contienne 2 ou 3 fois plus de chiffres décimaux qu'on n'en demande à la racine (287. *Remarques*).

291. *Table des carrés et des cubes des nombres entiers consécutifs de* 1 à 1000, *et des longueurs des circonférences et des surfaces des cercles dont les diamètres sont exprimés par les mêmes nombres entiers consécutifs de* 1 *à* 1000.

Racines ou diamèt.	Carrés.	Cubes.	Circonférences.	Cercles.	Racines ou diamèt.	Carrés.	Cubes.	Circonférences.
1	1	1	3.14	0.79	51	2601	132 651	160.22
2	4	8	6.28	3.14	52	2704	140 608	163.36
3	9	27	9.42	7.07	53	2809	148 877	166.50
4	16	64	12.57	12.57	54	2916	157 464	169.65
5	25	125	15.71	19.63	55	3025	166 375	172.79
6	36	216	18.85	28.27	56	3136	175 616	175.93
7	49	343	21.99	38.48	57	3249	185 193	179.07
8	64	512	25.13	50.27	58	3364	195 112	182.21
9	81	729	28.27	63.62	59	3481	205 379	185.35
10	100	1 000	31.42	78.54	60	3600	216 000	188.50
11	121	1 331	34.56	95.03	61	3721	226 981	191.64
12	144	1 728	37.70	113.10	62	3844	238 328	194.78
13	169	2 197	40.84	132.73	63	3969	250 047	197.92
14	196	2 744	43.98	153.94	64	4096	262 144	201.06
15	225	3 375	47.12	176.71	65	4225	274 625	204.20
16	256	4 096	50.27	201.06	66	4356	287 496	207.35
17	289	4 913	53.41	226.98	67	4489	300 763	210.49
18	324	5 832	56.55	254.47	68	4624	314 432	213.63
19	361	6 859	59.69	283.53	69	4761	328 509	216.77
20	400	8 000	62.83	314.16	70	4900	343 000	219.91
21	441	9 261	65.97	346.36	71	5041.	357 911	223.05
22	484	10 648	69.12	380.13	72	5184	373 248	226.19
23	529	12 167	72.26	415.48	73	5329	389 017	229.34
24	576	13 824	75.40	452.39	74	5476	405 224	232.48
25	625	15 625	78.54	490.87	75	5625	421 875	235.62
26	676	17 576	81.68	530.93	76	5776	438 976	238.76
27	729	19 683	84.82	572.56	77	5929	456 533	241.90
28	784	21 952	87.96	615.75	78	6084	474 552	245.04
29	841	24 389	91.11	660.52	79	6241	493 039	248.19
30	900	27 000	94.25	706.86	80	6400	512 000	251.33
31	961	29 791	97.39	754.77	81	6561	531 441	254.47
32	1024	32 768	100.53	804.25	82	6724	551 368	257.61
33	1089	35 937	103.67	855.30	83	6889	571 787	260.75
34	1156	39 304	106.81	907.92	84	7056	592 704	263.89
35	1225	42 875	109.96	962.11	85	7225	614 125	267.04
36	1296	46 656	113.10	1017.88	86	7396	636 056	270.18
37	1369	50 653	116.24	1075.21	87	7569	658 503	273.32
38	1444	54 872	119.38	1134.11	88	7744	681 472	276.46
39	1521	59 319	122.52	1194.59	89	7921	704 969	279.60
40	1600	64 000	125.66	1256.64	90	8100	729 000	282.74
41	1681	68 921	128.81	1320.25	91	8281	753 571	285.88
42	1764	74 088	131.95	1385.44	92	8464	778 688	289.03
43	1849	79 507	135.09	1452.20	93	8649	804 357	292.17
44	1936	85 184	138.23	1520.53	94	8836	830 584	295.31
45	2025	91 125	141.37	1590.43	95	9025	857 375	298.45
46	2116	97 336	144.51	1661.90	96	9216	884 736	301.59
47	2209	103 823	147.65	1734.94	97	9409	912 673	304.73
48	2304	110 592	150.80	1809.56	98	9604	941 192	307.88
49	2401	117 649	153.94	1885.74	99	9801	970 299	311.02
50	2500	125 000	157.08	1963.50	100	10000	1 000 000	314.16

50 100

Racines ou diamèt.	Carrés.	Cubes.	Circonférences.	Cercles.	Racines ou diamèt.	Carrés.	Cubes.	Circonférences.	Cercles.
101	10201	1 030 301	317.30	8011.85	151	22801	3 442 951	474.38	17908
102	10404	1 061 208	320.44	8171.28	152	23104	3 511 808	477.52	18146
103	10609	1 092 727	323.58	8332.29	153	23409	3 581 577	480.66	18385
104	10816	1 124 864	326.73	8494.87	154	23716	3 652 264	483.81	18627
105	11025	1 157 625	329.87	8659.01	155	24025	3 723 875	486.95	18869
106	11236	1 191 016	333.01	8824.73	156	24336	3 796 416	490.09	19113
107	11449	1 225 043	336.15	8992.02	157	24649	3 869 893	493.23	19359
108	11664	1 259 712	339.29	9160.88	158	24964	3 944 312	496.37	19607
109	11881	1 295 029	342.43	9331.32	159	25281	4 019 679	499.51	19856
110	12100	1 331 000	345.58	9503.32	160	25600	4 096 000	502.65	20106
111	12321	1 367 631	348.72	9676.89	161	25921	4 173 281	505.80	20358
112	12544	1 404 928	351.86	9852.03	162	26244	4 251 528	508.94	20612
113	12769	1 442 897	355.00	10028.75	163	26569	4 330 747	512.08	20867
114	12996	1 481 544	358.14	10207.03	164	26896	4 410 944	515.22	21124
115	13225	1 520 875	361.28	10386.89	165	27225	4 492 125	518.36	21382
116	13456	1 560 896	364.42	10568.32	166	27556	4 574 296	521.50	21642
117	13689	1 601 613	367.57	10751.32	167	27889	4 657 463	524.65	21904
118	13924	1 643 032	370.71	10935.88	168	28224	4 741 632	527.79	22167
119	14161	1 685 159	373.85	11122.02	169	28561	4 826 809	530.93	22432
120	14400	1 728 000	376.99	11309.73	170	28900	4 913 000	534.07	22698
121	14641	1 771 561	380.13	11499.01	171	29241	5 000 211	537.21	22966
122	14884	1 815 848	383.27	11689.87	172	29584	5 088 448	540.35	23235
123	15129	1 860 867	386.42	11882.29	173	29929	5 177 717	543.50	23506
124	15376	1 906 624	389.56	12076.28	174	30276	5 268 024	546.64	23779
125	15625	1 953 125	392.70	12271.85	175	30625	5 359 375	549.78	24053
126	15876	2 000 376	395.84	12468.98	176	30976	5 451 776	552.92	24328
127	16129	2 048 383	398.98	12667.69	177	31329	5 545 233	556.06	24606
128	16384	2 097 152	402.12	12867.96	178	31684	5 639 752	559.20	24885
129	16641	2 146 689	405.27	13069.81	179	32041	5 735 339	562.35	25165
130	16900	2 197 000	408.41	13273.23	180	32400	5 832 000	565.49	25447
131	17161	2 248 091	411.55	13478.22	181	32761	5 929 741	568.63	25730
132	17424	2 299 968	414.69	13684.78	182	33124	6 028 568	571.77	26016
133	17689	2 352 637	417.83	13892.91	183	33489	6 128 487	574.91	26302
134	17956	2 406 104	420.97	14102.61	184	33856	6 229 504	578.05	26590
135	18225	2 460 375	424.12	14313.88	185	34225	6 331 625	581.19	26880
136	18496	2 515 456	427.26	14526.72	186	34596	6 434 856	584.34	27172
137	18769	2 571 353	430.40	14741.14	187	34969	6 539 203	587.48	27465
138	19044	2 628 072	433.54	14957.12	188	35344	6 644 672	590.62	27759
139	19321	2 685 619	436.68	15174.68	189	35721	6 751 269	593.76	28055
140	19600	2 744 000	439.82	15393.80	190	36100	6 859 000	596.90	28353
141	19881	2 803 221	442.96	15614.50	191	36481	6 967 871	600.04	28652
142	20164	2 863 288	446.11	15836.77	192	36864	7 077 888	603.19	28953
143	20449	2 924 207	449.25	16060.61	193	37249	7 189 057	606.33	29255
144	20736	2 985 984	452.39	16286.02	194	37636	7 301 384	609.47	29559
145	21025	3 048 625	455.53	16513.00	195	38025	7 414 875	612.61	29865
146	21316	3 112 136	458.67	16741.55	196	38416	7 529 536	615.75	30172
147	21609	3 176 523	461.81	16971.67	197	38809	7 645 373	618.89	30481
148	21904	3 241 792	464.96	17203.36	198	39204	7 762 392	622.04	30791
149	22201	3 307 949	468.10	17436.62	199	39601	7 880 599	625.18	31103
150	22500	3 375 000	471.24	17671.46	200	40000	8 000 000	628.32	31416

150 200

Racines ou diamèt.	Carrés.	Cubes.	Circonférences.	Cercles.	Racines ou diamèt.	Carrés.	Cubes.	Circonférences.	Cercles.
201	40401	8120601	631.46	31731	251	63001	15813251	788.54	49481
202	40804	8242408	634.60	32047	252	63504	16003008	791.68	49876
203	41209	8365427	637.74	32365	253	64009	16194277	794.82	50273
204	41616	8489664	640.88	32685	254	64516	16387064	797.96	50671
205	42025	8615125	644.03	33006	255	65025	16581375	801.11	51071
206	42436	8741816	647.17	33329	256	65536	16777216	804.25	51472
207	42849	8869743	650.31	33654	257	66049	16974593	807.39	51875
208	43264	8998912	653.45	33979	258	66564	17173512	810.53	52279
209	43681	9129329	656.59	34307	259	67081	17373979	813.67	52685
210	44100	9261000	659.73	34636	260	67600	17576000	816.81	53093
211	44521	9393931	662.88	34967	261	68121	17779581	819.96	53502
212	44944	9528128	666.02	35299	262	68644	17984728	823.10	53913
213	45369	9663597	669.16	35633	263	69169	18191447	826.24	54325
214	45796	9800344	672.30	35968	264	69696	18399744	829.38	54739
215	46225	9938375	675.44	36305	265	70225	18609625	832.52	55155
216	46656	10077696	678.58	36644	266	70756	18821096	835.66	55572
217	47089	10218313	681.73	36984	267	71289	19034163	838.81	55990
218	47524	10360232	684.87	37325	268	71824	19248832	841.95	56410
219	47961	10503459	688.01	37668	269	72361	19465109	845.09	56832
220	48400	10648000	691.15	38013	270	72900	19683000	848.23	57256
221	48841	10793861	694.29	38360	271	73441	19902511	851.37	57680
222	49284	10941048	697.43	38708	272	73984	20123648	854.51	58107
223	49729	11089567	700.58	39057	273	74529	20346417	857.65	58535
224	50176	11239424	703.72	39408	274	75076	20570824	860.80	58965
225	50625	11390625	706.86	39761	275	75625	20796875	863.94	59396
226	51076	11543176	710.00	40115	276	76176	21024576	867.08	59828
227	51529	11697083	713.14	40471	277	76729	21253933	870.22	60263
228	51984	11852352	716.28	40828	278	77284	21484952	873.36	60699
229	52441	12008989	719.42	41187	279	77841	21717639	876.50	61136
230	52900	12167000	722.57	41548	280	78400	21952000	879.65	61575
231	53361	12326391	725.71	41910	281	78961	22188041	882.79	62016
232	53824	12487168	728.85	42273	282	79524	22425768	885.93	62458
233	54289	12649337	731.99	42638	283	80089	22665187	889.07	62902
234	54756	12812904	735.13	43005	284	80656	22906304	892.21	63347
235	55225	12977875	738.27	43374	285	81225	23149125	895.35	63794
236	55696	13144256	741.42	43744	286	81796	23393656	898.50	64242
237	56169	13312053	744.56	44115	287	82369	23639903	901.64	64692
238	56644	13481272	747.70	44488	288	82944	23887872	904.78	65144
239	57121	13651919	750.84	44863	289	83521	24137569	907.92	65597
240	57600	13824000	753.98	45239	290	84100	24389000	911.06	66052
241	58081	13997521	757.12	45617	291	84681	24642171	914.20	66508
242	58564	14172488	760.27	45996	292	85264	24897088	917.35	66966
243	59049	14348907	763.41	46377	293	85849	25153757	920.49	67426
244	59536	14526784	766.55	46759	294	86436	25412184	923.63	67887
245	60025	14706125	769.69	47144	295	87025	25672375	926.77	68349
246	60516	14886936	772.83	47529	296	87616	25934336	929.91	68813
247	61009	15069223	775.97	47916	297	88209	26198073	933.05	69279
248	61504	15252992	779.12	48305	298	88804	26463592	936.19	69746
249	62001	15438249	782.26	48695	299	89401	26730899	939.34	70215
250	62500	15625000	785.40	49087	300	90000	27000000	942.48	70686

Racines ou diamèt.	Carrés.	Cubes.	Circonférences.	Cercles.	Racines ou diamèt.	Carrés.	Cubes.	Circonférences.	Cercles.
301	90601	27270901	945.62	71158	351	123201	43243551	1102.70	96762
302	91204	27543608	948.76	71631	352	123904	43614208	1105.84	97314
303	91809	27818127	951.90	72107	353	124609	43986977	1108.98	97868
304	92416	28094464	955.04	72583	354	125316	44361864	1112.12	98423
305	93025	28372625	958.19	73062	355	126025	44738875	1115.27	98980
306	93636	28652616	961.33	73542	356	126736	45118016	1118.41	99538
307	94249	28934443	964.47	74023	357	127449	45499293	1121.55	100098
308	94864	29218112	967.61	74506	358	128164	45882712	1124.69	100660
309	95481	29503629	970.75	74991	359	128881	46268279	1127.83	101223
310	96100	29791000	973.89	75477	360	129600	46656000	1130.97	101788
311	96721	30080231	977.04	75964	361	130321	47045881	1134.11	102354
312	97344	30371328	980.18	76454	362	131044	47437928	1137.26	102922
313	97969	30664297	983.32	76945	363	131769	47832147	1140.40	103491
314	98596	30959144	986.46	77437	364	132496	48228544	1143.54	104062
315	99225	31255875	989.60	77931	365	133225	48627125	1146.68	104635
316	99856	31554496	992.74	78427	366	133956	49027896	1149.82	105209
317	100489	31855013	995.88	78924	367	134689	49430863	1152.96	105784
318	101124	32157432	999.03	79423	368	135424	49836032	1156.11	106362
319	101761	32461759	1002.17	79923	369	136161	50243409	1159.25	106941
320	102400	32768000	1005.31	80425	370	136900	50653000	1162.39	107521
321	103041	33076161	1008.45	80928	371	137641	51064811	1165.53	108103
322	103684	33386248	1011.59	81433	372	138384	51478848	1168.67	108687
323	104329	33698267	1014.73	81940	373	139129	51895117	1171.81	109272
324	104976	34012224	1017.88	82448	374	139876	52313624	1174.96	109858
325	105625	34328125	1021.02	82958	375	140625	52734375	1178.10	110447
326	106276	34645976	1024.16	83469	376	141376	53157376	1181.24	111036
327	106929	34965783	1027.30	83982	377	142129	53582633	1184.38	111628
328	107584	35287552	1030.44	84496	378	142884	54010152	1187.52	112221
329	108241	35611289	1033.58	85012	379	143641	54439939	1190.66	112815
330	108900	35937000	1036.73	85530	380	144400	54872000	1193.81	113411
331	109561	36264691	1039.87	86049	381	145161	55306341	1196.95	114009
332	110224	36594368	1043.01	86570	382	145924	55742968	1200.09	114608
333	110889	36926037	1046.15	87092	383	146689	56181887	1203.23	115209
334	111556	37259704	1049.29	87616	384	147456	56623104	1206.37	115812
335	112225	37595375	1052.43	88141	385	148225	57066625	1209.51	116416
336	112896	37933056	1055.58	88668	386	148996	57512456	1212.65	117021
337	113569	38272753	1058.72	89197	387	149769	57960603	1215.80	117628
338	114244	38614472	1061.86	89727	388	150544	58411072	1218.94	118237
339	114921	38958219	1065.00	90259	389	151321	58863869	1222.08	118847
340	115600	39304000	1068.14	90792	390	152100	59319000	1225.22	119459
341	116281	39651821	1071.28	91327	391	152881	59776471	1228.36	120072
342	116964	40001688	1074.42	91863	392	153664	60236288	1231.50	120687
343	117649	40353607	1077.57	92401	393	154449	60698457	1234.65	121304
344	118336	40707584	1080.71	92941	394	155236	61162984	1237.79	121922
345	119025	41063625	1083.85	93482	395	156025	61629875	1240.93	122542
346	119716	41421736	1086.99	94025	396	156816	62099136	1244.07	123163
347	120409	41781923	1090.13	94569	397	157609	62570773	1247.21	123786
348	121104	42144192	1093.27	95115	398	158404	63044792	1250.35	124410
349	121801	42508549	1096.42	95662	399	159201	63521199	1253.50	125036
350	122500	42875000	1099.56	96211	400	160000	64000000	1256.64	125664

Racines ou diamèt.	Carrés.	Cubes.	Circon-férences.	Cercles.	Racines ou diamèt.	Carrés.	Cubes.	Circon-férences.	Cercles.
401	16 08 01	64 481 201	1259.78	126293	451	20 34 01	91 733 851	1416.86	159751
402	16 16 04	64 964 808	1262.92	126923	452	20 43 04	92 345 408	1420.00	160460
403	16 24 09	65 450 827	1266.06	127556	453	20 52 09	92 959 677	1423.14	161171
404	16 32 16	65 939 264	1269.20	128190	454	20 61 16	93 576 664	1426.28	161883
405	16 40 25	66 430 125	1272.35	128825	455	20 70 25	94 196 375	1429.42	162597
406	16 48 36	66 923 416	1275.49	129462	456	20 79 36	94 818 816	1432.57	163313
407	16 56 49	67 419 143	1278.63	130100	457	20 88 49	95 443 993	1435.71	164030
408	16 64 64	67 917 312	1281.77	130741	458	20 97 64	96 071 912	1438.85	164748
409	16 72 81	68 417 929	1284.91	131382	459	21 06 81	96 702 579	1441.99	165468
410	16 81 00	68 921 000	1288.05	132025	460	21 16 00	97 336 000	1445.13	166190
411	16 89 21	69 426 531	1291.19	132670	461	21 25 21	97 972 181	1448.27	166914
412	16 97 44	69 934 528	1294.34	133317	462	21 34 44	98 611 128	1451.42	167639
413	17 05 69	70 444 997	1297.48	133965	463	21 43 69	99 252 847	1454.56	168365
414	17 13 96	70 957 944	1300.62	134614	464	21 52 96	99 897 344	1457.70	169093
415	17 22 25	71 473 375	1303.76	135265	465	21 62 25	100 544 625	1460.84	169823
416	17 30 56	71 991 296	1306.90	135918	466	21 71 56	101 194 696	1463.98	170554
417	17 38 89	72 511 713	1310 04	136572	467	21 80 89	101 847 563	1467.12	171287
418	17 47 24	73 034 632	1313.19	137228	468	21 90 24	102 503 232	1470.27	172021
419	17 55 61	73 560 059	1316.33	137885	469	21 99 61	103 161 709	1473.41	172757
420	17 64 00	74 088 000	1319.47	138544	470	22 09 00	103 823 000	1476.55	173494
421	17 72 41	74 618 461	1322.61	139205	471	22 18 41	104 487 111	1479.69	174234
422	17 80 84	75 151 448	1325.75	139867	472	22 27 84	105 154 048	1482.83	174974
423	17 89 29	75 686 967	1328.89	140531	473	22 37 29	105 823 817	1485.97	175716
424	17 97 76	76 225 024	1332.04	141196	474	22 46 76	106 496 424	1489.11	176460
425	18 06 25	76 765 625	1335.18	141863	475	22 56 25	107 171 875	1492.26	177205
426	18 14 76	77 308 776	1338.32	142531	476	22 65 76	107 850 176	1495.40	177952
427	18 23 29	77 854 483	1341.46	143201	477	22 75 29	108 531 333	1498.54	178701
428	18 31 84	78 402 752	1344.60	143872	478	22 84 84	109 215 352	1501.68	179451
429	18 40 41	78 953 589	1347.74	144545	479	22 94 41	109 902 239	1504.82	180203
430	18 49 00	79 507 000	1350.88	145220	480	23 04 00	110 592 000	1507.96	180956
431	18 57 61	80 062 991	1354.03	145896	481	23 13 61	111 284 641	1511.11	181711
432	18 66 24	80 621 568	1357.17	146574	482	23 23 24	111 980 168	1514.25	182467
433	18 74 89	81 182 737	1360.31	147254	483	23 32 89	112 678 587	1517.39	183225
434	18 83 56	81 746 504	1363.45	147934	484	23 42 56	113 379 904	1520.53	183984
435	18 92 25	82 312 875	1366.59	148617	485	23 52 25	114 084 125	1523.67	184745
436	19 00 96	82 881 856	1369.73	149301	486	23 61 96	114 791 256	1526.81	185508
437	19 09 69	83 453 453	1372.88	149987	487	23 71 69	115 501 303	1529.96	186272
438	19 18 44	84 027 672	1376.02	150674	488	23 81 44	116 214 272	1533 10	187038
439	19 27 21	84 604 519	1379.16	151363	489	23 91 21	116 930 169	1536.24	187805
440	19 36 00	85 184 000	1382.30	152053	490	24 01 00	117 649 000	1539.38	188574
441	19 44 81	85 766 121	1385.44	152745	491	24 10 81	118 370 771	1542.52	189345
442	19 53 64	86 350 888	1388.58	153439	492	24 20 64	119 095 488	1545.66	190117
443	19 62 49	86 938 307	1391.73	154134	493	24 30 49	119 823 157	1548 81	190890
444	19 71 36	87 528 384	1394.87	154830	494	24 40 36	120 553 784	1551.95	191665
445	19 80 25	88 121 125	1398.01	155528	495	24 50 25	121 287 375	1555.09	192442
446	19 89 16	88 716 536	1401.15	156228	496	24 60 16	122 023 936	1558.23	193221
447	19 98 09	89 314 623	1404 29	156930	497	24 70 09	122 763 473	1561.37	194000
448	20 07 04	89 915 392	1407 43	157633	498	24 80 04	123 505 992	1564.51	194782
449	20 16 01	90 518 849	1410.58	158337	499	24 90 01	124 251 499	1567.65	195565
450	20 25 00	91 125 000	1413.72	159043	500	25 00 00	125 000 000	1570.80	196350

Racines ou diamèt.	Carrés.	Cubes.	Circonférences.	Cercles.	Racines ou diamèt.	Carrés.	Cubes.	Circonférences.	Cercles.
501	25 10 01	125 751 501	1573.94	197136	551	30 36 01	167 284 151	1731.02	238448
502	25 20 04	126 506 008	1577.08	197923	552	30 47 04	168 196 608	1734.16	239314
503	25 30 09	127 263 527	1580.22	198713	553	30 58 09	169 112 377	1737.30	240182
504	25 40 16	128 024 064	1583.36	199504	554	30 69 16	170 031 464	1740.44	241051
505	25 50 25	128 787 625	1586.50	200296	555	30 80 25	170 953 875	1743.58	241922
506	25 60 36	129 554 216	1589.65	201090	556	30 91 36	171 879 616	1746.73	242795
507	25 70 49	130 323 843	1592.79	201886	557	31 02 49	172 808 693	1749.87	243669
508	25 80 64	131 096 512	1595.93	202683	558	31 13 64	173 741 112	1753.01	244545
509	25 90 81	131 872 229	1599.07	203482	559	31 24 81	174 676 879	1756.15	245422
510	26 01 00	132 651 000	1602.21	204282	560	31 36 00	175 616 000	1759.29	246301
511	26 11 21	133 432 831	1605.35	205084	561	31 47 21	176 558 481	1762.43	247181
512	26 21 44	134 217 728	1608.50	205887	562	31 58 44	177 504 328	1765.58	248063
513	26 31 69	135 005 697	1611.64	206692	563	31 69 69	178 453 547	1768.72	248947
514	26 41 96	135 796 744	1614.78	207499	564	31 80 96	179 406 144	1771.86	249832
515	26 52 25	136 590 875	1617.92	208307	565	31 92 25	180 362 125	1775.00	250719
516	26 62 56	137 388 096	1621.06	209117	566	32 03 56	181 321 496	1778.14	251607
517	26 72 89	138 188 413	1624.20	209928	567	32 14 89	182 284 263	1781.28	252497
518	26 83 24	138 991 832	1627.34	210741	568	32 26 24	183 250 432	1784.42	253388
519	26 93 61	139 798 359	1630.49	211556	569	32 37 61	184 220 009	1787.57	254281
520	27 04 00	140 608 000	1633.63	212372	570	32 49 00	185 193 000	1790.71	255176
521	27 14 41	141 420 761	1636.77	213189	571	32 60 41	186 169 411	1793.85	256072
522	27 24 84	142 236 648	1639.91	214008	572	32 71 84	187 149 248	1796.99	256970
523	27 35 29	143 055 667	1643.05	214829	573	32 83 29	188 132 517	1800.13	257869
524	27 45 76	143 877 824	1646.19	215651	574	32 94 76	189 119 224	1803.27	258770
525	27 56 25	144 703 125	1649.34	216475	575	33 06 25	190 109 375	1806.42	259672
526	27 66 76	145 531 576	1652.48	217301	576	33 17 76	191 102 976	1809.56	260576
527	27 77 29	146 363 183	1655.62	218128	577	33 29 29	192 100 033	1812.70	261482
528	27 87 84	147 197 952	1658.76	218956	578	33 40 84	193 100 552	1815.84	262389
529	27 98 41	148 035 889	1661.90	219787	579	33 52 41	194 104 539	1818.98	263298
530	28 09 00	148 877 000	1665.04	220618	580	33 64 00	195 112 000	1822.12	264208
531	28 19 61	149 721 291	1668.19	221452	581	33 75 61	196 122 941	1825.27	265120
532	28 30 24	150 568 768	1671.33	222287	582	33 87 24	197 137 368	1828.41	266033
533	28 40 89	151 419 437	1674.47	223123	583	33 98 89	198 155 287	1831.55	266948
534	28 51 56	152 273 304	1677.61	223961	584	34 10 56	199 176 704	1834.69	267865
535	28 62 25	153 130 375	1680.75	224801	585	34 22 25	200 201 625	1837.83	268783
536	28 72 96	153 990 656	1683.89	225642	586	34 33 96	201 230 056	1840.97	269703
537	28 83 69	154 854 153	1687.04	226484	587	34 45 69	202 262 003	1844.11	270624
538	28 94 44	155 720 872	1690.18	227329	588	34 57 44	203 297 472	1847.26	271547
539	29 05 21	156 590 819	1693.32	228175	589	34 69 21	204 336 469	1850.40	272471
540	29 16 00	157 464 000	1696.46	229022	590	34 81 00	205 379 000	1853.54	273397
541	29 26 81	158 340 421	1699.60	229871	591	34 92 81	206 425 071	1856.68	274325
542	29 37 64	159 220 088	1702.74	230722	592	35 04 64	207 474 688	1859.82	275254
543	29 48 49	160 103 007	1705.88	231574	593	35 16 49	208 527 857	1862.96	276184
544	29 59 36	160 989 184	1709.03	232428	594	35 28 36	209 584 584	1866.11	277117
545	29 70 25	161 878 625	1712.17	233283	595	35 40 25	210 644 875	1869.25	278051
546	29 81 16	162 771 336	1715.31	234140	596	35 52 16	211 708 736	1872.39	278986
547	29 92 09	163 667 323	1718.45	234998	597	35 64 09	212 776 173	1875.53	279923
548	30 03 04	164 566 592	1721.59	235858	598	35 76 04	213 847 192	1878.67	280862
549	30 14 01	165 469 149	1724.73	236720	599	35 88 01	214 921 799	1881.81	281802
550	30 25 00	166 375 000	1727.88	237583	600	36 00 00	216 000 000	1884.96	282743

Racines ou diamèt.	Carrés.	Cubes.	Circonférences.	Cercles.	Racines ou diamèt.	Carrés.	Cubes.	Circonférences.	Cercles.
601	36 12 01	217 081 801	1888.10	283687	651	42 38 01	275 894 451	2045.18	332853
602	36 24 04	218 167 208	1891.24	284631	652	42 51 04	277 167 808	2048.32	333876
603	36 36 09	219 256 227	1894.38	285578	653	42 64 09	278 445 077	2051.46	334901
604	36 48 16	220 348 864	1897.52	286526	654	42 77 16	279 726 264	2054.60	335927
605	36 60 25	221 445 125	1900.66	287475	655	42 90 25	281 011 375	2057.74	336955
606	36 72 36	222 545 016	1903.81	288426	656	43 03 36	282 300 416	2060.88	337985
607	36 84 49	223 648 543	1906.95	289379	657	43 16 49	283 593 393	2064.03	339016
608	36 96 64	224 755 712	1910.09	290333	658	43 29 64	284 890 312	2067.17	340049
609	37 08 81	225 866 529	1913.23	291289	659	43 42 81	286 191 179	2070.31	341084
610	37 21 00	226 981 000	1916.37	292247	660	43 56 00	287 496 000	2073.45	342119
611	37 33 21	228 099 131	1919.51	293200	661	43 69 21	288 804 781	2076.59	343157
612	37 45 44	229 220 928	1922.65	294166	662	43 82 44	290 117 528	2079.73	344196
613	37 57 69	230 346 397	1925.80	295128	663	43 95 69	291 434 247	2082.88	345237
614	37 69 96	231 475 544	1928.94	296092	664	44 08 96	292 754 944	2086.02	346279
615	37 82 25	232 608 375	1932.08	297057	665	44 22 25	294 079 625	2089.16	347323
616	37 94 56	233 744 896	1935.22	298024	666	44 35 56	295 408 296	2092.30	348368
617	38 06 89	234 885 113	1938.36	298992	667	44 48 89	296 740 963	2095.44	349415
618	38 19 24	236 029 032	1941.50	299962	668	44 62 24	298 077 632	2098.58	350464
619	38 31 61	237 176 659	1944.65	300934	669	44 75 61	299 418 309	2101.73	351514
620	38 44 00	238 328 000	1947.79	301907	670	44 89 00	300 763 000	2104.87	352565
621	38 56 41	239 483 061	1950.93	302882	671	45 02 41	302 111 711	2108.01	353618
622	38 68 84	240 641 848	1954.07	303858	672	45 15 84	303 464 448	2111.15	354673
623	38 81 29	241 804 367	1957.21	304836	673	45 29 29	304 821 217	2114.29	355730
624	38 93 76	242 970 624	1960.35	305815	674	45 42 76	306 182 024	2117.43	356788
625	39 06 25	244 140 625	1963.50	306796	675	45 56 25	307 546 875	2120.58	357847
626	39 18 76	245 314 376	1966.64	307779	676	45 69 76	308 915 776	2123.72	358908
627	39 31 29	246 491 883	1969.78	308763	677	45 83 29	310 288 733	2126.86	359971
628	39 43 84	247 673 152	1972.92	309748	678	45 96 84	311 665 752	2130.00	361035
629	39 56 41	248 858 189	1976.06	310736	679	46 10 41	313 046 839	2133.14	362101
630	39 69 00	250 047 000	1979.20	311725	680	46 24 00	314 432 000	2136.28	363168
631	39 81 61	251 239 591	1982.34	312715	681	46 37 61	315 821 241	2139.42	364237
632	39 94 24	252 435 968	1985.49	313707	682	46 51 24	317 214 568	2142.57	365308
633	40 06 89	253 636 137	1988.63	314700	683	46 64 89	318 611 987	2145.71	366380
634	40 19 56	254 840 104	1991.77	315696	684	46 78 56	320 013 504	2148.85	367453
635	40 32 25	256 047 875	1994.91	316692	685	46 92 25	321 419 125	2151.99	368528
636	40 44 96	257 259 456	1998.05	317690	686	47 05 96	322 828 856	2155.13	369605
637	40 57 69	258 474 853	2001.19	318690	687	47 19 69	324 242 703	2158.27	370684
638	40 70 44	259 694 072	2004.34	319692	688	47 33 44	325 660 672	2161.42	371764
639	40 83 21	260 917 119	2007.48	320695	689	47 47 21	327 082 769	2164.56	372845
640	40 96 00	262 144 000	2010.62	321699	690	47 61 00	328 509 000	2167.70	373928
641	41 08 81	263 374 721	2013.76	322705	691	47 74 81	329 939 371	2170.84	375013
642	41 21 64	264 609 288	2016.90	323713	692	47 88 64	331 373 888	2173.98	376099
643	41 34 49	265 847 707	2020.04	324722	693	48 02 49	332 812 557	2177.12	377187
644	41 47 36	267 089 984	2023.19	325733	694	48 16 36	334 255 384	2180.27	378276
645	41 60 25	268 336 125	2026.33	326745	695	48 30 25	335 702 375	2183.41	379367
646	41 73 16	269 586 136	2029.47	327759	696	48 44 16	337 153 536	2186.55	380459
647	41 86 09	270 840 023	2032.61	328775	697	48 58 09	338 608 873	2189.69	381554
648	41 99 04	272 097 792	2035.75	329792	698	48 72 04	340 068 392	2192.83	382649
649	42 12 01	273 359 449	2038.89	330810	699	48 86 01	341 532 099	2195.97	383746
650	42 25 00	274 625 000	2042.04	331831	700	49 00 00	343 000 000	2199.11	384845

Racines ou diamèt.	Carrés.	Cubes.	Circonférences.	Cercles.	Racines ou diamèt.	Carrés.	Cubes.	Circonférences.	Cercles.
701	49 14 01	344 472 101	2202.26	385945	751	56 40 01	423 564 751	2359.34	442965
702	49 28 04	345 948 408	2205.40	387047	752	56 55 04	425 259 008	2362.48	444146
703	49 42 09	347 428 927	2208.54	388151	753	56 70 09	426 957 777	2365.62	445328
704	49 56 16	348 913 664	2211.68	389256	754	56 85 16	428 661 064	2368.76	446511
705	49 70 25	350 402 625	2214.82	390363	755	57 00 25	430 368 875	2371.90	447697
706	49 84 36	351 895 816	2217.96	391471	756	57 15 36	432 081 216	2375.04	448883
707	49 98 49	353 393 243	2221.11	392580	757	57 30 49	433 798 093	2378.19	450072
708	50 12 64	354 894 912	2224.25	393692	758	57 45 64	435 519 512	2381.33	451262
709	50 26 81	356 400 829	2227.39	394805	759	57 60 81	437 245 479	2384.47	452453
710	50 41 00	357 911 000	2230.53	395919	760	57 76 00	438 976 000	2387.61	453646
711	50 55 21	359 425 431	2233.67	397035	761	57 91 21	440 711 081	2390.75	454841
712	50 69 44	360 944 128	2236.81	398153	762	58 06 44	442 450 728	2393.89	456037
713	50 83 69	362 467 097	2239.96	399272	763	58 21 69	444 194 947	2397.04	457234
714	50 97 96	363 994 344	2243.10	400393	764	58 36 96	445 943 744	2400.18	458434
715	51 12 25	365 525 875	2246.24	401515	765	58 52 25	447 697 125	2403.32	459635
716	51 26 56	367 061 696	2249.38	402639	766	58 67 56	449 455 096	2406.46	460837
717	51 40 89	368 601 813	2252.52	403765	767	58 82 89	451 217 663	2409.60	462041
718	51 55 24	370 146 232	2255.66	404892	768	58 98 24	452 984 832	2412.74	463247
719	51 69 61	371 694 959	2258.81	406020	769	59 13 61	454 756 609	2415.88	464454
720	51 84 00	373 248 000	2261.95	407150	770	59 29 00	456 533 000	2419.03	465663
721	51 98 41	374 805 361	2265.09	408282	771	59 44 41	458 314 011	2422.17	466873
722	52 12 84	376 367 048	2268.23	409416	772	59 59 84	460 099 648	2425.31	468085
723	52 27 29	377 933 067	2271.37	410550	773	59 75 29	461 889 917	2428.45	469298
724	52 41 76	379 503 424	2274.51	411687	774	59 90 76	463 684 824	2431.59	470513
725	52 56 25	381 078 125	2277.65	412825	775	60 06 25	465 484 375	2434.73	471730
726	52 70 76	382 657 176	2280.80	413965	776	60 21 76	467 288 576	2437.88	472948
727	52 85 29	384 240 583	2283.94	415106	777	60 37 29	469 097 433	2441.02	474168
728	52 99 84	385 828 352	2287.08	416248	778	60 52 84	470 910 952	2444.16	475389
729	53 14 41	387 420 489	2290.22	417393	779	60 68 41	472 729 139	2447.30	476612
730	53 29 00	389 017 000	2293.36	418539	780	60 84 00	474 552 000	2450.44	477836
731	53 43 61	390 617 891	2296.50	419686	781	60 99 61	476 379 541	2453.58	479062
732	53 58 24	392 223 168	2299.65	420835	782	61 15 24	478 211 768	2456.73	480290
733	53 72 89	393 832 837	2302.79	421986	783	61 30 89	480 048 687	2459.87	481519
734	53 87 56	395 446 904	2305.93	423138	784	61 46 56	481 890 304	2463.01	482750
735	54 02 25	397 065 375	2309.07	424292	785	61 62 25	483 736 625	2466.15	483982
736	54 16 96	398 688 256	2312.21	425447	786	61 77 96	485 587 656	2469.29	485216
737	54 31 69	400 315 553	2315.35	426604	787	61 93 69	487 443 403	2472.43	486451
738	54 46 44	401 947 272	2318.50	427762	788	62 09 44	489 303 872	2475.58	487688
739	54 61 21	403 583 419	2321.64	428922	789	62 25 21	491 169 069	2478.72	488927
740	54 76 00	405 224 000	2324.78	430084	790	62 41 00	493 039 000	2481.86	490167
741	54 90 81	406 869 021	2327.92	431247	791	62 56 81	494 913 671	2485.00	491409
742	55 05 64	408 518 488	2331.06	432412	792	62 72 64	496 793 088	2488.14	492652
743	55 20 49	410 172 407	2334.20	433578	793	62 88 49	498 677 257	2491.28	493897
744	55 35 36	411 830 784	2337.34	434746	794	63 04 36	500 566 184	2494.42	495143
745	55 50 25	413 493 625	2340.49	435916	795	63 20 25	502 459 875	2497.57	496391
746	55 65 16	415 160 936	2343.63	437087	796	63 36 16	504 358 336	2500.71	497641
747	55 80 09	416 832 723	2346.77	438259	797	63 52 09	506 261 573	2503.85	498892
748	55 95 04	418 508 992	2349.91	439433	798	63 68 04	508 169 592	2506.99	500145
749	56 10 01	420 189 749	2353.05	440609	799	63 84 01	510 082 399	2510.13	501399
750	56 25 00	421 875 000	2356.19	441786	800	64 00 00	512 000 000	2513.27	502655

750 800



Racines ou diamèt.	Carrés.	Cubes.	Circonférences.	Cercles.	Racines ou diamèt.	Carrés.	Cubes.	Circonférences.	Cercles.
801	64 16 01	513 922 401	2516.42	503912	851	72 42 01	616 295 051	2673.50	568786
802	64 32 04	515 849 608	2519.56	505171	852	72 59 04	618 470 208	2676.64	570124
803	64 48 09	517 781 627	2522.70	506432	853	72 76 09	620 650 477	2679.78	571463
804	64 64 16	519 718 464	2525.84	507694	854	72 93 16	622 835 864	2682.92	572803
805	64 80 25	521 660 125	2528.98	508958	855	73 10 25	625 026 375	2686.06	574146
806	64 96 36	523 606 616	2532.12	510223	856	73 27 36	627 222 016	2689.20	575490
807	65 12 49	525 557 943	2535.27	511490	857	73 44 49	629 422 793	2692.34	576835
808	65 28 64	527 514 112	2538.41	512758	858	73 61 64	631 628 712	2695.49	578182
809	65 44 81	529 475 129	2541.55	514028	859	73 78 81	633 839 779	2698.63	579530
810	65 61 00	531 441 000	2544.69	515300	860	73 96 00	636 056 000	2701.77	580880
811	65 77 21	533 411 731	2547.83	516573	861	74 13 21	638 277 381	2704.91	582232
812	65 93 44	535 387 328	2550.97	517848	862	74 30 44	640 503 928	2708.05	583585
813	66 09 69	537 367 797	2554.11	519124	863	74 47 69	642 735 647	2711.19	584940
814	66 25 96	539 353 144	2557.26	520402	864	74 64 96	644 972 544	2714.34	586297
815	66 42 25	541 343 375	2560.40	521681	865	74 82 25	647 214 625	2717.48	587655
816	66 58 56	543 338 496	2563.54	522962	866	74 99 56	649 461 896	2720.62	589014
817	66 74 89	545 338 513	2566.68	524245	867	75 16 89	651 714 363	2723.76	590375
818	66 91 24	547 343 432	2569.82	525529	868	75 34 24	653 972 032	2726.90	591738
819	67 07 61	549 353 259	2572.96	526814	869	75 51 61	656 234 909	2730.04	593102
820	67 24 00	551 368 000	2576.11	528102	870	75 69 00	658 503 000	2733.19	594468
821	67 40 41	553 387 661	2579.25	529391	871	75 86 41	660 776 311	2736.33	595835
822	67 56 84	555 412 248	2582.39	530681	872	76 03 84	663 054 848	2739.47	597204
823	67 73 29	557 441 767	2585.53	531973	873	76 21 29	665 338 617	2742.61	598575
824	67 89 76	559 476 224	2588.67	533267	874	76 38 76	667 627 624	2745.75	599947
825	68 06 25	561 515 625	2591.81	534562	875	76 56 25	669 921 875	2748.89	601320
826	68 22 76	563 559 976	2594.96	535858	876	76 73 76	672 221 376	2752.04	602696
827	68 39 29	565 609 283	2598.10	537157	877	76 91 29	674 526 133	2755.18	604073
828	68 55 84	567 663 552	2601.24	538456	878	77 08 84	676 836 152	2758.32	605451
829	68 72 41	569 722 789	2604.38	539758	879	77 26 41	679 151 439	2761.46	606831
830	68 89 00	571 787 000	2607.52	541061	880	77 44 00	681 472 000	2764 60	608212
831	69 05 61	573 856 191	2610.66	542365	881	77 61 61	683 797 841	2767.74	609595
832	69 22 24	575 930 368	2613.81	543671	882	77 79 24	686 128 968	2770.88	610980
833	69 38 89	578 009 537	2616.95	544979	883	77 96 89	688 465 387	2774.03	612366
834	69 55 56	580 093 704	2620.09	546288	884	78 14 56	690 807 104	2777.17	613754
835	69 72 25	582 182 875	2623.23	547599	885	78 32 25	693 154 125	2780.31	615143
836	69 88 96	584 277 056	2626.37	548912	886	78 49 96	695 506 456	2783.45	616534
837	70 05 69	586 376 253	2629.51	550226	887	78 67 69	697 864 103	2786.59	617927
838	70 22 44	588 480 472	2632.65	551541	888	78 85 44	700 227 072	2789 73	619321
839	70 39 21	590 589 719	2635.80	552858	889	79 03 21	702 595 369	2792.88	620717
840	70 56 00	592 704 000	2638.94	554177	890	79 21 00	704 969 000	2796.02	622114
841	70 72 81	594 823 321	2642.08	555497	891	79 38 81	707 347 971	2799.16	623513
842	70 89 64	596 947 688	2645.22	556819	892	79 56 64	709 732 288	2802.30	624913
843	71 06 49	599 077 107	2648.36	558142	893	79 74 49	712 121 957	2805.44	626315
844	71 23 36	601 211 584	2651.50	559467	894	79 92 36	714 516 984	2808.58	627718
845	71 40 25	603 351 125	2654.65	560794	895	80 10 25	716 917 375	2811.73	629124
846	71 57 16	605 495 736	2657.79	562122	896	80 28 16	719 323 136	2814.87	630530
847	71 74 09	607 645 423	2660.93	563452	897	80 46 09	721 734 273	2818.01	631938
848	71 91 04	609 800 192	2664.07	564783	898	80 64 04	724 150 792	2821.15	633348
849	72 08 01	611 960 049	2667.21	566116	899	80 82 01	726 572 699	2824.29	634760
850	72 25 00	614 125 000	2670.35	567450	900	81 00 00	729 000 000	2827.43	636173

Racines ou diamèt.	Carrés.	Cubes.	Circonférences.	Cercles.	Racines ou diamèt.	Carrés.	Cubes.	Circonférences.	Cercles.
901	81 18 01	731 432 701	2830.57	637587	951	90 44 01	860 085 351	2987.65	710315
902	81 36 04	733 870 808	2833.72	639003	952	90 63 04	862 801 408	2990.80	711810
903	81 54 09	736 314 327	2836.86	640421	953	90 82 09	865 523 177	2993.94	713306
904	81 72 16	738 763 264	2840.00	641840	954	91 01 16	868 250 664	2997.08	714803
905	81 90 25	741 217 625	2843.14	643261	955	91 20 25	870 983 875	3000.22	716303
906	82 08 36	743 677 416	2846.28	644683	956	91 39 36	873 722 816	3003.36	717804
907	82 26 49	746 142 643	2849.42	646107	957	91 58 49	876 467 493	3006.50	719306
908	82 44 64	748 613 312	2852.57	647533	958	91 77 64	879 217 912	3009.65	720810
909	82 62 81	751 089 429	2855.71	648960	959	91 96 81	881 974 079	3012.79	722316
910	82 81 00	753 571 000	2858.85	650338	960	92 16 00	884 736 000	3015.93	723823
911	82 99 21	756 058 031	2861.99	651818	961	92 35 21	887 503 681	3019.07	725332
912	83 17 44	758 550 528	2865.13	653250	962	92 54 44	890 277 128	3022.21	726842
913	83 35 69	761 048 497	2868.27	654684	963	92 73 69	893 056 347	3025.35	728354
914	83 53 96	763 551 944	2871.42	656118	964	92 92 96	895 841 344	3028.50	729867
915	83 72 25	766 060 875	2874.56	657555	965	93 12 25	898 632 125	3031.64	731382
916	83 90 56	768 575 296	2877.70	658993	966	93 31 56	901 428 696	3034.78	732899
917	84 08 89	771 095 213	2880.84	660433	967	93 50 89	904 231 063	3037.92	734417
918	84 27 24	773 620 632	2883.98	661874	968	93 70 24	907 039 232	3041.06	735937
919	84 45 61	776 151 559	2887.12	663317	969	93 89 61	909 853 209	3044.20	737458
920	84 64 00	778 688 000	2890.27	664761	970	94 09 00	912 673 000	3047.34	738981
921	84 82 41	781 229 961	2893.41	666207	971	94 28 41	915 498 611	3050.49	740506
922	85 00 84	783 777 448	2896.55	667654	972	94 47 84	918 330 048	3053.63	742032
923	85 19 29	786 330 467	2899.69	669103	973	94 67 29	921 167 317	3056.77	743559
924	85 37 76	788 889 024	2902.83	670554	974	94 86 76	924 010 424	3059.91	745088
925	85 56 25	791 453 125	2905.97	672006	975	95 06 25	926 859 375	3063.05	746619
926	85 74 76	794 022 776	2909.11	673460	976	95 25 76	929 714 176	3066.19	748151
927	85 93 29	796 597 983	2912.26	674915	977	95 45 29	932 574 833	3069.34	749685
928	86 11 84	799 178 752	2915.40	676372	978	95 64 84	935 441 352	3072.48	751221
929	86 30 41	801 765 089	2918.54	677831	979	95 84 41	938 313 739	3075.62	752758
930	86 49 00	804 357 000	2921.68	679291	980	96 04 00	941 192 000	3078.76	754296
931	86 67 61	806 954 491	2924.82	680753	981	96 23 61	944 076 141	3081.90	755837
932	86 86 24	809 557 568	2927.96	682216	982	96 43 24	946 966 168	3085.04	757378
933	87 04 89	812 166 237	2931.11	683680	983	96 62 89	949 862 087	3088.19	758922
934	87 23 56	814 780 504	2934.25	685147	984	96 82 56	952 763 904	3091.33	760466
935	87 42 25	817 400 375	2937.39	686615	985	97 02 25	955 671 625	3094.47	762013
936	87 60 96	820 025 856	2940.53	688084	986	97 21 96	958 585 256	3097.61	763561
937	87 79 69	822 656 953	2943.67	689555	987	97 41 69	961 504 803	3100.75	765111
938	87 98 44	825 293 672	2946.81	691028	988	97 61 44	964 430 272	3103.89	766662
939	88 17 21	827 936 019	2949.96	692502	989	97 81 21	967 361 669	3107.04	768214
940	88 36 00	830 584 000	2953.10	693978	990	98 01 00	970 299 000	3110.18	769769
941	88 54 81	833 237 621	2956.24	695455	991	98 20 81	973 242 271	3113.32	771325
942	88 73 64	835 896 888	2959.38	696934	992	98 40 64	976 191 488	3116.46	772882
943	88 92 49	838 561 807	2962.52	698415	993	98 60 49	979 146 657	3119.60	774441
944	89 11 36	841 232 384	2965.66	699897	994	98 80 36	982 107 784	3122.74	776002
945	89 30 25	843 908 625	2968.81	701380	995	99 00 25	985 074 875	3125.88	777564
946	89 49 16	846 590 536	2971.95	702865	996	99 20 16	988 047 936	3129.03	779128
947	89 68 09	849 278 123	2975.09	704352	997	99 40 09	991 026 973	3132.17	780693
948	89 87 04	851 971 392	2978.23	705840	998	99 60 04	994 011 992	3135.31	782260
949	90 06 01	854 670 349	2981.37	707330	999	99 80 01	997 002 999	3138.45	783828
950	90 25 00	857 375 000	2984.51	708822	1000	1 00 00 00	1 000 000 000	3141.59	785398

LIVRE V.

Rapports. Proportions. Progressions.

DÉFINITIONS.

292. On nomme *rapport* le résultat de la comparaison de deux quantités de même espèce. Cette comparaison se fait en prenant la différence des deux quantités ou en cherchant le quotient de l'une par l'autre.

Le *rapport arithmétique* ou *par différence* des deux quantités 18 et 6 est la différence 12 de ces quantités. On l'écrit

$$18 \cdot 6 \quad \text{ou} \quad 18 - 6,$$

et on l'énonce 18 *est à* 6 ou 18 *moins* 6.

Dans le cas où le second nombre est plus grand que le premier, la différence ou rapport s'affecte du signe —, qui indique une quantité qui n'a pu être retranchée (30). Ainsi

$$6 - 18 = -12.$$

Le *rapport géométrique* ou *par quotient* d'une quantité 18 à une autre 6 est le quotient 3 de la première par la seconde (205). On l'écrit

$$18 : 6 \quad \text{ou} \quad \frac{18}{6},$$

et on l'énonce 18 *est à* 6, ou 18 *divisé par* 6, ou encore *le rapport de 18 à 6*.

Remarque. Lorsqu'on emploie le mot *rapport* sans aucune indication, on entend toujours parler d'un rapport géométrique.

293. Dans les rapports arithmétique et géométrique précédents (292), 18 et 6 sont les deux *termes* du rapport; le premier terme 18 en est l'*antécédent*, et le deuxième 6 en est le *conséquent*.

294. Un rapport arithmétique étant la différence de deux quantités, les propriétés posées n°s 27, 33 et 60 se répètent ici. Ainsi, par exemple, *un rapport arithmétique ne change pas lorsqu'on augmente ou qu'on diminue ses deux termes d'une même quantité.*

De même, un rapport géométrique étant le quotient d'une quantité par une autre, les propriétés posées n°s 68, 69, 70, 71 et 74 se répètent ici. Ainsi, par exemple, *un rapport géométrique ne change pas quand on multiplie ou quand on divise ses deux termes par un même nombre.*

295. L'ensemble de deux rapports arithmétiques égaux forme une *proportion arithmétique*. Ainsi le rapport de 8 à 4 étant égal à celui de

13 à 9, ces quatre nombres forment une proportion, que l'on écrit

$$8 \cdot 4 : 13 \cdot 9, \quad \text{ou} \quad 8 - 4 = 13 - 9,$$

et que l'on énonce 8 *est à* 4 *comme* 13 *est à* 9, ou 8 *moins* 4 *égale* 13 *moins* 9.

296. De même, l'ensemble de deux rapports géométriques égaux forme une *proportion géométrique*. Ainsi le rapport géométrique de 8 à 4 étant égal à celui de 12 à 6, ces quatre nombres forment une proportion géométrique, que l'on écrit

$$8 : 4 :: 12 : 6, \quad \text{ou} \quad 8 : 4 = 12 : 6, \quad \text{ou encore} \quad \frac{8}{4} = \frac{12}{6},$$

et que l'on énonce 8 *est à* 4 *comme* 12 *est à* 6, ou 8 *divisé* par 4 *égale* 12 *divisé* par 6, ou encore *le rapport de* 8 *à* 4 *égale le rapport de* 12 *à* 6.

Remarque 1. *Deux rapports incommensurables sont égaux*, lorsque l'antécédent du premier rapport contient une fraction de son conséquent, aussi petite que l'on veut, autant de fois que l'antécédent du second rapport contient la même fraction de son conséquent (153 et 211).

Remarque 2. L'expression *proportion*, sans aucune autre indication, désigne toujours une proportion géométrique.

297. La *raison* d'une proportion est l'un des deux rapports égaux qui forment cette proportion (292).

298. On dit que quatre quantités 8, 4, 12, 6 sont *proportionnelles* ou en *proportion*, lorsque le rapport 8 : 4 de la première à la seconde est égal à celui 12 : 6 de la troisième à la quatrième. On dit aussi, dans ce cas, que les deux premières ou les deux dernières quantités sont dans un *rapport direct* ou en *raison directe* avec les deux autres.

Si les quatre quantités 8, 4, 6, 12 sont telles que le rapport 4 : 8 de la seconde à la première soit égal au rapport 6 : 12 de la troisième à la quatrième, on dit qu'elles sont *réciproquement proportionnelles*, *inversement proportionnelles*, *dans un rapport inverse* ou encore *en raison inverse*.

Deux quantités 8 et 4 variant de telle manière, qu'à une nouvelle valeur quelconque 12 de la première corresponde une valeur 6 de la seconde telle que l'on ait

$$8 : 4 = 12 : 6 \quad \text{ou} \quad 8 : 12 = 4 : 6,$$

on dit que ces deux quantités *varient proportionnellement* ou *dans un rapport direct* ou encore *en raison directe*.

On dit, au contraire, que deux quantités 8 et 4 *varient dans un rapport inverse* ou *en raison inverse*, lorsqu'à une nouvelle valeur quelconque 6 de la première correspond une valeur 12 de la seconde telle que l'on a

$$8 : 4 = 12 : 6 \quad \text{ou} \quad 8 : 12 = 4 : 6.$$

299. Dans toute proportion arithmétique ou géométrique, on appelle

respectivement *premier antécédent*, *deuxième antécédent*, *premier conséquent* et *deuxième conséquent*, l'antécédent du premier rapport, l'antécédent du second, le conséquent du premier rapport et le conséquent du second. Le premier et le quatrième terme d'une proportion sont les *extrêmes*, le deuxième et le troisième sont les *moyens*.

300. Le quatrième terme d'une proportion est ce qu'on nomme une *quatrième proportionnelle* aux trois autres termes (298). C'est une *quatrième arithmétique* ou une *quatrième géométrique* suivant que la proportion est arithmétique ou géométrique.

301. Dans une proportion arithmétique telle que

$$5 \cdot 7 : 7 \cdot 9,$$

dont les moyens sont égaux, le terme moyen 7 est une *moyenne arithmétique* entre les deux autres 5 et 9, et le terme 9 est une *troisième arithmétique* aux deux autres 5 et 7.

Une telle proportion est dite *continue*, et on peut l'écrire $\div 5 \cdot 7 \cdot 9$.

302. De même, dans une proportion géométrique

$$4 : 12 :: 12 : 36,$$

dont les moyens sont égaux, le terme moyen 12 est une *moyenne proportionnelle* entre les deux autres 4 et 36, et 36 est une *troisième proportionnelle* à 4 et 12.

Une telle proportion est encore dite continue, et on peut l'écrire

$$\div\div 4 : 12 : 36.$$

303. *Remarque.* 1° Lorsque les antécédents ou les conséquents d'une proportion arithmétique ou géométrique sont égaux entre eux, les conséquents ou les antécédents sont égaux; 2° lorsque deux proportions arithmétiques ou géométriques ont un rapport commun, les rapports non communs forment une proportion, c'est-à-dire sont égaux.

PROPORTIONS ARITHMÉTIQUES.

304. *Dans toute proportion arithmétique la somme des extrêmes est égale à celle des moyens.* Ainsi ayant

$$9 - 4 = 13 - 8, \quad \text{on a} \quad 9 + 8 = 4 + 13.$$

305. Lorsque la somme 9 + 8 de deux nombres est égale à la somme 4 + 13 de deux autres, les quatre nombres forment une proportion arithmétique dans laquelle les deux nombres qui composent une des sommes sont les extrêmes ou les moyens, et les deux autres sont respectivement les moyens ou les extrêmes.

306. Lorsque quatre nombres ne sont pas en proportion arithmémétique, la somme des extrêmes n'est pas égale à la somme des moyens.

307. On n'altère pas une proportion arithmétique : 1° lorsqu'on augmente ou qu'on diminue un extrême et un moyen d'une même quan-

tité; 2° lorsqu'on multiplie ou qu'on divise tous ses termes par un même nombre. Ainsi la proportion précédente donne :

$$(9+2)-(4+2)=13-8,\quad (9+2)-4=(13+2)-8, \text{ etc.,}$$
$$\text{et } (9\times 2)-(4\times 2)=(13\times 2)-(8\times 2), \text{ etc.}$$

308. *Dans toute proportion arithmétique, chaque extrême est égal à la somme des moyens diminuée de l'autre extrême*, et *chaque moyen est égal à la somme des extrêmes diminuée de l'autre moyen.* Ainsi la proportion $8-4=13-9$ donne

$$8=4+13-9, \text{ et } 13=8+9-4.$$

De là il résulte que connaissant trois termes d'une proportion arithmétique on peut toujours en déduire le quatrième.

309. *La moyenne arithmétique entre deux nombres* 5 et 9 est la moitié 7 de la somme 14 de ces nombres. On a en effet

$$5-7=7-9. \qquad (212)$$

310. On peut faire subir à une proportion arithmétique toutes les transformations qui n'altèrent pas l'égalité entre la somme des extrêmes et celle des moyens (305). Ainsi, ayant $9+8=4+13$, ces quatre nombres fournissent les huit proportions suivantes :

$$9-4=13-8,\quad 9-13=4-8,\quad 8-4=13-9,\quad 8-13=4-9,$$
$$4-9=8-13,\quad 4-8=9-13,\quad 13-9=8-4,\quad 13-8=9-4.$$

Les remarques du n° 317 sont applicables aux proportions arithmétiques comme aux proportions géométriques.

PROPORTIONS ÉOMÉTRIQUES.

311. *Dans toute proportion géométrique, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.* Ainsi la proportion

$$8:4=12:6 \text{ donne } 8\times 6=4\times 12.$$

312. Quand le produit 8×6 de deux nombres est égal au produit 4×12 de deux autres nombres, ces quatre nombres forment une proportion, dans laquelle les deux facteurs d'un des produits sont les extrêmes ou les moyens, et les deux autres sont respectivement les moyens ou les extrêmes.

313. Lorsque quatre nombres ne sont pas en proportion, le produit des extrêmes n'est pas égal à celui des moyens.

314. On n'altère pas une proportion géométrique lorsqu'on multiplie ou qu'on divise un extrême et un moyen par un même nombre. Ainsi la proportion précédente donne

$$\frac{8\times 2}{4\times 2}=\frac{12}{6},\quad \frac{8\times 2}{4}=\frac{12\times 2}{6}, \text{ etc.}$$

315. *Dans toute proportion, chaque extrême est égal* au produit des moyens divisé par l'autre extrême, et *chaque moyen est égal* au produit des extrêmes divisé par l'autre moyen.

De là résulte que, par exemple, le quatrième terme x de la proportion

$$6:2=24:x, \text{ est } x=\frac{2\times 24}{6}=8.$$

316. *La moyenne géométrique* x *entre deux nombres* 4 et 36 est la racine carrée du produit de ces deux nombres (302). En effet, la proportion

$$4:x=x:36 \text{ donne } x^2=4\times 36, \text{ ou } x=\sqrt{4\times 36}=12.$$

On a bien $4:12=12:36.$

317. On peut faire subir à une proportion toutes les transformations qui n'altèrent pas l'égalité entre le produit des extrêmes et celui des moyens. Ainsi ayant $8\times 3=2\times 12$, ces quatre nombres fournissent les huit proportions suivantes :

$$8:2=12:3,\quad 8:12=2:3,\quad 3:2=12:8,\quad 3:12=2:8,$$
$$2:8=3:12,\quad 2:3=8:12,\quad 12:8=3:2,\quad 12:3=8:2.$$

Remarques : 1re Les quatre premières de ces proportions font voir que si quatre nombres sont en proportion, ils y seront encore lorsqu'on transposera les moyens ou les extrêmes (312).

2e Les quatre dernières de ces proportions montrent qu'une proportion n'est pas troublée quand on met les extrêmes à la place des moyens et les moyens à la place des extrêmes.

3e La première proportion $8:2=12:3$ donnant $8:12=2:3$, il en résulte que dans toute proportion le premier antécédent est au deuxième antécédent comme le premier conséquent est au deuxième conséquent.

318. On peut multiplier ou diviser les quatre termes d'une proportion, ou seulement un extrême et un moyen, par un même nombre sans que la proportion cesse d'exister (294). Ainsi ayant

$$8:2=12:3, \text{ on a aussi } 8\times 3:2\times 3=12\times 3:3\times 3.$$

319. *De là il résulte que l'on peut faire disparaître les termes fractionnaires d'une proportion.* On réduit les termes de la proportion au même dénominateur et l'on supprime ce dénominateur :

$$\frac{1}{2}:\frac{1}{6}=2:\frac{2}{3} \text{ donne } \frac{3}{6}:\frac{1}{6}=\frac{12}{6}:\frac{4}{6} \text{ ou } 3:1=12:4.$$

Lorsqu'il n'y a de fractionnaire qu'un extrême ou qu'un moyen, ou un extrême et un moyen, on peut ne réduire au même dénominateur que deux termes de la proportion (294 et 312) :

$$\frac{2}{3} : 4 = 3 : 18 \text{ donne } \frac{2}{3} : \frac{12}{3} = 3 : 18 \text{ ou } 2 : 12 = 3 : 18;$$

$$\frac{3}{4} : 18 = \frac{1}{3} : 8 \text{ donne } \frac{9}{12} : 18 = \frac{4}{12} : 8 \text{ ou } 9 : 18 = 4 : 8.$$

On peut aussi simplifier les termes d'une proportion en divisant ses quatre termes, ou seulement un extrême et un moyen par un même nombre :

$$9 : 3 = 36 : 12 \text{ donne } 3 : 1 = 12 : 4.$$

320. Lorsque deux proportions ont les mêmes antécédents ou les mêmes conséquents, leurs conséquents ou leurs antécédents sont proportionnels (303 et 317) :

$$3 : 9 = 15 : 45 \text{ et } 3 : 6 = 15 : 30 \text{ donnent } 9 : 45 = 6 : 30.$$

321. Dans toute proportion, $8 : 4 = 6 : 3$ par exemple :

1° La somme ou la différence des deux premiers termes est au second ou au premier terme comme la somme ou la différence des deux derniers est au quatrième ou au troisième. On a :

$$(8 + 4) : 4 = (6 + 3) : 3 \text{ et } (8 + 4) : 8 = (6 + 3) : 6;$$
$$(8 - 4) : 4 = (6 - 3) : 3 \text{ et } (8 - 4) : 8 = (6 - 3) : 6.$$

2° La somme des deux premiers termes est à la somme des deux derniers comme la différence des deux premiers est à la différence des deux derniers :

$$(8 + 4) : (6 + 3) = (8 - 4) : (6 - 3);$$

ou en changeant les moyens de place :

$$(8 + 4) : (8 - 4) = (6 + 3) : (6 - 3).$$

3° La somme ou la différence des antécédents est au second ou au premier antécédent comme la somme ou la différence des conséquents est au second ou au premier conséquent :

$$(8 + 6) : 6 = (4 + 3) : 3 \text{ et } (8 + 6) : 8 = (4 + 3) : 4;$$
$$(8 - 6) : 6 = (4 - 3) : 3 \text{ et } (8 - 6) : 8 = (4 - 3) : 4.$$

4° La somme des antécédents est à celle des conséquents comme la différence des antécédents est à celle des conséquents :

$$(8 + 6) : (4 + 3) = (8 - 6) : (4 - 3).$$

5° La somme ou la différence des antécédents est à la somme ou à la différence des conséquents comme un antécédent quelconque est à son conséquent :

$$(8 + 6) : (4 + 3) = 8 : 4 = 6 : 3,$$
$$(8 - 6) : (4 - 3) = 8 : 4 = 6 : 3.$$

322. Lorsqu'on multiplie les termes de plusieurs proportions les uns



par les autres et par ordre, les quatre produits forment une proportion. Ainsi, ayant

$$4:2=6:3, \quad 7:5=14:10, \quad 3:9=6:18,$$

on a $$4\times7\times3:2\times5\times9=6\times14\times6:3\times10\times18.$$

323. Les quotients que l'on obtient en divisant par ordre les termes d'une proportion par ceux d'une autre proportion sont en proportion :

$$\frac{4}{7}:\frac{2}{5}=\frac{6}{14}:\frac{3}{10}.$$

324. Les puissances et les racines semblables des quatre termes d'une proportion forment une proportion. Ainsi, ayant $3:7=6:14$, on a aussi

$$3^3:7^3=6^3:14^3, \quad \text{et} \quad \sqrt{3}:\sqrt{7}=\sqrt{6}:\sqrt{14}.$$

325. Dans une suite de rapports égaux, la somme d'un nombre quelconque d'antécédents est à la somme de leurs conséquents comme un antécédent quelconque est à son conséquent. Ainsi, ayant

$$3:6=4:8=7:14=5:10,$$

on a $$(3+4+7):(6+8+14)=3:6=5:10.$$

326. Dans toute proportion, le produit des antécédents est au produit des conséquents comme le carré d'un antécédent est au carré de son conséquent :

$$3:7=6:14 \quad \text{donne} \quad 3\times6:7\times14::3^2:7^2.$$

327. Dans une suite de rapports égaux, le produit d'un certain nombre d'antécédents est au produit de leurs conséquents, comme un antécédent quelconque élevé à une puissance d'un degré égal au nombre des facteurs antécédents est à son conséquent élevé à la même puissance :

$$3:6=4:8=7:14=5:10$$

donne $$3\times4\times7:6\times8\times14=3^3:6^3=5^3:10^3.$$

PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES.

328. Une suite de nombres croissants ou décroissants, tels que le rapport arithmétique de chacun d'eux à celui qui le précède immédiatement est constant (292), forme une *progression arithmétique* ou *par différence*. Ces nombres sont les *termes* de la progression, et le rapport constant de chaque terme à celui qui le précède immédiatement en est la *raison*. Ainsi les nombres 4, 7, 10, 13, 16 forment une *progression arithmétique croissante* dont la raison est $7-4$ ou 3. *On l'écrit :*

$$\div 4.7.10.13.16, \qquad (a)$$

et *on l'énonce : comme* 4 *est à* 7 *est à* 10 *est à* 13, etc.

Remarque. Les mêmes nombres écrits dans un ordre inverse donnent la *progression arithmétique décroissante*

$$\div 16 . 13 . 10 . 7 . 4. \qquad (b)$$

329. On n'altère pas une progression arithmétique lorsqu'on augmente ou qu'on diminue tous ses termes d'une même quantité (4°, 27); on ne l'altère pas non plus quand on multiplie ou quand on divise tous ses termes par un même nombre, mais la raison est multipliée ou divisée par ce nombre (33 et 60).

330. Suivant qu'une progression arithmétique est croissante ou décroissante, *chaque terme est égal au premier plus ou moins la raison prise autant de fois qu'il y a de termes avant celui que l'on considère.* Ainsi, dans la progression (*a*) le 5ᵉ terme est $4 + 3 \times 4 = 16$, et dans la progression (*b*) le 3ᵉ terme est $16 - 3 \times 2 = 10$.

331. *La somme de deux termes également distants des extrêmes* est égale à la somme des extrêmes dans une progression arithmétique. Ainsi, $\div 4 . 7 . 10 . 13 . 16$ donne

$$4 + 16 = 7 + 13 = 10 + 10.$$

332. *La somme* s *des termes d'une progression arithmétique* est égale au produit de la demi-somme des extrêmes par le nombre des termes de la progression. La progression ci-dessus donne

$$s = \frac{4 + 16}{2} \times 5 = 50.$$

333. *Pour insérer un certain nombre de moyens arithmétiques entre deux nombres donnés*, on détermine la raison de la progression qui doit en résulter, ce qui se fait en prenant la différence entre les deux nombres donnés et en divisant cette différence par le nombre de moyens augmenté de 1. Ajoutant successivement cette raison au petit nombre donné et aux sommes obtenues, on obtient les divers moyens.

Soit à insérer 3 moyens entre 4 et 28.

La raison est $$\frac{28 - 4}{3 + 1} = \frac{24}{4} = 6,$$

et ajoutant 6 à 4 et successivement aux sommes obtenues, on a

$$\div 4 . 10 . 16 . 22 . 28.$$

On arriverait au même résultat en retranchant la raison 6 du grand nombre 28 et successivement des restes obtenus.

334. Quand le nombre des moyens arithmétiques à insérer est une puissance de 2 diminuée de 1, on peut trouver directement ces moyens arithmétiques en prenant une moyenne arithmétique entre les deux nombres donnés (309); puis une moyenne arithmétique entre chacun des nombres donnés et le terme trouvé, et ainsi de suite.



Soit à insérer $2^2 - 1 = 3$ moyens entre 0 et 1. Prenant la moyenne arithmétique 0,5, entre 0 et 1, on a d'abord la progression ÷ 0 . 0,5 . 1 ; insérant ensuite une moyenne arithmétique entre chacun des termes consécutifs de cette progression, on obtient la progression demandée

÷ 0 . 0,25 . 0,50 . 0,75 . 1.

335. En insérant un même nombre de moyens arithmétiques entre les termes consécutifs d'une progression arithmétique, l'ensemble de tous les termes forme une nouvelle progression arithmétique.

Insérant trois moyens entre les termes consécutifs de la progression ÷ 2 . 14 . 26, on obtient la nouvelle progression

÷ 2 . 5 . 8 . 11 . 14 . 17 . 20 . 23 . 26.

336. *Les sommes des termes correspondants de plusieurs progressions arithmétiques forment une progression arithmétique*, dont la raison est la somme des raisons des progressions dont on a ajouté les termes.

En retranchant les termes d'une progression arithmétique des termes correspondants d'une autre progression arithmétique, les restes forment une progression arithmétique, dont la raison est la différence des raisons des progressions proposées.

PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES.

337. Une suite de nombres croissants ou décroissants, tels que le rapport géométrique de chacun d'eux à celui qui le précède immédiatement est constant, forme une *progression géométrique* ou *par quotient*. Ces nombres sont les *termes* de la progression, et le rapport constant de chaque terme à celui qui le précède en est la *raison* (292).

Ainsi les nombres 2, 6, 18, 54, 162 forment une progression géométrique *croissante* dont la raison est 3. *On l'écrit :*

∺ 2 : 6 : 18 : 54 : 162,

et *on l'énonce : comme* 2 *est à* 6 *est à* 18 *est à* 54, etc.

Remarque. Les mêmes nombres écrits dans un ordre inverse donnent une *progression géométrique décroissante*, dont la raison est $\frac{1}{3}$.

338. On n'altère pas une progression en multipliant ou en divisant tous ses termes par un même nombre (294).

339. Dans une progression géométrique croissante ou décroissante, *un terme quelconque est égal au premier multiplié par la raison élevée à une puissance d'un degré égal au nombre des termes qui précèdent celui que l'on considère.* Ainsi, dans la progression précédente, le cinquième terme est égal à

$$2 \times 3^4 = 2 \times 81 = 162.$$

340. *Le produit de deux termes également distants des extrêmes* est



égal au produit des extrêmes. L'exemple du n° 337 donne

$$2 \times 162 = 6 \times 54 = 18 \times 18.$$

341. *Le produit* p *des termes d'une progression géométrique* est égal à la racine carrée du produit des extrêmes élevé à une puissance marquée par le nombre des termes de la progression. Ainsi l'exemple ci-dessus donne

$$p = \sqrt{(2 \times 162)^5} = 1\,889\,568.$$

342. *La somme* s *des termes d'une progression géométrique* s'obtient en retranchant le premier terme du produit du dernier terme par la raison, et en divisant la différence par la raison moins 1. La progression du n° 337 donne

$$s = \frac{(162 \times 3) - 2}{3 - 1} = 242.$$

Si la progression était décroissante, la somme des termes s'obtiendrait en divisant par l'unité moins la raison le premier terme diminué du produit du dernier par la raison. Ainsi la progression $\div\!\div 162 : 54 : 18 : 6 : 2$ donne

$$s = \frac{162 - 2 \times \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{162 - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{162 \times 3 - 2}{2} = 242.$$

343. *Pour insérer un certain nombre de moyens géométriques entre deux nombres donnés*, on détermine la raison de la progression qui doit en résulter, ce qui se fait en divisant le second des nombres donnés par le premier, et en extrayant du quotient la racine de l'indice indiqué par le nombre de moyens géométriques à insérer augmenté de 1. Multipliant par cette raison le premier nombre donné, on a le premier moyen ou le deuxième terme de la progression, lequel multiplié par la raison donne le deuxième moyen, et ainsi de suite.

Soit à insérer trois moyens géométriques entre 2 et 162. La raison est

$$\sqrt[4]{\frac{162}{2}} = \sqrt[4]{81} = \sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{9} = 3. \qquad (269)$$

Multipliant par 3 le premier terme 2 et successivement les produits obtenus, on obtient la progression $\div\!\div 2 : 6 : 18 : 54 : 162$.

344. Quand, comme dans l'exemple précédent, le nombre des moyens géométriques à insérer est une puissance de 2 diminuée de 1, on peut trouver ces moyens en prenant une moyenne géométrique entre les deux nombres donnés (316); puis une moyenne géométrique entre chacun des nombres donnés et le terme trouvé, et ainsi de suite. Soit à insérer $2^2 - 1 = 3$ moyens géométriques entre 2 et 162. Prenant la moyenne géométrique $\sqrt{2 \times 162} = 18$, entre 2 et 162, on obtient d'a-

bord la progression ∺ 2 : 18 : 162. Insérant ensuite une moyenne géométrique entre chacun des termes consécutifs 2 et 18, 18 et 162 de cette progression, on obtient la progression demandée

∺ 2 : 6 : 18 : 54 : 162.

345 En insérant un même nombre de moyens géométriques entre les termes consécutifs d'une progression géométrique, l'ensemble de tous les termes forme une nouvelle progression géométrique.

Ainsi, en insérant trois moyens entre chacun des termes consécutifs de la progression ∺ 1 : 81 : 6561, on obtient la nouvelle progression

∺ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561.

346. *Les produits des termes correspondants de plusieurs progressions géométriques forment une progression géométrique*, dont la raison est égale au produit des raisons des progressions dont on a multiplié les termes.

En divisant les termes d'une progression géométrique par les termes correspondants d'une autre progression géométrique, les quotients forment une progression géométrique, dont la raison est égale à la raison de la première progression divisée par la raison de la seconde.

En élevant tous les termes d'une progression à une même puissance, on obtient une nouvelle progression géométrique, dont la raison est égale à la même puissance de la raison de la progression proposée.

En extrayant une même racine de tous les termes d'une progression géométrique, on obtient une nouvelle progression, dont la raison est égale à la même racine de la raison de la progression proposée.

LIVRE VI.

Règles diverses.

RÈGLES DE TROIS.

347. Une *règle de trois* est une règle par laquelle on résout un problème, c'est-à-dire détermine la valeur d'une inconnue, au moyen d'une ou de plusieurs proportions (296).

348. La *règle de trois* est *simple*, lorsqu'elle consiste dans la détermination du quatrième terme d'une proportion, dont les trois autres sont donnés dans l'énoncé du problème (315). Si, au contraire, ces trois termes ne sont pas donnés directement, et que leur détermination exige quelques opérations préalables, ou que la solution du problème

exige l'emploi de plusieurs règles de trois simples ou proportions, la règle prend le nom de *règle de trois composée*.

349. L'énoncé de tout problème qui se résout au moyen de la règle de trois simple contient deux quantités connues de même espèce, et deux autres quantités de même espèce dont une seule est connue.

On ne peut établir de rapport qu'entre les quantités de même espèce, et, selon que le rapport des quantités de même espèce dont une seule est connue est direct ou inverse de celui des deux autres (298), ce que l'on reconnaît facilement à l'énoncé du problème, la règle de trois simple est dite *directe* ou *inverse*.

350. *Règle de trois simple directe.*

5 *ouvriers ont fait* 25 *mètres d'ouvrage, combien* 7 *ouvriers en feront-ils dans le même temps?*

Il est évident que les nombres de mètres d'ouvrage sont en raison directe des nombres d'ouvriers qui les font; donc, en désignant par x le nombre des mètres d'ouvrage faits par les 7 ouvriers, on aura (298)

$$5:7=25:x, \quad \text{d'où} \quad x=\frac{7\times 25}{5}=35 \text{ mètres.}$$

On peut résoudre ce problème, ainsi que tous ceux relatifs aux règles de trois simples ou composées, par la méthode suivante, dite *méthode de réduction à l'unité*, dans laquelle on ne fait pas usage des proportions.

5 ouvriers ayant fait 25 mètres d'ouvrage, 1 ouvrier en fera $\frac{25}{5}$ dans le même temps, et 7 ouvriers en feront

$$\frac{25\times 7}{5}=35 \text{ mètres.}$$

351. *Règle de trois simple inverse* (349).

1er *Problème.* 4 *ouvriers ont mis* 20 *heures pour faire un ouvrage; trouver en combien d'heures* 10 *ouvriers feront le même ouvrage.*

Les nombres d'heures employées étant en raison inverse des nombres d'ouvriers, x étant le nombre d'heures de travail des 10 ouvriers, on a (298).

$$4:10=x:20, \quad \text{d'où} \quad x=\frac{20\times 4}{10}=8 \text{ heures.}$$

Méthode de réduction à l'unité. Puisque 4 ouvriers ont mis 20 heures pour faire l'ouvrage, 1 ouvrier mettra 20×4 heures, et 10 ouvriers mettront

$$\frac{20\times 4}{10}=8 \text{ heures.}$$

2e *Problème. Combien doit-on employer de mètres de toile à* $\frac{3}{4}$ *de large pour doubler* 45 *mètres à* $\frac{7}{6}$*?*

Les longueurs étant en raison inverse des largeurs, on a

$$\frac{3}{4} : \frac{7}{6} = 45 : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{45 \times \frac{7}{6}}{\frac{3}{4}} = \frac{45 \times 7 \times 4}{3 \times 6} = 5 \times 7 \times 2 = 70^{m}.$$

Méthode de réduction à l'unité. 45 mètres à $\frac{7}{6}$ de large valent $45 \times \frac{7}{6}$ mètres de 1 mètre de largeur, et à $\frac{3}{4}$ de large ils valent

$$\frac{45 \times \frac{7}{6}}{\frac{3}{4}} = 70 \text{ mètres.}$$

352. *Exemples de règles de trois composées* (348) :

1° *2 ouvriers, travaillant 3 heures par jour, ont fait en 5 jours 90 mètres d'ouvrage ; combien 3 ouvriers, travaillant 7 heures par jour, feront-ils de mètres du même ouvrage en 2 jours?*

Ayant disposé les données et l'inconnue de la manière suivante :

$$\begin{array}{cccc} 2^{o} & 3^{h} & 5^{j} & 90^{m} \\ 3^{o} & 7^{h} & 2^{j} & x^{m}, \end{array}$$

on peut arriver à la solution du problème à l'aide d'une série de règles de trois simples ou proportions ; mais il est plus commode de ramener le problème au cas d'une règle de trois simple, en opérant comme il suit :

2 ouvriers, travaillant 3 heures par jour, font autant d'ouvrage que 2×3 ouvriers travaillant pendant 1 heure, et 2×3 ouvriers qui travaillent 1 heure par jour pendant 5 jours équivalent à $2 \times 3 \times 5$ ouvriers qui travaillent pendant une heure.

De même, 3 ouvriers, travaillant 7 heures par jour pendant 2 jours, font autant d'ouvrage que $3 \times 7 \times 2$ ouvriers qui travailleraient pendant 1 heure.

Le problème est donc ramené au suivant :

$2 \times 3 \times 5$ ouvriers ont fait 90 mètres d'ouvrage, combien $3 \times 7 \times 2$ ouvriers feront-ils de mètres du même ouvrage dans le même temps ?

La solution de ce problème est donnée par une règle de trois simple directe, et l'on a (350)

$$2 \times 3 \times 5 : 3 \times 7 \times 2 = 90 : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{90 \times 3 \times 7 \times 2}{2 \times 3 \times 5} = 18 \times 7 = 126 \text{ mèt.}$$

Il convient d'écrire les termes de la proportion avec tous leurs facteurs, afin de profiter des réductions qui peuvent se présenter (161).

Méthode de réduction à l'unité. Puisque 2 ouvriers, travaillant 3 heures par jour pendant 5 jours, ont fait 90 mètres d'ouvrage, 1 ouvrier, tra-

vaillant 1 heure par jour pendant 1 jour, en fera $\frac{90}{2 \times 3 \times 5}$ mètres, et, par suite, 3 ouvriers, travaillant 7 heures par jour pendant 2 jours, en feront

$$\frac{90 \times 3 \times 7 \times 2}{2 \times 3 \times 5} = 126 \text{ mètres.}$$

2° *2 ouvriers, travaillant 3 heures par jour, font en 5 jours 90 mètres d'ouvrage; combien faudra-t-il de jours à 3 ouvriers, qui travaillent 7 heures par jour, pour faire le même ouvrage?*

$$\begin{array}{cccc} 2^o & 3^h & 5^j & 90^m \\ 3^o & 7^h & x^j & 90^m. \end{array}$$

En raisonnant comme dans le cas précédent, on ramène le problème au suivant, dont la solution dépend d'une règle de trois simple inverse :

2×3 ouvriers ont mis 5 jours pour faire un ouvrage, combien 3×7 ouvriers mettront-ils de jours à faire le même ouvrage?

On a (351)

$$2 \times 3 : 3 \times 7 = x : 5, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{5 \times 2 \times 3}{3 \times 7} \text{ jours.}$$

Méthode de réduction à l'unité. D'après l'énoncé, 1 ouvrier travaillant 1 heure par jour mettra $5 \times 2 \times 3$ jours pour faire 90 mètres d'ouvrage; donc 3 ouvriers travaillant 7 heures par jour mettront

$$\frac{5 \times 2 \times 3}{3 \times 7} \text{ jours.}$$

3° *Si les 3 ouvriers, travaillant 7 heures par jour, avaient dû faire non pas 90 mètres d'ouvrage*, comme les premiers, *mais 126 mètres*, par exemple,

$$\begin{array}{cccc} 2^o & 3^h & 5^j & 90^m \\ 3^o & 7^h & x^j & 126^m, \end{array}$$

on aurait divisé l'opération en deux parties en cherchant d'abord le nombre $\frac{5 \times 2 \times 3}{3 \times 7}$ jours qu'ils mettent à faire 90 mètres d'ouvrage, en opérant comme ci-dessus; et le problème étant ramené à celui-ci :

Des ouvriers mettent $\frac{5 \times 2 \times 3}{3 \times 7}$ jours à faire 90 mètres d'ouvrage, combien mettront-ils de jours pour en faire 126 mètres?

On aurait eu (350)

$$90 : 126 :: \frac{5 \times 2 \times 3}{3 \times 7} : x,$$

d'où $$x = \frac{5 \times 2 \times 3 \times 126}{3 \times 7 \times 90} = \frac{126}{7 \times 9} = \frac{14}{7} = 2 \text{ jours.}$$

Méthode de réduction à l'unité. 1 ouvrier, travaillant 1 heure par jour, mettra $\frac{5 \times 2 \times 3}{90}$ jours pour faire 1 mètre d'ouvrage; donc 3 ouvriers, travaillant 7 heures par jour, mettront pour faire 126 mètres d'ouvrage

$$\frac{5 \times 2 \times 3 \times 126}{3 \times 7 \times 90} = 2 \text{ jours.}$$

353. *Règle générale pour résoudre une règle de trois simple ou composée* (350, 351 et 352).

Les quantités qui entrent dans l'énoncé d'une règle de trois sont deux à deux de même espèce, et le rapport de l'inconnue à la quantité connue de même espèce est égal au produit des rapports directs ou inverses des autres quantités; ainsi, dans le problème du 3° n° 352, le rapport des nombres d'ouvriers et celui des nombres d'heures étant inverses de celui des nombres de jours, et celui des nombres de mètres d'ouvrage étant direct, on a

$$\frac{x}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{7} \times \frac{126}{90}, \quad \text{d'où} \quad x = 5 \times \frac{2 \times 3 \times 126}{3 \times 7 \times 90} = 2 \text{ jours.}$$

RÈGLES D'INTÉRÊTS.

354. On nomme *intérêt* ce que rapporte une somme d'argent prêtée pendant un certain temps. La somme prêtée est appelée *capital.*

355. L'intérêt de 100 francs placés pendant un an est le *taux* de l'intérêt ou le taux de l'argent. Ainsi, lorsque 100 francs rapportent 5 francs par an, on dit que le *taux* de l'argent est à 5 pour 100 par an, ou simplement que l'argent est à 5 p. 100; c'est ce qu'on écrit ainsi d'une manière abrégée, 5 p. °/₀, ou même 5 °/₀.

Le taux légal est de 5 °/₀ dans les transactions ordinaires, et de 6 °/₀ en matière commerciale.

356. L'*intérêt* est *simple* quand le capital reste le même pendant toute la durée du prêt.

357. L'*intérêt* est *composé* lorsqu'il se joint au capital à la fin de chaque année pour porter lui-même intérêt, c'est-à-dire quand on a égard aux *intérêts des intérêts.* Les caisses d'épargne offrent une application de cette règle.

358. Les solutions des questions sur les intérêts se déduisent des deux principes suivants:

1° *L'intérêt simple d'un capital est proportionnel au temps pendant lequel ce capital est prêté* (298).

2° *Deux capitaux placés pendant le même temps et au même taux sont en raison directe de leurs intérêts* (298).

359. *Problèmes sur les intérêts simples :*

1° *Combien 45000 francs, argent comptant, vaudront-ils dans 4 ans à 5 °/₀?*

100 francs rapportant 5 fr. en un an, ils rapportent 5×4 francs en

4 ans (1°, n° 358), et, désignant par x l'intérêt du capital 45000 francs pour 4 ans, on a (2°, n° 358)

$$100 : 45000 = 5 \times 4 : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{45000 \times 5 \times 4}{100} = 9000 \text{ fr.}$$

Ce qui montre que *pour avoir l'intérêt d'un capital prêté pendant un nombre déterminé d'années, il suffit de multiplier le capital par le taux et par le nombre d'années, et de diviser le produit par 100.*

On peut encore arriver à ce résultat sans faire usage de proportion, en employant la méthode de réduction à l'unité (350 à 352). Ainsi, puisque 100 francs rapportent 5 francs en un an, 1 franc rapportera 0f,05; pour 4 ans l'intérêt de 1 franc sera alors $0,05 \times 4$ fr., et celui de 45000 francs sera

$$45000 \times 0,05 \times 4 = 9000 \text{ fr.}$$

Les règles d'intérêts n'étant autre chose que des règles de trois, on peut en général leur appliquer la méthode de réduction à l'unité.

Le capital 45000 francs devient donc après 4 ans

$$X = 45000 + 9000 = 54000 \text{ fr.}$$

Résultat qu'on obtient directement à l'aide de la proportion

$$100 : 45000 = (100 + 5 \times 4) : X, \quad \text{d'où} \quad X = \frac{45000 \times 120}{100} = 54000 \text{ fr.}$$

Ou encore en disant : puisque 1 fr. vaut $1 + 0,05 \times 4$ fr. après 4 ans, 45000 fr. valent

$$45000 \times (1 + 0,05 \times 4) = 54000 \text{ fr.}$$

2° *Combien 45000 francs comptant vaudront-ils dans 4 ans 3 mois, à 5 %?*

Comme dans le cas précédent, 1 franc rapportant 0f,05 en un an, en 4 ans 3 mois ou 51 mois ou $\frac{51}{12}$ ans il rapportera $0,05 \times \frac{51}{12}$ francs; l'intérêt de 45000 francs pour le même temps est alors

$$45000 \times 0,05 \times \frac{51}{12} = 9562^{f},50.$$

Le capital devient donc après 4 ans 3 mois

$$45000 + 9562,50 = 54562^{f},50.$$

Résultat qu'on obtient directement en remarquant qu'après 4 ans 3 mois 1 fr. devenant $1 + 0,05 \times \frac{51}{12} = 1^{f},2125$, 45000 francs deviennent

$$45000\left(1 + 0,05 \times \frac{51}{12}\right) = 45000 \times 1,2125 = 54562^{f},50.$$

3° Combien 45 000 francs comptant vaudront-ils dans 48 jours à 5 %?

De même que l'on considère le mois comme étant le $\frac{1}{12}$ de l'année (2°), on considère le jour comme étant le trentième du mois, et par suite le $\frac{1}{360}$ de l'année.

Alors l'intérêt de 1 fr. pour 48 jours, ou $\frac{48}{360}$ an, est $0{,}05 \times \frac{48}{360}$ fr., et celui de 45 000 francs,

$$45\,000 \times 48 \times \frac{0{,}05}{360} = 45\,000 \times 48 \times \frac{1}{7200} = 300 \text{ fr.}$$

De cette valeur de x on déduit la règle générale suivante :

Pour obtenir l'intérêt d'un capital prêté à 5 % pendant un certain nombre de jours, on multiplie le capital par le nombre de jours, et on divise le produit par 7200.

Ajoutant l'intérêt à la somme prêtée, on a la valeur 45 300 francs du capital après 48 jours.

On peut encore obtenir directement cette valeur en opérant comme au 2°, ce qui donne

$$45\,000 \times \left(1 + 0{,}05 \times \frac{48}{360}\right) = 45\,300 \text{ fr.}$$

Lorsque le taux de l'argent est à 6 %, les opérations ci-dessus conduisent à

$$45\,000 \times 48 \times \frac{0{,}06}{360} = 45\,000 \times 48 \times \frac{1}{6000} = 360 \text{ fr.}$$

D'où il résulte qu'alors, *pour obtenir l'intérêt, on multiplie le capital par le nombre de jours, et on divise le produit par* 6000. On trouverait de même que le diviseur prend les valeurs du tableau suivant pour les taux les plus usités.

TAUX.	DIVISEURS.	TAUX.	DIVISEURS.	TAUX.	DIVISEURS.	TAUX.	DIVISEURS.	TAUX.	DIVISEURS.
1	36 000	3,25	11 077	5,50	6 545	7,75	4 645	10	3 600
1,25	28 800	3,50	10 286	5,75	6 261	8	4 500	10,25	3 512
1,50	24 000	3,75	9600	6	6 000	8,25	4 364	10,50	3 429
1,75	20 571	4	9 000	6,25	5 760	8,50	4 235	10,75	8 349
2	18 000	4,25	8 470	6,50	5 538	8,75	4 114	11	3 273
2,25	16 000	4,50	8 000	6,75	5 333	9	4 000	11,25	3 200
2,50	14 400	4,75	7 579	7	5 143	9,25	3 892	11,50	3 130
2,75	13 091	5	7 200	7,25	4 965	9,50	3 789	11,75	3 064
3	12 000	5,25	6 857	7,50	4 800	9,75	3 692	12	3 000

4° Combien 54 562f,50, *payables dans 4 ans* 3 *mois, valent-ils argent comptant, le taux étant de* 5 %?

Ayant trouvé, en opérant comme au 2°, que 1 fr. devient 1f,2125 après 4 ans 3 mois, puisque 1f,2125 payables après 4 ans 3 mois valent 1 franc argent comptant, 54 562f,50 valent

$$\frac{54\,562^{f},50}{1,2125} = 45\,000 \text{ fr.}$$

En général, *quand on divise une somme payable après un certain temps par la valeur de 1 franc après ce temps, le quotient est le capital primitif.*

5° *Trouver dans combien d'années le capital* 45 000 fr., *prêté à* 5 °/₀, *vaudra* 54 562f,50.

Le capital 45 000 fr. rapporte en un an

$$45\,000 \times 0,05 = 2\,250 \text{ fr.} \qquad (1°)$$

Le temps pendant lequel il faut le prêter pour qu'il rapporte 54 562f,50 — 45 000 = 9 562f,50 est alors

$$\frac{9\,562^{f},50}{2\,250} = 4,25 \text{ années ou 4 ans 3 mois (229).}$$

360. *Problèmes sur les intérêts composés* (357 et 361).

1° *Combien le capital* 45 000 *fr., prêté à intérêt composé à* 5 °/₀, *vaudra-t-il dans* 4 *ans?*

1 fr. devenant 1f,05 après la première année, 45 000 fr. deviennent

$$45\,000 \times 1,05 \text{ fr.}$$

Ce nouveau capital, prêté pendant une seconde année, devient à la fin de cette année

$$45\,000 \times 1,05 \times 1,05 = 45\,000 \times 1,05^2 \text{ fr.}$$

Cet autre capital vaudra à la fin de la troisième année

$$45\,000 \times 1,05^2 \times 1,05 = 45\,000 \times 1,05^3 \text{ fr.}$$

et ainsi de suite. Ce qui montre qu'*un capital prêté à intérêt composé vaut, après un nombre entier quelconque d'années, sa première valeur multipliée par le nombre* 1,05 *élevé à une puissance d'un degré égal au nombre des années.* Ainsi, après 4 années, le capital 45 000 fr. vaudra

$$45\,000 \times 1,05^4 = 45\,000 \times 1,215\,506 = 54\,697^{f},77.$$

Si le taux avait une autre valeur, 4,5 par exemple, la règle serait toujours la même; seulement le nombre 1,05 deviendrait 1,045.

La table suivante contient, dans la colonne *a*, pour les taux les plus usités, les puissances successives de ces nombres jusqu'à la 60ième, c'est-à-dire la valeur de 1 fr. après 1, 2, 3... 60 ans de prêt.

A l'aide de cette table, pour résoudre le problème précédent, il suffira de chercher dans la colonne *a* du taux 5 °/₀ la valeur 1f,215 506 de 1 fr. après 4 ans, et de la multiplier par le capital prêté 45 000 fr.

2° *Quel capital faut-il placer à intérêt composé, à 5 %, pour valoir 54 697f,77 après 4 ans?*

1f valant $1{,}05^4 = 1^f{,}215\,506$ après 4 ans, 54 697f,77 après 4 ans valent argent comptant

$$\frac{1}{1{,}05^4} \times 54\,697{,}77 = \frac{54\,697{,}77}{1{,}215\,506} = 45\,000 \text{ fr.}$$

La table suivante contient, dans la colonne *b*, la valeur actuelle de 1 fr. après 1, 2, 3... 60 ans. On y trouve, qu'à 5 %, 1 fr. après 4 ans vaut comptant 0f,822 703. Alors le capital 54 697,77 après 4 ans vaut argent comptant

$$54\,697{,}77 \times 0{,}822\,703 = 45\,000 \text{ fr.}$$

3° *Combien le capital 45 000 fr. prêté à intérêt composé, à 5 %, vaudra-t-il dans 4 ans 3 mois?*

On cherche d'abord ce que devient le capital après les 4 années entières, en opérant comme au 1°. Puis on détermine ce que vaut le capital trouvé 54 697,77, prêté à intérêt simple pendant 3 mois, ce qui donne (359)

$$54\,697{,}77 \times \left(1 + 0{,}05 \times \frac{3}{12}\right) = 55\,381^f{,}49.$$

4° *Quel capital faut-il placer à intérêt composé, à 5 %, pour valoir 55 381f,49 après 4 ans 3 mois?*

1 fr. après 4 ans vaut $1{,}05^4$, et après 4 ans 3 mois,

$$1{,}05^4 \left(1 + 0{,}05 \times \frac{3}{12}\right) = 1^f{,}2307.$$

Puisque 1f,2307 placés pendant 4 ans 3 mois valent 1 fr. argent comptant, 55 381f,49 valent donc

$$\frac{55\,381{,}49}{1{,}2307} = 45\,000 \text{ fr.}$$

On peut encore suivre la marche suivante, en faisant usage de la table. Appelant x le capital qui vaut 1 fr. après 3 mois, on a

$$1^f = x + x \times 0{,}05 \times \frac{3}{12} = x\left(1 + 0{,}05 \times \frac{3}{12}\right) = x \times 1{,}0125,$$

d'où

$$x = \frac{1}{1{,}0125}.$$

D'après la table, colonne *b*, 5 %, 1 fr. après 4 ans valant 0f,822 703 argent comptant, 1 fr. après 4 ans 3 mois vaut argent comptant $0^f{,}822\,703 \times \frac{1}{1{,}025}$, et par conséquent 55 381f,49 valent

$$\frac{55\,381{,}49 \times 0{,}822\,703}{1{,}025} = 45\,000 \text{ fr.}$$

5° *Dans combien de temps le capital* 45 000 *fr., prêté à intérêt composé, à* 5 °/₀, *vaudra-t-il* 55 381f,49 ?

Le problème revient à trouver dans combien de temps 1 fr., prêté à intérêt composé, à 5 °/₀, vaudra

$$\frac{55\,381{,}49}{45\,000} = 1^{f}{,}2307.$$

Calculant, comme au 1°, ce que vaut 1 fr. après la 1re, 2e, 3e, etc. année, on reconnaîtrait que la durée totale du prêt est comprise entre 4 et 5 ans. C'est ce qu'indique de suite la colonne *a*, 5 °/₀, de la table, qui contient ces diverses valeurs de 1 fr.

1 fr. après 4 ans valant 1f,215 506, il s'agit de trouver en combien de mois 1f,215 506 rapportera 1,2307 — 1,215 506 = 0f,015 194, ce qui se fait en opérant comme au 5° du n° 359.

En 12 mois le capital 1f,215 506 rapporte 1f,215 506 × 0,05, et en un mois $\frac{1{,}215\,506 \times 0{,}05}{12}$.

Le nombre de mois pendant lequel il rapportera 0f,015 194 est alors

$$0{,}015\,194 : \frac{1{,}215\,506 \times 0{,}05}{12} = \frac{0{,}015\,194 \times 12}{1{,}215\,506 \times 0{,}05} = 3 \text{ mois.}$$

La durée totale du prêt est donc de 4 ans 3 mois.

361. La table suivante contient, jusqu'à 60 ans, l'intérêt étant composé :

1° Colonne *a*, la valeur acquise par 1 fr. après chaque année du prêt. Chaque valeur est égale à la valeur de 1 fr. après un an, élevée à une puissance d'un exposant égal à la durée du prêt. Ainsi, après 4 ans, à 5 °/₀, la valeur est $1{,}05^4 = 1^f{,}215\,506$ (1° du n° 360).

2° Colonne *b*, la valeur actuelle de 1 fr. payable dans 1, 2, 3, ... 60 ans. La valeur actuelle de 1 fr. payable dans 7 ans, par exemple, le taux étant à 5 °/₀, est égale a $\frac{1}{1{,}05^7} = 0{,}710\,681$, c'est-à-dire à 1 fr. divisé par la 7e puissance de la valeur 1,05 de 1 fr. après un an (2° du n° 360).

3° Colonne *c*, le capital acquis après chaque année, pour un placement annuel de 1 fr. Il est à remarquer que le capital acquis après 5 ans, par exemple, à 5 °/₀, est égal à la somme 5,801 913 des valeurs des 5 premières années de la colonne *a*.

4° Colonne *d*, la valeur actuelle d'une rente annuelle de 1 fr. payable pendant 1, 2, 3, ... 60 ans. Ainsi, à 5 °/₀, une rente annuelle de 1 fr. payable pendant 6 ans, par exemple, vaut au commencement de la 1re année 5f,075 692, et il est à remarquer que cette valeur est égale à la somme des valeurs des 6 premières années de la colonne *b*.

ans.	1 0/0.				ans.	2 0/0.			
	a	*b*	*c*	*d*		*a*	*b*	*c*	*d*
1	1,01	0,990099	1,01	0,990099	1	1,02	0,980392	1,02	0,980392
2	1,020100	980296	2,030100	1,970395	2	1,040400	961169	2,060400	1,941561
3	1,030301	970590	3,060401	2,940985	3	1,061208	942322	3,121608	2,883883
4	1,040604	960980	4,101005	3,901966	4	1,082432	923845	4,204040	3,807729
5	1,051010	951466	5,152015	4,853431	5	1,104081	905731	5,308121	4,713460
6	1,061520	942045	6,213535	5,795477	6	1,126162	887971	6,434283	5,601431
7	1,072135	932718	7,285671	6,728195	7	1,148686	870560	7,582969	6,471991
8	1,082857	923483	8,368527	7,651678	8	1,171659	853490	8,754628	7,325481
9	1,093685	914340	9,462213	8,566018	9	1,195093	836755	9,949721	8,162237
10	1,104622	905287	10,566835	9,471305	10	1,218994	820348	11,168715	8,982585
11	1,115668	896324	11,682503	10,367628	11	1,243374	804263	12,412090	9,786848
12	1,126825	887449	12,809328	11,255078	12	1,268242	788493	13,680332	10,575341
13	1,138093	878663	13,947421	12,133740	13	1,293607	773033	14,973938	11,348374
14	1,149474	869963	15,096896	13,003703	14	1,319479	757875	16,293417	12,106249
15	1,160969	861350	16,257864	13,865053	15	1,345868	743015	17,639285	12,849264
16	1,172579	852821	17,430443	14,717874	16	1,372786	728446	19,012071	13,577709
17	1,184304	844378	18,614748	15,562251	17	1,400241	714163	20,412312	14,291872
18	1,196147	836017	19,810895	16,398269	18	1,428246	700159	21,840559	14,992031
19	1,208109	827740	21,019004	17,226009	19	1,456811	686431	23,297370	15,678462
20	1,220190	819545	22,239194	18,045553	20	1,485947	672971	24,783317	16,351433
21	1,232392	811430	23,471586	18,856983	21	1,515066	659776	26,298984	17,011209
22	1,244716	803396	24,716302	19,660379	22	1,545980	646839	27,844963	17,658048
23	1,257163	795442	25,973465	20,455821	23	1,576899	634156	29,421862	18,292204
24	1,269735	787566	27,243200	21,243387	24	1,608437	621722	31,030300	18,913926
25	1,282432	779768	28,525631	22,023156	25	1,640606	609531	32,670906	19,523457
26	1,295256	772048	29,820888	22,795204	26	1,673418	597579	34,344324	20,121036
27	1,308209	764404	31,129097	23,559608	27	1,706886	585862	36,051210	20,706898
28	1,321291	756836	32,450388	24,316443	28	1,741024	574375	37,792235	21,281272
29	1,334504	749342	33,784892	25,065785	29	1,775845	563112	39,568079	21,844385
30	1,347849	741923	35,132740	25,807708	30	1,811362	552071	41,379441	22,396456
31	1,361327	734577	36,49107	26,542285	31	1,847589	541246	43,22703	22,937702
32	1,374941	727304	37,86901	27,269590	32	1,884541	530633	45,11157	23,468335
33	1,388690	720103	39,25770	27,989693	33	1,922231	520229	47,03380	23,988564
34	1,402577	712973	40,66028	28,702666	34	1,960676	510028	48,99448	24,498592
35	1,416603	705914	42,07688	29,408580	35	1,999890	500028	50,99437	24,998619
36	1,430769	698925	43,50765	30,107505	36	2,039887	490223	53,03426	25,488843
37	1,445076	692005	44,95272	30,799510	37	2,080685	480611	55,11494	25,969453
38	1,459527	685153	46,41225	31,484663	38	2,122299	471187	57,23724	26,440641
39	1,474123	678370	47,88637	32,163033	39	2,164745	461948	59,40198	26,902589
40	1,488864	671653	49,37524	32,834686	40	2,208040	452890	61,61002	27,355479
41	1,503752	665003	50,87899	33,499689	41	2,252200	444010	63,86222	27,799490
42	1,518790	658419	52,39778	34,158108	42	2,297244	435304	66,15947	28,234794
43	1,533978	651900	53,93176	34,810008	43	2,343189	426769	68,50266	28,661562
44	1,549318	645446	55,48108	35,455454	44	2,390053	418401	70,89271	29,079963
45	1,564811	639055	57,04589	36,094508	45	2,437854	410197	73,33056	29,490160
46	1,580459	632728	58,62634	36,727236	46	2,486611	402154	75,81718	29,892314
47	1,596263	626463	60,22261	37,353699	47	2,536344	394268	78,35352	30,286582
48	1,612226	620260	61,83483	37,973960	48	2,587070	386538	80,94059	30,673120
49	1,628348	614119	63,46318	38,588079	49	2,638812	378958	83,57940	31,052078
50	1,644632	608039	65,10781	39,196118	50	2,691588	371528	86,27099	31,423606
51	1,661078	602019	66,76889	39,798136	51	2,745420	364243	89,01641	31,787849
52	1,677689	596058	68,44658	40,394194	52	2,800328	357101	91,81674	32,144950
53	1,694466	590157	70,14105	40,984351	53	2,856335	350099	94,67307	32,495049
54	1,711410	584313	71,85246	41,568664	54	2,913461	343234	97,58653	32,838283
55	1,728525	578528	73,58098	42,147192	55	2,971731	336504	100,55826	33,174788
56	1,745810	572800	75,32679	42,719992	56	3,031165	329906	103,58943	33,504694
57	1,763268	567129	77,09006	43,287121	57	3,091789	323437	106,68122	33,828131
58	1,780901	561514	78,87096	43,848635	58	3,153624	317096	109,83484	34,145227
59	1,798710	555954	80,66967	44,404589	59	3,216697	310878	113,05154	34,456104
60	1,816697	550450	82,48637	44,955038	60	3,281031	304782	116,33257	34,760887

ans.	3 0/0.				ans.	3 1/2 0/0.			
	a	*b*	*c*	*d*		*a*	*b*	*c*	*d*
1	1,03	0,970 874	1,03	0,970 874	1	1,035	0,966 184	1,035	0,966 184
2	1,060 900	942 596	2,090 900	1,913 470	2	1,071 225	933 511	2,106 225	1,899 694
3	1,092 727	915 142	3,183 627	2,828 611	3	1,108 718	901 943	3,214 943	2,801 637
4	1,125 509	688 487	4,309 136	3,717 098	4	1,147 523	871 442	4,362 466	3,673 079
5	1,159 274	862 609	5,468 410	4,579 707	5	1,187 686	841 973	5,550 152	4,515 052
6	1,194 052	837 484	6,662 462	5,417 191	6	1,229 255	813 501	6,779 408	5,328 553
7	1,229 874	813 092	7,892 336	6,230 283	7	1,272 279	785 991	8,051 687	6,114 544
8	1,266 770	789 409	9,159 106	7,019 692	8	1,316 809	759 412	9,368 496	6,873 956
9	1,304 773	766 417	10,463 879	7,786 109	9	1,362 897	733 731	10,731 393	7,607 687
10	1,343 916	744 094	11,807 796	8,530 203	10	1,410 599	708 919	12,141 992	8,316 605
11	1,384 234	722 421	13,192 030	9,252 624	11	1,459 970	684 946	13,601 962	9,001 551
12	1,425 761	701 380	14,617 790	9,954 004	12	1,511 069	661 783	15,113 030	9,663 334
13	1,468 534	680 951	16,086 324	10,634 955	13	1,563 956	639 404	16,676 986	10,302 739
14	1,512 590	661 118	17,598 914	11,296 073	14	1,618 695	617 782	18,295 681	10,920 520
15	1,557 967	641 862	19,156 881	11,937 935	15	1,675 349	596 891	19,971 030	11,517 411
16	1,604 706	623 167	20,761 588	12,561 102	16	1,733 986	576 706	21,705 016	12,094 117
17	1,652 848	605 016	22,414 435	13,166 119	17	1,794 676	557 204	23,499 691	12,651 321
18	1,702 433	587 395	24,116 868	13,753 513	18	1,857 489	538 361	25,357 180	13,189 682
19	1,753 506	570 286	25,870 374	14,323 799	19	1,922 501	520 156	27,279 682	13,709 837
20	1,806 111	553 676	27,676 486	14,877 475	20	1,989 789	502 566	29,269 471	14,212 403
21	1,860 295	537 549	29,536 780	15,415 024	21	2,059 431	485 571	31,328 902	14,697 974
22	1,916 103	521 893	31,452 884	15,936 917	22	2,131 512	469 151	33,460 414	15,167 125
23	1,973 587	506 692	33,426 470	16,443 608	23	2,206 114	453 286	35,666 528	15,620 411
24	2,032 794	491 934	35,459 264	16,935 542	24	2,283 328	437 957	37,949 857	16,058 368
25	2,093 778	477 606	37,553 042	17,413 148	25	2,363 245	423 147	40,313 102	16,481 515
26	2,156 591	463 695	39,709 634	17,876 842	26	2,445 959	408 838	42,759 060	16,890 352
27	2,221 289	450 189	41,930 923	18,327 032	27	2,531 567	395 012	45,290 627	17,285 365
28	2,287 928	437 077	44,218 850	18,764 108	28	2,620 172	381 654	47,910 799	17,667 019
29	2,356 566	424 346	46,575 416	19,188 455	29	2,711 878	368 748	50,622 677	18,035 767
30	2,427 262	411 987	49,002 678	19,600 441	30	2,806 794	356 278	53,429 471	18 392 045
31	2,500 080	399 987	51,502 76	20,000 429	31	2,905 031	344 230	56,334 50	18,736 276
32	2,575 083	388 337	54,077 81	20,388 766	32	3,006 708	332 590	59,341 21	19,068 866
33	2,652 335	377 026	56 730 18	20,765 792	33	3,111 942	321 343	62,453 15	19,390 208
34	2,731 905	366 045	59,462 08	21,131 837	34	3,220 860	310 476	65,674 01	19,700 684
35	2,813 862	355 383	62,275 94	21,487 220	35	3,333 590	299 977	69,007 60	20,000 661
36	2,898 278	345 032	65,174 22	21,832 253	36	3,450 266	289 833	72,457 87	20,290 494
37	2,985 227	334 983	68,159 45	22,167 235	37	3.571 025	280 032	76,028 90	20,570 525
38	3,074 783	325 226	71,234 23	22,492 462	38	3,696 011	270 562	79,724 91	20,841 087
39	3,167 027	315 754	74,401 26	22,808 215	39	3,825 372	261 413	83,550 28	21,102 500
40	3,262 038	306 557	77,663 30	23,114 772	40	3,959 260	252 573	87,509 54	21,355 072
41	3,359 899	297 628	81,023 20	23,412 400	41	4,097 834	244 031	91,607 37	21,599 104
42	3,460 696	288 959	84,483 89	23,701 359	42	4.241 258	235 779	95,848 63	21,834 883
43	3,564 517	280 543	88,043 41	23,981 902	43	4,389 702	227 806	100,238 33	22,062 689
44	3,671 452	272 372	91,719 86	24,254 274	44	4,543 342	220 102	104,781 67	22,282 791
45	3,781 596	264 439	95,501 46	24,518 713	45	4,702 359	212 659	109,484 03	22,495 450
46	3,895 044	256 737	99,396 50	24,775 449	46	4,866 941	205 468	114,350 97	22,700 918
47	4,011 895	249 259	103,408 40	25,024 708	47	5,037 284	198 520	119,388 26	22,899 438
48	4,132 252	241 999	107,540 65	25,266 707	48	5,213 589	191 807	124,601 85	23,091 244
49	4,256 219	234 950	111,796 87	25,501 657	49	5,396 065	185 320	129,997 91	23,276 565
50	4,383 906	228 107	116,180 77	25,729 764	50	5,584 927	179 053	135,582 84	23,455 618
51	4,515 423	221 463	120,696 20	25,951 227	51	5,780 399	172 998	141,363 24	23,628 616
52	4,650 886	215 013	125,347 08	26,166 240	52	5,982 713	167 148	147,345 95	23,795 765
53	4,790 412	208 750	130,137 49	26,374 990	53	6,192 108	161 496	153,538 06	23,957 260
54	4,934 125	202 670	135,071 62	26,577 661	54	6,408 832	156 035	159,946 89	24,113 295
55	5,082 149	196 767	140,153 77	26,774 428	55	6,633 141	150 758	166.580 03	24,264 053
56	5,234 613	191 036	145,388 38	26,965 464	56	6,865 301	145 660	173,445 33	24,409 713
57	5,391 651	185 472	150,780 03	27,150 936	57	7,105 587	140 734	180,550 92	24,550 448
58	5,553 401	180 070	156,333 43	27,331 006	58	7,354 282	135 975	187,905 20	24,686 423
59	5,720 003	174 825	162,053 44	27,505 831	59	7,611 682	131 377	195,516 88	24.817 800
60	5,891 603	169 733	167,945 04	27,675 564	60	7,878 091	126 934	203,394 97	24,941 734

ans.	4 0/0.				ans.	4 1/2 0/0.			
	a	*b*	*c*	*d*		*a*	*b*	*c*	*d*
1	1,04	0,961 539	1,04	0,961 539	1	1,045	0,956 938	1,045	0,956 938
2	1,081 600	924 556	2,121 600	1,886 095	2	1.092 025	915 730	2,137 025	1,872 668
3	1,124 864	888 996	3,246 464	2,775 091	3	1.141 166	876 297	3.278 191	2,748 964
4	1,169 859	854 804	4,416 323	3,629 895	4	1,192 519	838 561	4.470 710	3,587 326
5	1,216 653	821 927	5,632 975	4,451 822	5	1,246 182	802 451	5,716 892	4 389 977
6	1,265 319	790 315	6,898 294	5,242 137	6	1,302 260	767 896	7,019 152	5,157 873
7	1,315 932	759 918	8,214 226	6,002 055	7	1,360 862	734 829	8,380 014	5,892 701
8	1,368 569	730 690	9,582 795	6,732 745	8	1,422 101	703 185	9,802 114	6,595 886
9	1,423 312	702 587	11,006 107	7,435 332	9	1,486 095	672 904	11,288 209	7,268 791
10	1,480 244	675 564	12,486 351	8,110 896	10	1,552 969	643 928	12,841 179	7,912 718
11	1,539 454	649 581	14,025 805	8,760 477	11	1,622 853	616 199	14,464 032	8,528 917
12	1,601 032	624 597	15,626 838	9,385 074	12	1,695 881	589 664	16,159 913	9,118 581
13	1,665 074	600 574	17,291 911	9,985 648	13	1,772 196	564 272	17,932 109	9,682 852
14	1,731 676	577 475	19,023 588	10,563 123	14	1,851 945	539 973	19,784 054	10,222 825
15	1,800 944	555 265	20,824 531	11,118 387	15	1,935 282	516 720	21,719 337	10,739 546
16	1,872 981	533 908	22,697 512	11,652 296	16	2,022 370	494 469	23,741 707	11,234 015
17	1,947 900	513 373	24,645 413	12,165 669	17	2,113 377	473 176	25,855 084	11,707 191
18	2,025 817	493 628	26,671 229	12,659 297	18	2,208 479	452 800	28,063 562	12,159 992
19	2,106 849	474 642	28,778 079	13,133 939	19	2,307 860	433 302	30,371 423	12,593 294
20	2,191 123	456 387	30,969 202	13,590 326	20	2,411 714	414 643	32,783 137	13,007 937
21	2,278 768	438 834	33,247 970	14,029 160	21	2,520 241	396 787	35,303 378	13,404 724
22	2,369 919	421 955	35,617 889	14,451 115	22	2,633 652	379 701	37.937 030	13,784 425
23	2,464 716	405 726	38,082 604	14,856 842	23	2,752 166	363 350	40.689 196	14,147 775
24	2,563 304	390 122	40,645 908	15,246 963	24	2,876 014	347 704	43.565 210	14,495 478
25	2,665 836	375 117	43,311 745	15,622 080	25	3,005 434	332 731	46,570 645	14,828 209
26	2,772 470	360 689	46,084 214	15,982 769	26	3,140 679	318 403	49,711 324	15,146 611
27	2.883 369	346 817	48,967 583	16,329 586	27	3,282 010	304 691	52,993 333	15,451 303
28	2,998 703	333 478	51,966 286	16,663 063	28	3,429 700	291 571	56,423 033	15.742 874
29	3,118 651	320 651	55,084 938	16,983 715	29	3,584 036	279 015	60,007 070	16,021 889
30	3,243 398	308 319	58,328 335	17,292 033	30	3,745 318	267 000	63,752 388	16,288 889
31	3,373 133	296 460	61,701 47	17,588 494	31	3,913 857	255 502	67,666 25	16,544 391
32	3,508 059	285 058	65,209 53	17,873 552	32	4,089 981	244 500	71,756 23	16,788 891
33	3,648 381	274 094	68,857 91	18,147 646	33	4,274 030	233 971	76,030 26	17,022 862
34	3,794 316	263 552	72,652 23	18,411 198	34	4,466 362	223 896	80,496 62	17,246 758
35	3,946 089	253 416	76,598 31	18,664 613	35	4,667 348	214 254	85,163 97	17,461 012
36	4,103 933	243 669	80,702 25	18,908 282	36	4,877 378	205 028	90,041 34	17,666 041
37	4,268 090	234 297	84,970 34	19,142 579	37	5,096 860	196 199	95,138 21	17,862 240
38	4,438 813	225 285	89,409 15	19,367 864	38	5,326 219	187 750	100,464 42	18,049 990
39	4,616 366	216 621	94,025 52	19,584 485	39	5,565 899	179 666	106,030 32	18,229 656
40	4,801 021	208 289	98,826 54	19,792 774	40	5,816 365	171 929	111,846 69	18,401 584
41	4,993 061	200 278	103,819 60	19,993 052	41	6,078 101	164 525	117,924 79	18,566 110
42	5,192 784	192 575	109,012 38	20,185 627	42	6,351 615	157 440	124,276 40	18,723 550
43	5,400 495	185 168	114,412 88	20,370 795	43	6,637 438	150 661	130,913 84	18,874 210
44	5,616 515	178 046	120,029 39	20,548 841	44	6,936 123	144 173	137,849 97	19,018 383
45	5,841 176	171 198	125,870 57	20,720 040	45	7,248 248	137 964	145,098 21	19,156 347
46	6,074 823	164 614	131,945 39	20,884 654	46	7,574 420	132 023	152,672 63	19,288 371
47	6,317 816	158 283	138,263 21	21,042 936	47	7,915 268	126 338	160,587 90	19,414 709
48	6,570 528	152 195	144,833 73	21,195 131	48	8,271 456	120 898	168,859 36	19,535 607
49	6,833 349	146 341	151,667 08	21,341 472	49	8,643 671	115 692	177,503 03	19,651 298
50	7,106 683	140 713	158,773 77	21,482 185	50	9,032 636	110 710	186,535 67	19,762 008
51	7,390 951	135 301	166,164 72	21,617 485	51	9,439 105	105 942	195.974 77	19.867 950
52	7,686 589	130 097	173,851 31	21.747 582	52	9,863 865	101 380	205,838 63	19,969 330
53	7,994 052	125 093	181,845 36	21,872 675	53	10,307 739	097 015	216,146 37	20,066 345
54	8,313 814	120 282	190.159 17	21,992 957	54	10,771 587	092 837	226.917 96	20,159 182
55	8,646 367	115 656	198,805 54	22,108 612	55	11,256 308	088 839	238,174 27	20,248 021
56	8,992 222	111 207	207,797 76	22,219 819	56	11,762 842	085 014	249,937 11	20,333 034
57	9,351 910	106 930	217,149 67	22,326 749	57	12,292 170	081 353	262,229 28	20,414 387
58	9,725 987	102 817	226,875 66	22,429 567	58	12,845 318	077 849	275,074 60	20,492 236
59	10,115 026	098 863	236,990 69	22,528 430	59	13,423 357	074 497	288,497 95	20,566 733
60	10,519 627	095 060	247,510 31	22,623 490	60	14,027 408	071 289	302,525 36	20,638 022

ans	5 0/0.				ans.	6 0/0.			
	a	*b*	*c*	*d*		*a*	*b*	*c*	*d*
1	1,05	0,952 381	1,05	0,952 381	1	1,06	0,943 396	1,06	0,943 396
2	1,102 500	907 030	2,152 500	1,859 410	2	1,123 600	889 996	2,183 600	1,833 393
3	1,157 625	863 838	3,310 125	2,723 248	3	1,191 016	839 619	3,374 616	2,673 012
4	1,215 506	822 703	4,525 631	3,545 951	4	1,262 477	792 094	4,637 093	3,465 106
5	1,276 282	783 526	5,801 913	4,329 477	5	1,338 226	747 258	5,975 319	4,212 364
6	1,340 096	746 215	7,142 008	5,075 692	6	1,418 519	704 961	7,393 838	4,917 324
7	1,407 100	710 681	8,549 109	5,786 373	7	1,503 630	665 057	8,897 468	5,582 381
8	1,477 455	676 839	10,026 564	6,463 213	8	1,593 848	627 412	10,491 316	6,209 794
9	1,551 328	644 609	11,577 893	7,107 822	9	1,689 479	591 899	12,180 795	6,801 692
10	1,628 895	613 913	13,206 787	7,721 735	10	1,790 848	558 395	13,971 643	7,360 087
11	1,710 339	584 679	14,917 127	8,306 414	11	1,898 299	526 788	15,869 941	7,886 875
12	1,795 856	556 837	16,712 983	8,863 252	12	2,012 196	496 969	17,882 138	8,383 844
13	1,885 649	530 321	18,598 632	9,393 573	13	2,132 928	468 839	20,015 066	8,852 683
14	1,979 932	505 068	20,578 564	9,898 641	14	2,260 904	442 301	22 275 970	9,294 984
15	2,078 928	481 017	22,657 492	10,379 658	15	2,396 558	417 265	24,672 528	9,712 249
16	2,182 875	458 112	24,840 366	10,837 770	16	2,540 352	393 646	27,212 880	10,105 895
17	2,292 018	436 297	27,132 385	11,274 066	17	2,692 773	371 364	29,905 653	10,477 260
18	2,406 619	415 521	29,539 004	11,689 587	18	2,854 339	350 344	32,759 992	10,827 604
19	2,526 950	395 734	32,065 954	12,085 321	19	3,025 600	330 513	35,785 591	11,158 117
20	2,653 298	376 890	34,719 252	12,462 210	20	3,207 135	311 805	38,992 727	11,469 921
21	2,785 963	358 942	37,505 214	12,821 153	21	3,399 564	294 155	42,392 290	11,764 077
22	2,925 261	341 850	40,430 475	13,163 003	22	3,603 537	277 505	45 995 828	12,041 582
23	3,071 524	325 571	43,501 999	13,488 574	23	3,819 750	261 797	49,815 577	12,303 379
24	3,225 100	310 068	46,727 099	13,798 642	24	4,048 935	246 979	53,864 512	12,550 358
25	3,386 355	295 303	50,113 454	14,093 945	25	4,291 871	232 999	58,156 383	12,783 356
26	3,555 673	281 241	53,669 126	14,375 185	26	4,549 383	219 810	62,705 766	13,003 166
27	3,733 456	267 848	57,402 583	14,643 034	27	4,822 346	207 368	67,528 112	13,210 534
28	3,920 129	255 094	61,322 712	14,898 127	28	5,111 687	195 630	72,639 798	13,406 164
29	4,116 136	242 946	65,438 848	15,141 074	29	5,418 388	184 557	78,058 186	13,590 721
30	4,321 942	231 377	69,760 790	15,372 451	30	5,743 491	174 110	83,801 677	13,764 831
31	4,538 039	220 360	74,298 83	15,592 811	31	6,088 101	164 255	89,889 78	13,929 086
32	4,764 941	209 866	79,063 77	15,802 677	32	6,453 387	154 957	96,343 17	14,084 043
33	5,003 189	199 873	84,066 96	16,002 549	33	6,840 590	146 166	103,183 76	14,230 230
34	5,253 348	190 355	89,320 31	16,192 904	34	7,251 025	137 912	110.434 78	14,368 141
35	5,516 015	181 290	94,836 32	16,374 194	35	7,686 087	130 105	118,120 67	14,498 246
36	5,791 816	172 657	100,628 14	16,546 852	36	8,147 252	122 741	126,268 12	14,620 987
37	6,081 407	164 436	106,709 55	16,711 287	37	8,636 087	115 793	134,904 21	14,736 780
38	6,385 477	156 605	113,095 02	16,867 893	38	9,154 252	109 239	144,058 46	14,846 019
39	6,704 751	149 148	119,799 77	17,017 041	39	9,703 507	103 056	153,761 97	14,949 075
40	7,039 989	142 046	126,839 76	17,159 056	40	10.285 718	097 222	164,047 68	15,046 297
41	7,391 988	135 282	134,231 75	17,294 368	41	10,902 861	091 719	174,950 55	15,135 016
42	7,761 588	128 840	141,993 34	17,423 208	42	11.557 033	086 527	186,507 58	15,224 543
43	8,149 667	122 704	150,143 01	17,545 912	43	12,250 455	081 630	198,758 03	15,306 173
44	8,557 150	116 861	158,700 16	17,662 773	44	12,985 482	077 009	211,743 51	15,383 182
45	8,985 008	111 297	167,685 16	17,774 070	45	13,764 611	072 650	225,508 13	15,455 832
46	9,434 258	105 997	177,119 42	17,880 067	46	14,590 487	068 538	240,098 61	15,524 370
47	9,905 971	100 949	187,025 39	17,981 016	47	15.465 917	064 658	255.564 53	15,589 028
48	10,401 270	096 142	197,426 60	18,077 158	48	16,393 872	060 998	271,958 40	15.650 027
49	10,921 333	091 564	208,348 00	18,168 722	49	17,377 504	057 546	289.335 91	15,707 572
50	11,467 400	087 204	219,815 40	18,255 926	50	18,420 154	054 288	307,756 06	15,761 861
51	12,040 770	083 051	231,856 17	18,338 977	51	19,525 364	051 215	327,231 42	15,813 076
52	12,642 808	079 096	244,498 97	18,418 073	52	20,696 885	048 316	347,978 81	15,861 393
53	13,274 949	075 330	257,773 92	18,493 403	53	21,938 698	045 582	369,917 01	15,906 974
54	13,938 696	071 743	271,712 62	18,565 146	54	23,255 020	043 002	393,172 03	15,949 976
55	14,635 631	068 326	286,348 25	18,633 472	55	24,650 322	040 567	417,822 85	15,990 543
56	15,367 412	065 073	301,715 66	18,698 545	56	26,129 341	038 271	443,951 69	16,028 814
57	16,135 783	061 974	317,851 44	18,760 519	57	27.697 101	036 105	471,648 79	16.064 919
58	16,942 572	059 023	334,794 02	18,819 542	58	29,358 927	034 061	501,007 72	16,098 980
59	17,789 701	056 212	352,583 72	18,875 754	59	31,120 463	032 133	532,128 18	16,131 113
60	18,679 186	053 536	371,262 90	18,929 290	60	32,987 691	030 314	565,115 87	16,161 428

RENTES SUR L'ÉTAT, ACTIONS ET OBLIGATIONS.

362. On appelle *rente sur l'État*, l'intérêt que le gouvernement paye pour un capital non remboursable qu'il doit à des particuliers et à des établissements publics, et qui provient d'emprunts faits à différentes époques.

363. Une *inscription au grand livre* est le titre qui constate la propriété d'une certaine rente.

Tout créancier de l'État peut vendre son inscription en totalité ou en partie. Cette vente se fait à la criée, à la bourse de Paris, par l'intermédiaire d'un agent de change, qui en fait le *transfert*. Les prix obtenus forment les *cours de la rente*, cotés à la bourse, et publiés dans les journaux; ainsi quand on voit le 3 p. 100 coté à 70f,50, cela veut dire que 3 fr. de rente se sont vendus 70f,50 ce jour-là; de même le 4 1/2 p. 100 étant coté à 94, cela indique que 4f,50 de rente se sont vendus 94 fr.

On dit qu'une *rente est au pair*, selon qu'étant en 3 p. 100 ou en 4 1/2 p. 100, 3 fr. ou 4f,50 de rente se vendent 100 fr.

364. En France la rente sur l'État est en 3 p. 100 et en 4 1/2 p. 100. Elle se paye par semestre, le 22 juin et le 22 décembre pour le 3 p. 100, et le 22 mars et le 22 septembre pour le 4 1/2 p. 100. A Paris le payement a lieu au ministère des finances; dans les départements il se fait chez les receveurs généraux.

En 1862 le 4 1/2 p. 100 a été en partie converti en un 3 p. 100 nouveau, dont les arrérages sont payés par trimestre, les 1ers avril, juillet, octobre et janvier. La conversion ayant été facultative pour les rentiers, elle n'a pas été générale, et il reste encore du 4 1/2 p. 100.

365. *Problèmes sur les rentes* :

1° *Combien coûteront* 900 *fr. de rente* 3 *p.* 100 *au cours de* 70f,50?

3 fr. coûtant 70f,50, 1 fr. coûtera $\frac{70,50}{3}$, et 900 fr.,

$$\frac{70,50 \times 900}{3} = 21\,150 \text{ fr.}$$

2° *Combien aura-t-on de rente* 3 *p.* 100 *au cours de* 70f,50 *pour* 21 150 *fr.?*

Pour 1 fr. on en aura $\frac{3}{70,50}$, et pour 21 150 fr.,

$$\frac{3 \times 21\,150}{70,50} = 900 \text{ fr.}$$

3° 900 *fr. de rente* 3 *p.* 100 *coûtent* 21 150 *fr., quel est le cours de la rente?*

1 fr. coûtant $\frac{21\,150}{900}$, 3 fr. coûtent

$$\frac{21\,150 \times 3}{900} = 70^f,50.$$

366. *Actions et obligations industrielles.* Pour faire une grande entreprise industrielle, comme l'exécution d'un chemin de fer ou d'un canal, par exemple, le capital primitif nécessaire pour l'établissement et l'exploitation se divise en petites parties appelées *actions*, qui sont souscrites en nombres différents par un plus ou moins grand nombre de *bailleurs de fonds*, appelés *actionnaires*. Les bénéfices de l'entreprise sont employés à la fin de chaque année à servir aux actionnaires l'intérêt de la valeur d'émission de leurs actions, et le surplus leur est partagé à titre de *dividende*, en parties proportionnelles aux nombres des actions dont ils sont *porteurs*. Ordinairement les intérêts et le dividende ne se payent pas ensemble, mais bien à six mois d'intervalle; les actionnaires reçoivent ainsi leurs rentes annuelles en deux fois.

Par suite d'une plus grande extension donnée à une entreprise, il peut être émis de nouvelles actions, que les premiers actionnaires ont la préférence de souscrire avant tout autre. Au lieu de nouvelles actions, une société peut faire un emprunt, qu'elle divise en petites parties appelées *obligations*, qui sont remboursables en nombre déterminé chaque année par voie de tirage.

Les obligations étant garanties par les propriétés et le matériel de l'entreprise, et leur intérêt étant servi avant celui des actions, elles constituent un placement plus sûr que celui des actions, mais qui n'a pas l'avantage de participer au partage du dividende qui peut exister. L'intérêt des obligations se paye deux fois par an.

Comme les rentes sur l'État, les actions et les obligations des grandes entreprises sont négociées à la bourse par l'intermédiaire d'un agent de change.

Quand l'État ou une compagnie fait un emprunt, ou bien le capital emprunté est fixé à l'avance, et alors le montant des inscriptions ou le nombre des obligations dépend de la situation du crédit de l'État ou de la compagnie au moment de l'emprunt; ou bien le montant des inscriptions ou le nombre des obligations est déterminé, et alors le capital encaissé dépend de la situation du crédit. Par exemple, si une compagnie émet des obligations de 500 fr. à 3 p. 100, remboursables en 60 ans par voie de tirage et suivant une progression déterminée à l'avance, chaque obligation ne donnant que 15 fr. d'intérêt, elle ne trouvera de souscripteur qu'à un chiffre inférieur à 500 fr., chiffre que l'avantage d'un remboursement plus ou moins prochain à 500 fr. et le succès plus ou moins assuré de la compagnie tendront encore à modifier. Aujourd'hui, les obligations de 500 fr. à 3 p. 100 des chemins de fer français sont cotées à 310 fr. environ, et leur émission s'est faite, il y a quelques années, à un prix encore inférieur.

Les problèmes sur les actions et les obligations se résolvent par une marche analogue à ceux sur les rentes (365).

RÈGLES D'ESCOMPTES.

367. Un *billet à ordre* ou une *lettre de change* est une promesse écrite de payer une somme d'argent à une époque désignée, appelée *échéance*.

Modèles d'un billet à ordre et d'une lettre de change.

Timbre.

B. P. F. 2000.

Au premier juin prochain je payerai à l'ordre de M. Albert, papetier, la somme de *deux mille francs*, valeur reçue en marchandises.

Paris, le premier mars mil huit cent...

GALLAIS,

Rue , n° .

Paris, le premier mars 18...

Timbre.

B. P. F. 3000.

Au premier juin prochain payez, par cette *première* de change, à l'ordre de M. Albert, papetier, la somme de *trois mille francs*, valeur reçue comptant, que passerez suivant, ou sans autre avis.

A Monsieur
André, négociant à Orléans.

GALLAIS.

Si Albert donne le billet à ordre ou la lettre de change en payement à un tiers ou s'il le fait escompter, il l'*endosse*, c'est-à-dire qu'il appose sa signature au dos; il peut y avoir plusieurs endosseurs. L'acquit s'écrit également au dos.

Passé à l'ordre de M. Samuel, valeur en compte.

Paris, le 6 mars 18...

ALBERT,

Rue , n°

Passé à l'ordre de M. Robert, valeur reçue en marchandises.

Orléans, le 19 mars 18...

SAMUEL.

Pour acquit :

ROBERT.

Timbre.

Avant de se servir d'une lettre de change venant de l'étranger ou des colonies où le timbre n'est pas établi, on colle au dos un timbre mobile, sur lequel on écrit :

Bon pour annulation du timbre. Paris, le...... Signature.

L'endos ou l'acquit se met au-dessous du timbre.

368. L'*escompte* est la retenue faite sur le montant d'un billet quand on le touche avant son échéance (367).

Il y deux sortes d'escomptes : l'*escompte en dedans* et l'*escompte en dehors*.

369. L'*escompte en dedans* est l'intérêt simple du montant du billet évalué argent comptant, cet intérêt étant compté du jour où l'on escompte le billet à celui de l'échéance (4° n° 359). Ainsi la somme que l'on reçoit, placée à intérêt simple au taux de l'escompte, depuis le jour de l'escompte jusqu'à celui de l'échéance, reproduit le montant du billet. Cet escompte est donc très-équitable.

Problème. Quel est l'escompte en dedans, à 6 p. 100 par an, pour une somme de 4745f,25 payable dans 327 jours?

Ce problème revient à évaluer la somme 4 745f,25 argent comptant (4° n° 359), et à retrancher le résultat trouvé de cette somme.

Or l'intérêt de 1 fr. pour 327 jours, à 6 p. 100, étant (3° n° 359)

$$1 \times \frac{327}{6\,000} = \frac{327}{6\,000} \text{ fr.},$$

$1 + \frac{327}{6\,000} = \frac{6\,327}{6\,000}$ fr. après 327 jours valent 1 fr. argent comptant, et par conséquent 4 745f,25 valent

$$4\,745^f,25 : \frac{6\,327}{6\,000} = \frac{4\,745^f,25 \times 6\,000}{6\,327} = 4\,500 \text{ fr.}$$

L'escompte demandé est donc 4 745f,25 — 4 500 = 245f,25.

Les autres problèmes qu'on peut se proposer sur l'escompte en dedans, en prenant pour inconnue soit le temps, soit la somme escomptée, ou encore le taux, se résolvent comme les questions analogues d'intérêt simple (359).

370. L'*escompte en dehors*, qui est le seul usité en France, est l'intérêt simple du montant même du billet, cet intérêt étant compté du jour de l'escompte à celui de l'échéance.

Ainsi l'escompte en dehors se compose de l'intérêt du montant du billet évalué argent comptant, c'est-à-dire de l'escompte en dedans (369), plus l'intérêt de l'escompte en dedans. Il en résulte que la somme que l'on reçoit, placée à intérêt simple au taux de l'escompte, depuis le jour de l'escompte jusqu'à celui de l'échéance, ne peut pas reproduire le montant du billet.

Problèmes. De la définition de l'escompte en dehors, il résulte que tous les problèmes que l'on peut se proposer, en prenant pour inconnue l'escompte, le taux de l'escompte, le montant du billet ou le temps

qui s'écoule du jour de l'escompte à celui de l'échéance, se résoudront comme les questions analogues sur les intérêts simples (359).

1° *Quel est l'escompte en dehors, à 6 p. 100 par an, pour un billet de 4745f,25 payable dans 327 jours?*

Cet escompte est (3° n° 359).

$$\frac{4745,25 \times 327}{6000} = 258^f,61$$

La somme reçue comptant est alors 4745,25 — 258,61 = 4486,64.

Ces résultats sont sensiblement différents de ceux trouvés au n° 369 pour l'escompte en dedans.

Il est à remarquer que les règles posées au 3° du n° 359 pour obtenir l'intérêt simple d'un capital pour un nombre de jours, s'appliquent également à la règle d'escompte en dehors.

Ainsi, par exemple, *pour obtenir, au taux de 6 p. 100 par an, l'escompte d'un billet payable dans un certain nombre de jours, on multiplie le montant du billet par le nombre de jours et on divise le produit par 6000.*

2° *Un billet de 4745f,25 payable dans 327 jours a été escompté pour 4486f,64 argent comptant; quel est le taux de l'escompte?*

$4745,25 - 4486,64 = 258^f,61$ étant l'escompte de $4745^f,25$ pour $\frac{327}{360}$ an, l'escompte de 1 fr. pour le même temps est $\frac{258,61}{4745,25}$ fr., et celui de 100 fr. est

$$\frac{258,61 \times 100}{4745,25} \text{ fr.}$$

Pour un an, l'escompte de 100 fr. est donc

$$\frac{258,61 \times 100}{4745,25} : \frac{327}{360} = \frac{258,61 \times 100 \times 360}{4745,25 \times 327} = 6 \text{ fr.}$$

371. *Tableau donnant le nombre de jours compris entre deux dates.*

(*Année suivante.*)

Du ..... au	Février.	Mars.	Avril.	Mai.	Juin.	Juillet.	Août.	Septembre.	Octobre.	Novembre.	Décembre.	Janvier.	Février.	Mars.	Avril.	Mai.	Juin.	Juillet.	Août.	Septembre.	Octobre.	Novembre.	Décembre.
Janv.	31	59	90	120	151	181	212	243	273	304	334	365											
Février		28	59	89	120	150	181	212	242	273	303	314	365										
Mars			31	61	92	122	153	184	214	245	275	306	337	365									
Avril				30	61	91	122	153	183	214	244	275	306	334	365								
Mai					31	61	92	123	153	184	214	245	276	304	335	365							
Juin						30	61	92	122	153	183	214	245	273	304	334	365						
Juillet							31	62	92	123	153	184	215	243	274	304	335	365					
Août								31	61	92	122	153	184	212	243	273	304	334	365				
Septembre									30	61	91	122	153	181	212	242	273	303	334	365			
Octobre										31	61	92	123	151	182	212	243	273	304	335	365		
Novembre											30	61	92	120	151	181	212	242	273	304	334	365	
Décembre												31	62	90	121	151	182	212	243	274	304	335	365

APPLICATIONS : 1° *Nombre de jours du* 15 *mars au* 15 *juillet*. Suivant la colonne horizontale intitulée *mars*, jusqu'à la rencontre de la colonne verticale intitulée *juillet*, on trouve 122, qui est le nombre de jours demandé ;

2° *Nombre de jours du* 10 *avril au* 25 *septembre*. Du 10 *avril* au 10 *septembre* on trouve (1°) 153 jours ; le nombre demandé est alors 153 + 15 = 168 jours ;

3° *Nombre de jours du* 30 *septembre au* 10 *mai de l'année suivante*. Du 30 *septembre* au 30 *mai* (*année suivante*) on trouve 242 jours ; le nombre demandé est alors 242 — 20 = 222 jours.

Remarque. Si l'année est bissextile, pour les intervalles comprenant la *fin de février*, on augmente de 1 les nombres de jours fournis par le tableau. Ainsi du 3 *janvier* au 3 *février* il y a 31 jours ; du 12 *septembre* au 12 *février* de l'année suivante, 153 jours ; du 3 *janvier* au 3 *avril*, 91 jours ; du 13 *février* au 13 *août*, 182 jours.

RÈGLE D'ANNUITÉ.

372. Un capital étant prêté à intérêt composé (357), on appelle *annuité*, la somme, ordinairement constante, qu'il faut payer à la fin de chaque année, pour rembourser en un nombre déterminé d'années le capital et les intérêts.

373. *Quelle est l'annuité* x *qu'il faut payer pour rembourser en* 4 *ans le capital* 4000 *fr. prêté à* 5 °/₀?

Les 4000 fr. comptant valant au bout de la 4ᵉ année (1°, n° 360)

$$4000 \times 1{,}05^4 = 4000 \times 1{,}215\,506 = 4862 \text{ fr.},$$

les quatre payements réunis, évalués à cette époque, doivent valoir 4862 fr.

Or le premier payement x, effectué à la fin de la 1ʳᵉ année, vaut, à la fin de la 4ᵉ année, $x \times 1{,}05^3$; celui effectué à la fin de la 2ᵉ année vaut, à la fin de la 4ᵉ année, $x \times 1{,}05^2$; celui de la 3ᵉ année vaut, à la fin de la 4ᵉ, $x \times 1{,}05$, et celui fait à la fin de la 4ᵉ année vaut x à cette même époque; donc

$$x \times 1{,}05^3 + x \times 1{,}05^2 + x \times 1{,}05 + x = 4862 \text{ fr.}$$

ou (n° 32) $$x(1{,}05^3 + 1{,}05^2 + 1{,}05 + 1) = 4862 \text{ fr.},$$

ou encore, en remarquant que la quantité entre parenthèses est la somme des termes d'une progression géométrique dont le premier serait 1, le dernier $1{,}05^3$, et la raison 1,05 (n° 342)

$$x \times \frac{1{,}05^3 \times 1{,}05 - 1}{1{,}05 - 1} = x \times \frac{1{,}05^4 - 1}{0{,}05} = 4862 \text{ fr.};$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{4862 \times 0{,}05}{1{,}05^4 - 1} = \frac{4862 \times 0{,}05}{1{,}215\,506 - 1} = 1128^{\text{f}},05.$$

Ce qui fait voir que l'annuité s'obtient en multipliant le capital évalué à la fin de la dernière année par l'intérêt de 1 fr. *pour un an* (par 0ᶠ,05 quand le taux est à 5 °/₀), *et en divisant le produit par l'excès sur l'unité de la valeur que prend* 1 fr. *prêté pendant tout le temps.*

Vérification. Le capital 4000 fr. vaut à la fin de la première année $4000 \times 1{,}05 = 4200$ fr. Après avoir fait le premier payement, il reste dû $4200 - 1128{,}05 = 3071^{\text{f}},95$. Ce nouveau capital vaut à la fin de la seconde année $3071^{\text{f}},95 \times 1{,}05 = 3225^{\text{f}},55$. Après le second payement, on doit encore $3225^{\text{f}},55 - 1128^{\text{f}},05 = 2097^{\text{f}},50$. Ce troisième capital vaut à la fin de la troisième année $2097^{\text{f}},50 \times 1{,}05 = 2202^{\text{f}},38$, desquels retranchant le troisième payement, il reste dû $2202^{\text{f}},38 - 1128^{\text{f}},05 = 1074^{\text{f}},33$. Ce nouveau capital devient à la fin de la quatrième année $1074^{\text{f}},33 \times 1{,}05 = 1128^{\text{f}},05$, que l'on acquitte par le dernier payement.

La colonne *d* de la table du n° 361, en donnant la valeur actuelle

d'une rente annuelle de 1 fr. payable pendant 1, 2, 3... 60 ans, permet de résoudre le problème précédent à l'aide d'une seule division. En effet, pour une rente annuelle de 1 fr. pendant 4 ans, le capital primitif étant (colonne d du 5 $^0/_0$) 3f,545 951, l'annuité à payer pour rembourser les 4000 fr. sera

$$\frac{4000}{3,545\,951}=1128,05.$$

Si l'on a à résoudre le problème inverse, c'est-à-dire à déterminer le capital à placer pour se procurer une annuité de 1128f,05 pendant 4 ans, l'intérêt étant à 5 $^0/_0$, la table donnant 3f,545 951 pour le capital correspondant à l'annuité de 1 fr., le capital cherché est

$$1128,05 \times 3,545\,951 = 4000 \text{ fr.}$$

PROBABILITÉS, RENTES VIAGÈRES.

374. La *probabilité mathématique* d'un événement est le rapport du nombre des cas favorables à cet événement au nombre des cas possibles, tous ces cas étant également possibles (voir combinaisons, en algèbre).

Exemple. Dans une urne on place 12 boules égales, dont 5 blanches et 7 noires; en en tirant une au hasard, la probabilité qu'elle sera blanche est $\frac{5}{12}$. En effet, le nombre des cas possibles est 12, puisque l'on peut prendre indifféremment l'une quelconque des 12 boules qui se trouvent dans l'urne, et celui des cas favorables est 5, puisqu'il y a 5 boules blanches.

La probabilité que l'on tirera une boule noire est $\frac{7}{12}$.

Si un joueur parie qu'une boule blanche sortira, contre un second joueur qui parie pour une boule noire, l'enjeu, 20 fr. par exemple, du premier sera à celui x du second, dans le rapport direct des probabilités qu'ils ont de gagner. Ainsi l'on aura

$$20 : x = \frac{5}{12} : \frac{7}{12} = 5 : 7, \text{ d'où } x = \frac{20 \times 7}{5} = 28^f,00.$$

375. *Si l'événement*, au lieu d'être simple, comme au numéro précédent, *est composé de plusieurs événements simples*, la probabilité est égale au produit des probabilités partielles de tous les événements simples.

Exemple. Une première urne contenant 5 boules blanches et 7 noires, et une seconde en contenant 3 blanches et 8 noires, la probabilité qu'en tirant une boule de chaque urne elles seront toutes les deux blanches est

$$\frac{5}{12} \times \frac{3}{11} = \frac{15}{132} = \frac{5}{44}.$$

376. La probabilité d'un *événement qui peut avoir lieu de plusieurs manières distinctes* est égale à la somme de ses probabilités dans les diverses manières dont il peut arriver.

Exemple. Une urne contient 5 boules blanches et 7 noires, une autre en contient 3 blanches et 7 noires, et une troisième 9 blanches et 4 noires; quelle est la probabilité que l'on tirera une boule blanche en portant au hasard la main dans l'une quelconque des urnes?

En remarquant que la probabilité que l'on portera la main sur la première, la deuxième et la troisième urne, et qu'on en tirera une boule blanche étant respectivement (374 et 375) $\frac{1}{3}\times\frac{5}{12}$, $\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}$ et $\frac{1}{3}\times\frac{9}{13}$, la probabilité demandée est

$$\frac{1}{3}\times\frac{5}{12}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{9}{13}=\frac{1}{3}\left(\frac{5}{12}+\frac{3}{10}+\frac{9}{13}\right)=\frac{1099}{2340}.$$

377. On appelle *table de mortalité*, une table qui contient, sur un grand nombre N de naissances, les nombres N_1, N_2, N_3.... des individus qui vivent après 1 an, 2 ans, 3 ans, etc. Nous donnons celle de Duvillard et celle de Deparcieux.

La table 1 est celle que Duvillard a publiée en 1806, dans son *Analyse de l'influence de la petite vérole sur la mortalité.* D'après son auteur, elle représente tous les résultats de la mortalité générale, d'après un grand nombre de faits recueillis avant la révolution en divers lieux de la France, et elle doit représenter assez exactement la loi de mortalité. Mais l'usage de la vaccine et l'amélioration des conditions hygiéniques en général font que la table de Duvillard donne une mortalité beaucoup trop rapide pour l'état actuel de la population en France.

La table que Deparcieux a construite, vers 1746, pour des têtes choisies, donne une mortalité beaucoup moins rapide que celle de Duvillard. Cette table avait été dressée pour 1000 enfants âgés de 3 ans. Complétée pour les premières années et légèrement modifiée par M. Mathieu, elle a fourni la table 2 suivante, qui donne, avec une approximation suffisante pour les applications ordinaires, la distribution actuelle aux différents âges en France, où, pour une population totale de 34 860 387, on compte annuellement et en moyenne 970 000 naissances et 810 000 décès.

La table 3 donne la population de chaque âge en France pour 1 000 000 d'habitants.

Les tables de Duvillard et de Deparcieux sont employées en France par les compagnies d'assurance sur la vie; la première, pour calculer les sommes payables au décès des assurés; la seconde, pour calculer les rentes viagères, parce que, indiquant une plus longue jouissance de la rente, elle conduit à un tarif de concession plus élevé.

1. *Table de mortalité en France d'après Duvillard.*

AGES.	VIVANTS.	AGES.	VIVANTS.	AGES.	VIVANTS.	AGES.	VIVANTS.
0	1000000	30	438183	60	213567	90	3830
1	767525	31	431398	61	204380	91	3093
2	671834	32	424583	62	195054	92	2466
3	624668	33	417744	63	185600	93	1938
4	598713	34	410886	64	176035	94	1499
5	583151	35	404012	65	166377	95	1140
6	573025	36	397123	66	156651	96	850
7	565838	37	390219	67	146882	97	621
8	560245	38	383300	68	137102	98	442
9	555486	39	376363	69	127347	99	307
10	551122	40	369404	70	117656	100	207
11	546888	41	362419	71	108070	101	135
12	542630	42	355400	72	98637	102	84
13	538255	43	348342	73	89404	103	51
14	533711	44	341235	74	80423	104	29
15	528969	45	334072	75	71745	105	16
16	524020	46	326843	76	63424	106	8
17	518863	47	319539	77	55511	107	4
18	513502	48	312148	78	48057	108	2
19	507949	49	304662	79	41107	109	1
20	502216	50	297070	80	34705	110	0
21	496317	51	289361	81	28886		
22	490267	52	281527	82	23680		
23	484083	53	273560	83	19106		
24	477777	54	265450	84	15175		
25	471366	55	257193	85	11886		
26	464863	56	248782	86	9224		
27	458282	57	240214	87	7165		
28	451635	58	231488	88	5670		
29	444932	59	222605	89	4686		

2. ***Table de mortalité en France suivant la table de Deparcieux.***

ÂGES.	VIVANTS à chaque âge.	SOMME des vivants.	DURÉE DE LA VIE moyenne.		DURÉE DE LA VIE probable.		ÂGES.	VIVANTS à chaque âge.	SOMME des vivants.	DURÉE DE LA VIE moyenne.		DURÉE DE LA VIE probable.	
			Ans.	Mois.	Ans.	Mois.				Ans.	Mois.	Ans.	Mois.
0	1286	51467	39	8	42	0	50	581	12135	20	5	21	0
1	1074	50181	46	4	53	2	51	571	11554	19	9	20	3
2	1006	49110	48	4	54	11	52	560	10983	19	1	19	7
3	970	48104	49	1	55	4	53	549	10423	18	6	18	10
4	947	47134	49	4	55	2	54	538	9874	17	10	18	1
5	930	46187	49	2	54	10	55	526	9336	17	3	17	5
6	917	45257	48	10	54	4	56	514	8810	16	8	16	8
7	906	44310	48	5	53	9	57	502	8296	16	0	16	0
8	896	43434	48	0	53	2	58	489	7794	15	5	15	4
9	887	42538	47	5	52	6	59	476	7305	14	10	14	8
10	879	41651	46	11	51	10	60	463	6829	14	3	14	0
11	872	40772	46	3	51	1	61	450	6366	13	8	13	4
12	866	39900	45	7	50	3	62	437	5916	13	0	12	7
13	860	39034	44	11	49	6	63	423	5479	12	5	12	0
14	854	38174	44	2	48	9	64	409	5056	11	10	11	4
15	848	37320	43	6	47	11	65	395	4647	11	3	10	8
16	842	36472	42	10	47	2	66	380	4252	10	8	10	1
17	835	35630	42	2	46	5	67	364	3872	10	2	9	6
18	828	34795	41	6	45	8	68	347	3508	9	7	9	0
19	821	33967	40	10	44	11	69	329	3161	9	1	8	5
20	814	33146	40	3	44	2	70	310	2832	8	8	7	11
21	806	32332	39	7	43	5	71	291	2522	8	2	7	6
22	798	31526	39	0	42	9	72	271	2231	7	9	7	0
23	790	30728	38	5	42	0	73	251	1960	7	4	6	7
24	782	29938	37	9	41	3	74	231	1709	6	11	6	2
25	774	29156	37	2	40	6	75	211	1478	6	6	5	9
26	766	28382	36	7	39	10	76	192	1267	6	1	5	4
27	758	27616	35	11	39	1	77	173	1075	5	9	4	11
28	750	26858	35	4	38	4	78	154	902	5	4	4	7
29	742	26108	34	8	37	7	79	136	748	5	0	4	3
30	734	25366	34	1	36	10	80	118	612	4	8	4	0
31	726	24632	33	5	36	1	81	101	494	4	5	3	9
32	718	23906	32	9	35	3	82	85	393	4	1	3	7
33	710	23188	32	2	34	6	83	71	308	3	10	3	3
34	702	22478	31	6	33	9	84	59	237	3	6	2	11
35	694	21776	30	11	33	0	85	48	178	3	2	2	9
36	686	21082	30	3	32	3	86	38	130	2	11	2	6
37	678	20396	29	7	31	5	87	29	92	2	8	2	4
38	671	19718	28	11	30	8	88	22	63	2	4	2	0
39	664	19047	28	2	29	10	89	16	41	2	1	1	9
40	657	18383	27	6	29	0	90	11	25	1	9	1	6
41	650	17726	26	9	28	3	91	7	14	1	6	1	3
42	643	17076	26	1	27	5	92	4	7	1	3	1	0
43	636	16433	25	4	26	7	93	2	3	1	0	1	0
44	629	15597	24	7	25	9	94	1	1	0	6	0	6
45	622	15168	23	11	24	11	95	0	0				
46	615	14546	23	2	24	2							
47	607	13931	22	5	23	4							
48	599	13324	21	9	22	7							
49	590	12725	21	1	21	9							

3. *Table de la population de chaque âge en France pour 1 000 000 d'habitants.*

AGES.	POPULATION.	AGES.	POPULATION.	AGES.	POPULATION.	AGES.	POPULATION.
de 0 à 1	24536	de 25 à 26	16288	de 50 à 51	10176	de 75 à 76	2863
1 2	22604	26 27	16020	51 52	9926	76 77	2565
2 3	21518	27 28	15754	52 53	9673	77 78	2274
3 4	20842	28 29	15494	53 54	9418	78 79	1994
4 5	20423	29 30	15231	54 55	9161	79 80	1722
5 6	20090	30 31	14972	55 56	8900	80 81	1462
6 7	19820	31 32	14746	56 57	8641	81 82	1222
7 8	19584	32 33	14463	57 58	8381	82 83	1005
8 9	19369	33 34	14180	58 59	8120	83 84	816
9 10	19179	34 35	13975	59 60	7858	84 85	652
10 11	19042	35 36	13728	60 61	7593	85 86	514
11 12	18867	36 37	13494	61 62	7319	86 87	400
12 13	18731	37 38	13250	62 63	7035	87 88	308
13 14	18604	38 39	13005	63 64	6743	88 89	241
14 15	18479	39 40	12766	64 65	6445	89 90	194
15 16	18341	40 41	12531	65 66	6141	90 91	147
16 17	18200	41 42	12295	66 67	5828	91 92	110
17 18	18046	42 43	12060	67 68	5506	92 93	80
18 19	17883	43 44	11826	68 69	5175	93 94	58
19 20	17710	44 45	11593	69 70	4837	94 95	41
20 21	17527	45 46	11364	70 71	4496	95 96	26
21 22	17361	46 47	11129	71 72	4157	96 97	16
22 23	17087	47 48	10897	72 73	3820	97 98	9
23 24	16829	48 49	10662	73 74	3495	98 99	4
24 25	16558	49 50	10422	74 75	3173		

378. La probabilité qu'a un individu âgé de 20 ans, par exemple, d'atteindre au moins l'âge de 50 ans est (374)

$$\frac{581}{814}.$$

En effet, d'après la table de Deparcieux (377), sur 814 cas possibles, il y en a 581 de favorables.

379. La *vie probable* d'un individu est l'âge qu'il a autant de chance d'atteindre que de ne pas atteindre; c'est, par conséquent, l'âge auquel la probabilité que l'individu a d'atteindre est égale à $\frac{1}{2}$. Ainsi, en consultant la table de Deparcieux, on voit que la vie probable d'un individu à sa naissance est de 42 ans; qu'à 20 ans elle est comprise entre 64 et 65 ans; elle est de 64 ans 2 mois, c'est-à-dire qu'à 20 ans le nombre probable d'années qui lui reste à vivre est de 44 ans 2 mois, c'est ce nombre que donne la table dans la cinquième colonne.

380. La *vie moyenne* est la moyenne des âges auxquels sont mortes un grand nombre de personnes (377).

Pour trouver la vie moyenne v, à l'aide de la table de mortalité de Deparcieux, on remarque que sur 1286 nouveaux-nés, 1286—1071 sont morts pendant la première année, et ont vécu moyennement $\frac{1}{2}$ année;

de sorte que la somme des temps pendant lesquels ils ont vécu est à peu près égale à $\frac{1}{2}$ (1286 — 1071) ans. Ceux qui meurent pendant la 2ᵉ année vivent en moyenne $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ans, et la somme des temps pendant lesquels ils ont vécu est à peu près $\frac{3}{2}$ (1071 — 1006) ans. Pour ceux qui meurent pendant la 3ᵉ année, cette somme est $\frac{5}{2}$ (1006 — 970) ans, et ainsi de suite jusqu'à la 91ᵉ année. On a alors

$$v \times 1286 = \frac{1}{2}(1286-1071) + \frac{3}{2}(1071-1006) + \frac{5}{2}(1006-970) + \ldots$$

d'où
$$v = \frac{1}{2} + \frac{1071 + 1006 + 970 + \ldots + 4 + 2 + 1}{1286}.$$

Ainsi la vie moyenne est égale à la moitié d'une année plus le quotient de la somme des nombres de vivants à chaque âge, à partir de la première année, par le nombre 1286 de nouveaux-nés. Effectuant les calculs, on trouverait $v = 39$ ans 8 mois, valeur consignée dans la quatrième colonne de la table. Les nombres de vivants à chaque âge sont inscrits dans la deuxième colonne de la table, et leur somme pour chaque âge se trouve dans la troisième colonne.

Appelant, d'une manière générale, *vie moyenne* ce qu'il reste moyennement à vivre à un individu d'un âge quelconque, on la déterminera comme pour le nouveau-né. Ainsi la vie moyenne d'un individu âgé de 20 ans, par exemple, sera

$$v = \frac{1}{2} + \frac{806 + 798 + 790 + \ldots + 4 + 2 + 1}{814} = \frac{1}{2} + \frac{32332}{814} = 40 \text{ ans } 3 \text{ mois.}$$

C'est cette vie moyenne qui est inscrite dans la quatrième colonne de la table.

381. Un *placement* est dit *à fonds perdu*, lorsque l'emprunteur s'engage à rembourser le capital et les intérêts au moyen d'un certain nombre de payements, effectués à des époques convenues jusqu'à la mort de l'individu. Chaque payement est une *rente viagère*, qu'on suppose ordinairement constante et annuelle.

382. *Soit à déterminer la rente viagère* r *d'un capital* c *placé par une personne âgée de 45 ans, par exemple.*

Supposant que les 622 personnes qui, sur 1286 naissances, vivent encore à 45 ans (377, 2ᵉ table), aient placé chacune le capital c aux mêmes conditions; comme il n'en existera plus à l'âge de 46 ans que 615, l'emprunteur aura donc à payer à la fin de la première année une somme $r \times 615$; de même à la fin de la 2ᵉ année de prêt il aura à payer $r \times 607$; à la fin de la 3ᵉ année, $r \times 599$, et ainsi de suite. Mais toutes ces sommes à payer doivent valoir comptant le capital total que reçoit l'emprunteur;

donc, en désignant par t l'intérêt de 1 fr. par an, on a (2°, n° 360)

$$c \times 622 = \frac{r}{1+t} \times 615 + \frac{r}{(1+t)^2} \times 607 + \frac{r}{(1+t)^3} \times 599 + \dots;$$

d'où l'on peut tirer la valeur de r ou celle de c, selon que c ou r est donné.

On peut résoudre ce problème de la manière suivante, qui est plus expéditive.

A 45 ans, la vie probable est de 24 ans 11 mois (377, 2ᵉ table); c'est donc pendant 24 ans que sera payé la rente annuelle r, et l'on doit avoir

$$c = \frac{r}{1+t} + \frac{r}{(1+t)^2} + \frac{r}{(1+t)^3} + \dots + \frac{r}{(1+t)^{24}}.$$

En évaluant le capital c et les rentes r à la fin de la 24ᵉ année, on a encore (1°, n° 360)

$$c(1+t)^{24} = r(1+t)^{23} + r(1+t)^{22} + \dots + r(1+t) + r.$$

Chacune de ces formules permet de calculer c ou r quand r ou c est donné.

Enfin, la colonne d de la table du n° 361 donnant la valeur actuelle d'une rente viagère de 1 fr. payable pendant 1, 2, 3 ... 60 ans, cela permet de résoudre le problème précédent avec la plus grande simplicité. Ainsi, pour le taux t de 5 °/₀, par exemple, une rente viagère de 1 fr. payable pendant 24 ans valant argent comptant $13^f,798\,642$, la rente r payable pendant le même temps vaudra comptant

$$r = \frac{c}{13,798\,642}, \quad \text{d'où} \quad c = r \times 13,798\,642 \text{ fr.}$$

Pour $r = 5000$ fr., on a

$$c = 5000 \times 13,798\,642 = 68\,983^f,20.$$

La compagnie d'assurance, pour couvrir ses frais et s'assurer un bénéfice, exigerait pour c une valeur un peu plus grande.

RÈGLE DE SOCIÉTÉ.

383. *Une règle de société* a pour but de partager entre plusieurs associés le bénéfice ou la perte qui résulte de leur société. La part de bénéfice ou de perte de chaque associé dépend de sa mise de fonds et du temps pendant lequel cette mise est restée dans la société.

384. *Problèmes sur les règles de société :*

1° *Les mises de trois associés sont* 2000, 5000 *et* 7000 *fr.; le gain a été de* 17 800 *fr.; quelles sont les parts de gain des associés?*

Le temps de production étant le même pour toutes les mises, la part de bénéfice de chaque associé est proportionnelle à sa mise. Le gain

ayant été de 17 800 fr. pour la somme de 2000 + 5000 + 7000 = 14 000 fr., il est de $\frac{17\,800}{14\,000}$ fr. pour 1 fr., et les parts des associés sont respectivement :

$$\frac{17\,800}{14\,000} \times 2000 = 2542^f,86,$$

$$\frac{17\,800}{14\,000} \times 5000 = 6357^f,14,$$

$$\frac{17\,800}{14\,000} \times 7000 = 8900^f,00.$$

Le gain total a été partagé en trois parties proportionnelles aux mises (298); comme vérification, la somme des trois parts doit donc être égale au gain total.

2° *Les mises de trois associés sont* 1000 *fr.*, 1250 *fr. et* 1400 *fr.; la première mise est restée* 2 *mois dans la société, la deuxième* 4 *mois, et la troisième* 5 *mois. Le gain étant de* 17 800 *fr., on demande la part de chaque associé.*

Si toutes les mises étaient restées productives pendant le même temps, les parts de gain se détermineraient comme au 1°. Cherchons donc les mises qui, placées pendant l'unité du temps, que nous prendrons dans ce cas égale au mois, produiraient les même bénéfices que les mises des associés :

100 fr. placés pendant 2 mois rapportent autant que 1000 × 2 = 2000 fr. pendant 1 mois; de même 1250 fr. pendant 4 mois et 1400 fr. pendant 5 mois, rapportent autant que 1250 × 4 = 5000 fr. et 1400 × 5 = 7000 fr. pendant 1 mois.

Le problème est ainsi ramené à celui du 1°, et se résout de la même manière.

RÈGLE D'ALLIAGE ET RÈGLE DE MÉLANGE.

385. En France, la vaisselle d'argent est au titre de 0,95, et les couverts, les bijoux et les autres ouvrages d'orfévrerie sont au titre de 0,80. Quant aux objets d'or, la vaisselle est au titre de 0,92, et les bijoux sont aux titres de 0,84 et 0,75. De plus, l'or naturel contient toujours des traces d'argent qui se retrouvent dans les objets d'or (218 et 219).

386. *Problèmes :*

1° *On fond ensemble* 250 *grammes d'un alliage d'argent au titre de* 0,80 *et* 750 *gr. d'argent pur; quel est le titre du nouvel alliage?*

Argent contenu dans les 250 gr.	250 × 0,80 = 200 gr.
Argent contenu dans le nouvel alliage.	200 + 750 = 950 gr.
Poids du nouvel alliage.	250 + 750 = 1000 gr.
Titre du nouvel alliage.	950 : 1000 = 0,95

2° *Dans quel rapport faut-il allier de l'or aux titres de* 0,92 *et* 0,75 *pour avoir de l'or au titre de* 0,84?

Pour 1 gr. d'or au titre de 0,92 introduit, il y a un excès d'or de.	$0,92 - 0,84 = 0^g,08$
Pour 1 gr. d'or au titre de 0,75 introduit, il y a un déficit d'or de.	$0,84 - 0,75 = 0^g,09$
Pour que l'excès soit compensé par le déficit, il faut donc prendre le rapport de l'or au titre de 0,92 à l'or au titre de 0,75 égal à.	$\frac{0,09}{0,08} = \frac{9}{8}$

Ainsi par 9 gr. d'or au titre de 0,92 il faut prendre 8 gr. d'or au titre de 0,75.

Vérification.

Or pur contenu dans	9 gr.	au titre de	0,92.	$0,92 \times 9 = 8^g,28$
Id.	8 gr.	*id.*	0,75.	$0,75 \times 8 = 6^g,00$
			Total.	$14^g,28$
Id.	17 gr.	*id.*	0,84.	$0,84 \times 17 = 14^g,28$

3° *Combien faut-il allier d'or au titre de* 0,92 *avec de l'or au titre de* 0,75 *pour obtenir* 100 *gr. d'or au titre de* 0,84?

Si l'on a déterminé le rapport 9 : 8 des quantités d'or aux titres de 0,92 et 0,75 qui doivent entrer dans l'alliage (2°), le problème est ramené à partager 100 gr. en parties proportionnelles aux nombres 9 et 8, et en opérant comme au n° 384 on trouve :

Poids d'or au titre de 0,92.	$\frac{100}{17} \times 9 = 52^g,94$
Id. 0,75.	$\frac{100}{17} \times 8 = 47^g,06$

On peut résoudre directement le problème en opérant de la manière suivante :

Or pur contenu dans 100 gr. d'or au titre de 0,84.	84 gr.
Id. 100 gr. *id.* 0,92.	92
Différence. . . .	8 gr.
Or pur retranché des 100 gr. d'or au titre de 0,92 en remplaçant 1 gr. au titre de 0,92 par 1 gr. au titre de 0,75.	$0,92 - 0,75 = 0,17$
Nombre de grammes au titre de 0,75 qu'il faut introduire.	$8,00 : 0,17 = 47,06$
Nombre de grammes au titre de 0,92.	$100 - 47,06 = 52,94$

4° *Le bronze des canons et des statues est formé de* 90 *parties de cuivre pour* 10 *parties d'étain; quel est le prix d'un kilogramme de ce bronze, le cuivre coûtant* $2^f,50$ *et l'étain* $3^f,50$ *le kilog.?*

Valeur du cuivre contenu dans 1 kil. de bronze. . .	$2,50 \times 0,90 = 2^f,25$
Valeur de l'étain contenu dans 1 kil. de bronze. . .	$3,50 \times 0,10 = 0^f,35$
Prix de 1 kil. de bronze.	$2^f,60$

5° *Le cuivre jaune ou laiton est formé de* 75 *parties de cuivre et de* 25 *de zinc; quel est le prix de* 1 *kilog. de laiton, le cuivre coûtant* $2^f,50$ *et le zinc* $0^f,90$ *le kilog.?*

Valeur du cuivre contenu dans un kil. de laiton...	$2,50 \times 0,75 = 1^f,875$
Valeur du zinc contenu dans 1 kil. de laiton....	$0,90 \times 0,25 = 0^f,225$
Prix de 1 kil. de laiton...............	$2^f,10$

6° *Les caractères d'imprimerie sont formés de* 80 *parties de plomb pour* 20 *parties d'antimoine* (ils contiennent en outre quelques traces de cuivre); *quel est le prix de* 1 *kilog. de cet alliage, le plomb coûtant* $0^f,75$ *et l'antimoine* $3^f,50$ *le kilog.?*

Valeur du plomb contenu dans 1 kil. d'alliage....	$0,75 \times 0,80 = 0^f,60$
Valeur de l'antimoine contenu dans 1 kil. d'alliage.	$3,50 \times 0,20 = 0^f,70$
Prix de 1 kil. d'alliage................	$1^f,30$

7° *La soudure des plombiers est formée de* 60 *parties de plomb et de* 40 *parties d'étain; quel est le prix de* 1 *kilog. de cette soudure, le plomb coûtant* $0^f,75$ *et l'étain* $3^f,50$ *le kilog.?*

Valeur du plomb contenu dans 1 kil. de soudure...	$0,75 \times 0,60 = 0^f,45$
Valeur de l'étain contenu dans 1 kil. de soudure...	$3,50 \times 0,40 = 1^f,40$
Prix de 1 kil. de soudure..............	$1^f,85$

387. *Règle de mélange.* Dans l'industrie, et surtout dans le commerce des boissons, on mélange souvent plusieurs liquides. Ces mélanges conduisent à des problèmes semblables à ceux qui précèdent sur les alliages, et qui se résolvent de la même manière.

LIVRE VII.

Logarithmes.

---

388. Lorsqu'on a deux progressions telles que

$$\div\!\div \ldots \frac{1}{81} : \frac{1}{27} : \frac{1}{9} : \frac{1}{3} : 1 : 3 : 9 : 27 : 81 \ldots$$

$$\div \ldots -8 . -6 . -4 . -2 . 0 . 2 . 4 . 6 . 8 \ldots$$

l'une géométrique dont l'un des termes est l'unité, l'autre arithmétique dont l'un des termes est 0 et correspond au terme 1 de la progression géométrique (328 et 337), chaque terme de la progression arithmétique est le *logarithme* du terme correspondant de la progression géométrique. Ainsi le logarithme de 27, que l'on écrit *log* 27, est égal à 6.



389. La raison de la progression géométrique est la *base* du système de logarithmes.

390. Au lieu de considérer les logarithmes comme étant les termes d'une progression, on peut supposer qu'ils sont les degrés des puissances d'un nombre constant. Ce nombre constant est la *base* du système de logarithmes, et l'une quelconque de ses puissances a pour logarithme le degré de cette puissance. Ainsi, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^0 = 1$, $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ (276), ont respectivement 2, 3, 0 et -2 pour logarithmes dans le système dont la base est 3.

391. 10 est la base du système de logarithmes dont l'usage est le plus habituel, et que pour cette raison on appelle *logarithmes vulgaires*. Briggs a le premier publié des tables de logarithmes pour cette base.

Dans le système de logarithmes vulgaires, les deux progressions du n° 388 deviennent

$$\div\!\div \ldots \frac{1}{10000} : \frac{1}{1000} : \frac{1}{100} : \frac{1}{10} : 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 \ldots$$

$$\div \ldots -4 \;.\; -3 \;.\; -2 \;.\; -1 \;.\; 0 \;.\; 1 \;.\; 2 \;.\; 3 \;.\; 4 \;.\; 5 \;\ldots$$

qui reviennent, en considérant les logarithmes comme exposants, à la suite de puissances (390).

$$\ldots\; 10^{-4} \quad 10^{-3} \quad 10^{-2} \quad 10^{-1} \quad 10^{0} \quad 10^{1} \quad 10^{2} \quad 10^{3} \quad 10^{4} \quad 10^{5} \;\ldots$$

392. Cette suite de puissances prolongée indéfiniment dans les deux sens, de même que les deux progressions continuées de la même manière, ne contiennent que les nombres ayant pour logarithmes la suite des nombres entiers positifs et négatifs; mais l'on conçoit qu'on peut insérer entre chaque terme de la progression géométrique un assez grand nombre de moyens géométriques, pour que deux termes successifs de la progression qui en résulte diffèrent d'aussi peu que l'on veut, et en insérant le même nombre de moyens arithmétiques entre les termes successifs de la progression arithmétique, les termes de la nouvelle progression seront les logarithmes des termes correspondants de la progression géométrique, et la différence de deux logarithmes successifs sera encore aussi petite que l'on voudra (333 et 343).

De même, on peut prendre pour exposants des puissances successives de la suite précédente, des nombres qui diffèrent entre eux d'aussi peu que l'on veut, et les puissances successives différeront encore entre elles d'aussi peu que l'on veut.

Alors on conçoit qu'un nombre donné quelconque sera un terme de la progression géométrique ou une des puissances de la suite précédente, et il aura pour logarithme le terme correspondant de la progression arithmétique, ou encore l'exposant de la puissance. De même, un nombre donné sera un terme de la progression arithmétique et un exposant d'une puissance, et il sera le logarithme du terme correspondant de la progression géométrique ou de la puissance.

Ainsi un nombre quelconque positif a un logarithme, et un nombre quelconque positif ou négatif est le logarithme d'un nombre positif.

On conçoit qu'on ne peut dresser une table contenant tous les nombres, soit comme nombres soit comme logarithmes; mais il en existe d'assez étendues, et dont les différences de deux nombres successifs ou de deux logarithmes successifs sont assez petites, pour que les nombres sur lesquels on opère dans la pratique s'y trouvent avec des valeurs tellement approchées, qu'on peut prendre ces valeurs approchées pour les valeurs exactes.

393. Cela établi, soit que l'on considère les deux progressions ou les puissances de la base (391), on conclut ce qui suit, que nous donnons pour les logarithmes vulgaires, mais qui s'applique à un système quelconque en remplaçant la base 10 par celle de ce système :

1° Le logarithme de la base 10 est l'unité;

2° Le logarithme de l'unité est zéro;

3° Le logarithme d'un nombre plus grand que l'unité est positif;

4° Le logarithme d'un nombre plus petit que l'unité est négatif;

5° Un nombre négatif n'a pas de logarithme;

6° Le logarithme du produit de plusieurs facteurs $10^{-2} = \frac{1}{100}$, $10^1 = 10$ et $10^4 = 10\,000$ est égal à la somme $-2+1+4=3$ des logarithmes des facteurs :

$$\log(10^{-2} \times 10^1 \times 10^4) = \log 10^{-2+1+4} = \log 10^3 = -2+1+4=3 \quad (267).$$

Le logarithme 3 correspondant à $10^3 = 1000$, c'est que 1000 est le produit des facteurs $\frac{1}{100}$, 10 et 10 000.

La multiplication s'opère ainsi à l'aide d'une addition.

7° Le logarithme d'une puissance $(10^2)^3$ d'un nombre $10^2 = 100$ est égal au logarithme 2 de ce nombre multiplié par le degré 3 de la puissance :

$$\log(10^2)^3 = \log 10^{2\times 3} = 2 \times 3 = 6 \quad (268).$$

Le logarithme 6 correspondant à $10^6 = 1\,000\,000$, c'est que l'on a $100^3 = 1\,000\,000$.

On peut donc élever un nombre à une puissance au moyen d'une simple multiplication.

8° Le logarithme du quotient d'un nombre $10^5 = 100\,000$ par un nombre $10^2 = 100$ est égal au logarithme 5 du dividende moins le logarithme 2 du diviseur :

$$\log \frac{10^5}{10^2} = \log 10^{5-2} = 5-2=3 \quad (276).$$

3 étant le logarithme de 1000, c'est que $1000 = \frac{100\,000}{100}$, et l'on voit que *la division s'effectue au moyen d'une soustraction.*

9° Le logarithme d'une racine d'un nombre 10^6 est égal au loga-

rithme 6 de ce nombre divisé par l'indice de la racine :

$$\log \sqrt[2]{10^6} = \log 10^{\frac{6}{2}} = \log 10^3 = \frac{6}{2} = 3 \quad (277).$$

Le logarithme 3 correspondant à 1000, c'est que

$$\sqrt[2]{1\,000\,000} = 1000.$$

Les extractions de racines s'effectuent donc au moyen de la division.

10° Suivant qu'un nombre est compris entre 1 et 10, entre 10 et 100, entre 100 et 1000, etc., son logarithme est respectivement compris entre 0 et 1, entre 1 et 2, entre 2 et 3, etc.; d'où il suit que *les logarithmes étant évalués en décimales, la partie entière du logarithme d'un nombre entier, ou d'un nombre décimal plus grand que l'unité, contient autant d'unités moins une qu'il y a de chiffres dans la partie entière du nombre proposé.* Ainsi cette partie entière est 3 pour le nombre 4725, et 2 pour celui 827,34.

De même, un nombre compris entre 1 et 0,1, entre 0,1 et 0,01, entre 0,01 et 0,001, etc., ayant son logarithme respectivement compris entre 0 et — 1, entre — 1 et — 2, entre — 2 et — 3, etc., *la partie entière du logarithme d'un nombre décimal, moindre que l'unité, contient autant d'unités qu'il y a de zéros entre la virgule et le premier chiffre significatif du nombre proposé.* Ainsi cette partie entière est 0 pour le nombre 0,236 et — 2 pour celui 0,00326.

394. La partie entière, positive ou négative, d'un logarithme se nomme *caractéristique.* On donne quelquefois le nom de *mantisse* à la partie décimale.

395. Du n° 393 il résulte que connaissant le logarithme d'un nombre, pour en déduire le logarithme du produit ou du quotient de ce nombre par l'unité suivie d'un ou de plusieurs zéros, il suffit d'augmenter ou de diminuer le logarithme donné d'autant d'unités qu'il y a de zéros à la droite de l'unité.

Ainsi, ayant $\log 68 = 1,832\,5089$, on a $\log 6\,800 = 3,832\,5089$;

et ayant $\log 5\,657 = 3,752\,5862$, on a $\log 5,657 = 0,752\,5862$.

En effet, on a (6° et 8° n° 393)

$$\log (68 \times 100) = \log 68 + \log 100 = \log 68 + 2,$$

et

$$\log \frac{5657}{1000} = \log 5657 - \log 1000 = \log 5657 - 3.$$

Ce qui fait voir encore que lorsqu'on augmente ou qu'on diminue le logarithme d'un nombre d'une ou de plusieurs unités, le résultat est le logarithme du produit ou du quotient de ce nombre par une puissance de 10 d'un degré égal au nombre d'unités dont on a augmenté ou diminué le logarithme donné.

Ce qui précède fait voir aussi que les logarithmes des produits ou des quotients d'un même nombre par les diverses puissances de 10 ne diffèrent que par la caractéristique, qui augmente ou diminue d'autant d'unités qu'il y en a dans l'exposant de la puissance de 10; la partie décimale est la même.

396. De ce qui vient d'être dit (395), il résulte que *pour déterminer le logarithme d'un nombre décimal*, il suffit d'en prendre le logarithme abstraction faite de la virgule, et de retrancher de ce logarithme ou, ce qui revient au même, de sa caractéristique, autant d'unités qu'il y a de chiffres décimaux dans le nombre proposé. Du reste, ayant $18,27 = \frac{1827}{100}$, on a (8° n° 393)

$$\log 18,27 = \log 1827 - 2 = 3,261\,7385 - 2 = 1,261\,7385.$$

De même, ayant $0,826 = \frac{826}{1000}$, on a

$$\log 0,826 = \log 826 - 3 = 2,916\,980\,05 - 3.$$

397. Le logarithme de 826 étant moindre que 3, on voit, ce qui a déjà été établi (393), que *le logarithme de* 0,826 *et en général ceux de tous les nombres moindres que l'unité sont négatifs*. Pour exprimer la valeur de log 0,826, on retranche 2,916 980 05 de 3 et on donne au reste le signe —. Ainsi l'on a

$$\log 0,826 = -(3 - 2,916\,980\,05) = -0,083\,019\,95.$$

Il est plus commode dans les calculs de ne rendre négative que la caractéristique. Pour cela, on retranche seulement la caractéristique 2 de 3, et on prend la différence 1 pour la caractéristique, mais en l'affectant du signe —, que l'on écrit au-dessus de cette caractéristique, pour indiquer qu'elle est seule négative. On a de cette manière

$$\log 0,826 = \bar{1},916\,980\,05.$$

On aurait de même

$$\log 0,0826 = \bar{2},916\,980\,05, \qquad \text{et} \qquad \log 0,00826 = \bar{3},916\,980\,05.$$

398. Le *complément d'un nombre positif* est ce qu'il faut ajouter à ce nombre pour obtenir un nombre entier égal à l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y de chiffres dans la partie entière du nombre proposé. Ainsi l'on a

$$c^t\,375,8762 = 1000 - 375,8762 = 624,1238.$$

Le complément d'un nombre positif s'obtient facilement : il suffit de retrancher de 9 chacun de ses chiffres, à l'exception du dernier chiffre significatif à droite, que l'on retranche de 10, et de faire suivre les chiffres ainsi obtenus des zéros qui peuvent terminer à droite le nombre proposé :

$$c^t\,587\,300 = 412\,700.$$

Le *complément d'un logarithme positif* est alors le résultat qu'on obtient en retranchant ce logarithme de 10 unités. Ainsi l'on a

$$c^t \log 826 = 10 - 2,916\,980\,05 = 7,083\,019\,95.$$

Ce complément s'obtenant très-facilement, quand, dans une opération, on a à retrancher un logarithme, on ajoute son complément et l'on retranche 10 unités de la somme, ce qui conduit au même résultat.

Ayant, par exemple, à calculer $\frac{127 \times 39}{826}$, au lieu d'écrire

$$\log \frac{127 \times 39}{826} = \log 127 + \log 39 - \log 826$$

$$= 2,103\,803\,72 + 1,591\,064\,61 - 2,916\,980\,05 = 0,777\,888\,28,$$

on dispose ainsi l'opération

$$\begin{array}{rl} \log 127 = & 2,103\,803\,72 \\ \log 39 = & 1,591\,064\,61 \\ c^t \log 826 = & 7,083\,019\,95 \\ \hline & 0,777\,888\,28 \end{array}$$

Le résultat cherché est le nombre 5,9964 correspondant au logarithme 0,777 888 28 (voir la règle du n° 30).

399. *Disposition et usage des tables de logarithmes*. Il existe un assez grand nombre de tables de logarithmes. Toutes donnent les logarithmes de tous les nombres entiers, ordinairement jusqu'à 10 000; celles de Callet vont jusqu'à 108 000. On a quelquefois supprimé les caractéristiques, qu'il est toujours facile de former pour chaque nombre (10° n° 393).

Les logarithmes des nombres compris entre 1 et 10, 10 et 100, etc., étant incommensurables, on n'a pu mettre dans les tables leurs valeurs exactes. Dans la table de Callet on a donné leurs valeurs les plus approchées en conservant 8 décimales pour les nombres entiers moindres que 1200 et pour ceux de 100 000 à 108 000, et 7 décimales pour les nombres entiers de 1200 et 100 000 (175). La table de Jérôme Lalande donne les logarithmes de tous les nombres entiers jusqu'à 10 000, avec 5 décimales. M. Marie a poussé cette table à 8 décimales pour les nombres entiers ne dépassant pas 990 et à 7 décimales pour les nombres entiers de 990 à 10 000.

Les tables contiennent les nombres dans la première colonne verticale, leurs logarithmes approchés dans la seconde colonne, et les différences des logarithmes consécutifs dans la troisième.

Supposons que nous avons à notre disposition la table de Lalande à 7 décimales, et proposons-nous divers problèmes à résoudre à l'aide des logarithmes. Il sera facile de voir de quelle manière on opérerait dans le cas où les tables seraient plus ou moins étendues.

400. 1er *Problème. Trouver le logarithme d'un nombre donné :*

1° *D'un nombre entier* 847 *qui se trouve dans la table*, c'est-à-dire moindre que 10 000.

On cherche dans la première colonne verticale de la table le nombre 847, et son logarithme 2,927 883 41 se trouve, sur la même ligne horizontale, dans la deuxième colonne verticale.

2° *D'un nombre entier* 487 346, *qui ne se trouve pas dans la table.*

On sépare sur la droite de ce nombre assez de chiffres décimaux, pour que le nombre 4873,46 qui en résulte approche le plus possible de la limite supérieure 10 000 de la table sans la surpasser; on opère ensuite de la manière suivante :

Puisque l'on a $487\,346 = 4873,46 \times 100$, on a (395 et 396)

$$\log 487\,346 = \log 4873,46 + \log 100 = \log 4873,46 + 2.$$

Ce qui ramène le problème à déterminer le logarithme du nombre 4873,46. Or 4873,46 étant compris entre 4873 et 4874, son logarithme est compris entre les logarithmes tabulaires 3,687 7964 et 3,687 8855. Pour obtenir la quantité x qu'il faut ajouter au logarithme de 4873 pour avoir celui de 4873,46, on prend, dans la troisième colonne verticale de la table, la différence 0,000 0891 entre les logarithmes de 4873 et de 4874; cette différence de logarithmes provenant d'une différence d'une unité entre les nombres, pour la différence $4873,46 - 4873 = 0,46$, on aura, en supposant, comme on peut le faire pour de petits accroissements, que les différences des logarithmes sont proportionnelles aux différences des nombres,

$$x = 0,000\,0891 \times 0,46 = 0,000\,0410.$$

On a alors $\log 4873,46 = 3,687\,7964 + 0,000\,0410 = 3,687\,8374,$

et, par suite, $\log 487\,346 = 5,687\,8374.$

On obtiendra ainsi le logarithme d'un nombre entier quelconque.

	891
1	89
2	178
3	267
4	356
5	445
6	535
7	624
8	713
9	802

La table de Callet donnant, au-dessous de chaque différence des tables, les valeurs les plus approchées des produits de cette différence par les 9 premiers multiples de 0,1 en ne conservant que 7 chiffres décimaux, cela permet d'abréger le calcul de la valeur de x. Ainsi, pour obtenir le produit de 891 dix-millionièmes par 0,46, comme $891 \times 0,46 = 891 \times 0,4 + 891 \times 0,06$ (32), on prend, au-dessous de 891 et à la droite du chiffre 4, le produit 356 dix-millionièmes de 891 dix-millionièmes par 0,4; puis, à la droite du chiffre 6, le produit 535 dix-millionièmes de 891 dix-millionièmes par 0,6, ou 54 dix-millionièmes pour le produit de 891 dix-millionièmes par 0,06. On a alors $x = 0,000\,0356 + 0,000\,0054 = 0,000\,0410$.

La table de Callet ne donnant les différences et les multiples de ces différences que pour les logarithmes des nombres supérieurs à 10 200,

la différence 891 ne s'y trouve pas; mais l'exemple que nous avons choisi montre comment l'on opérera dans tous les cas.

On dispose les calculs comme l'indique l'exemple suivant :

Nombre 487.346.

log 4873	= 3,687 7964
pour 0,4	356
pour 0,06	54
log 4873,46	= 3,687 8374
log 487 346	= 5,687 8374

La proportionnalité admise entre les accroissements des logarithmes et ceux des nombres, ne permettant guère de compter que sur l'exactitude des résultats fournis par les deux premiers chiffres décimaux du nombre proposé préparé de manière qu'il ne dépasse pas la limite de la table, on peut considérer comme inutile de tenir compte de ceux qui peuvent suivre les deux premiers.

3° *D'une fraction* $\frac{7}{4}$. On a, d'après le 8° n° 393,

$$\log\frac{7}{4} = \log 7 - \log 4 = 0{,}845\,098\,04 - 0{,}602\,059\,99 = 0{,}243\,038\,05.$$

Si la fraction était moindre que l'unité, le logarithme de son dénominateur serait plus grand que celui de son numérateur, d'où il résulterait que le sien serait négatif. Ainsi l'on a, conformément à ce qui a été dit n° 397,

$$\log\frac{24}{47} = \log 24 - \log 47 = 1{,}380\,211\,24 - 1{,}672\,097\,86 = -0{,}291\,886\,62$$

ou $$-1 + 1 - 0{,}291\,886\,62 = \bar{1}{,}708\,113\,38.$$

4° *D'un nombre décimal.* Un nombre décimal pouvant être considéré comme étant une fraction dont le numérateur est le nombre proposé abstraction faite de la virgule, et le dénominateur, l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres décimaux dans le nombre proposé, on déduit du 3° précédent la règle posée n° 396. Ainsi l'on a

$$\log 4{,}873 = \log 4873 - 3 = 3{,}687\,7964 - 3 = 0{,}687\,7964.$$

De même,

$$\log 0{,}048\,7346 = \log 487\,346 - 7 = 5{,}687\,8374 - 7 = \bar{2}{,}687\,8374.$$

401. 2° *Problème. Trouver à quel nombre appartient un logarithme donné :*

1° *Lorsque le logarithme donné se trouve dans la table*, le nombre qui lui correspond se trouve à sa gauche dans la première colonne verticale. Ainsi le nombre qui a 1,919 078 09 pour logarithme est 83.

2° *Lorsque le logarithme ne diffère d'un logarithme de la table que par*



la caractéristique, on multiplie ou on divise le nombre correspondant au logarithme de la table, par l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a d'unités en plus ou en moins dans la caractéristique du logarithme proposé que dans celle du logarithme de la table. Ainsi, pour avoir le nombre qui a 4,91907809 pour logarithme, on cherche dans la table le nombre 8300 qui a pour logarithme 3,91907809, et en le multipliant par 10 on a le nombre 83000, qui est le nombre dont le logarithme est 4,91907809. On serait arrivé au même résultat en cherchant dans la table le nombre 830 ou celui 83, qui ont respectivement pour logarithmes 2,91907809 et 1,91907809.

3° *Lorsque le logarithme donné, dont la caractéristique est la plus grande qui se trouve dans la table*, c'est-à-dire 3 pour la table de Lalande, *ne se trouve pas dans la table*, comme, par exemple, 3,2733127, pour avoir le nombre qui lui correspond, on remarque que le logarithme 3,2733127 étant compris entre les logarithmes successifs 3,2732328 et 3,2734643 de la table, le nombre qui lui correspond est compris entre les nombres 1876 et 1877 qui correspondent à ces logarithmes tabulaires. La partie entière de ce nombre est évidemment 1876; pour avoir sa partie décimale x, on prend, dans la troisième colonne verticale de la table, la différence 0,0002315 entre les logarithmes de 1876 et 1877; on cherche ensuite la différence 3,2733127 — 3,2732328 = 0,0000799 entre le logarithme donné et le logarithme immédiatement plus petit. Alors la différence entre les nombres étant 1 pour une différence de 0,0002315 entre les logarithmes, pour une différence de 0,0000799 entre les logarithmes elle sera

$$x = \frac{0,000\,0799}{0,000\,2315} = \frac{799}{2315} = 0,345.$$

Le nombre qui a 3,2733127 pour logarithme est donc 1876,345.

	2315
1	231
2	463
3	694
4	926
5	1157
6	1389
7	1620
8	1852
9	2083

Les produits de la différence 0,0002315 par les 9 premiers multiples de 0,1, que donne la table de Callet (2°, n° 400), permettent encore d'abréger le calcul de la valeur de x. Ainsi, cherchant le produit 694 qui approche le plus de 799 sans le surpasser, le chiffre 3 qui se trouve à sa gauche est le chiffre des dixièmes du nombre cherché. Prenant la différence $799 - 694 = 105$, le produit $926 \times 0,1 = 92,6$ étant immédiatement inférieur à la différence 105, c'est que 4 est le chiffre des centièmes du nombre cherché.

Prenant de même la différence $105 - 93 = 12$, le produit $1157 \times 0,01 = 11,57$, immédiatement inférieur à 12, indique que 5 est le chiffre des millièmes. On a donc $x = 0,345$.

On peut disposer les calculs de la manière suivante :

log	3,273 3127	
pour	3,273 2328	1876
1er reste	799	
pour	694	0,3
2e reste	105	
pour	93	0,04
3e reste	12	
pour	12	0,005
Nombre		1876,345

La proportionnalité admise entre les accroissements des logarithmes et ceux des nombres ne permet guère d'obtenir par le calcul précédent plus de deux chiffres exacts en sus de ceux qui sont fournis directement par la table; le 3e chiffre peut n'avoir qu'une valeur approchée. Si la table est à 5 décimales, il ne faut guère compter que sur un chiffre exact.

4° *Lorsque la caractéristique du logarithme donné n'est pas* 3, *et que de plus la partie décimale ne se trouve pas dans la table*, on ramène le cas au précédent, en augmentant ou en diminuant la caractéristique d'assez d'unités pour qu'elle devienne égale à 3, c'est-à-dire égale à la plus grande caractéristique contenue dans la table, afin de trouver le plus de chiffres possible du nombre demandé. On cherche comme au 3° le nombre auquel appartient le nouveau logarithme, en le calculant avec 3 décimales, et on avance la virgule d'autant de rangs vers la gauche ou vers la droite qu'on a ajouté d'unités au logarithme donné ou qu'on en a retranché.

Ainsi, pour trouver à quel nombre appartient le logarithme 1,273 3127, on cherche, comme au 3°, le nombre 1876,345, qui correspond au logarithme 3,273 3127, et en le divisant par 100 on a 18,763 45, qui est le nombre correspondant au logarithme 1,273 3127.

5° *Lorsque le logarithme donné est entièrement négatif*, on lui ajoute assez d'unités pour que le résultat soit entièrement positif et affecté de la plus grande caractéristique 3 de la table; ce qui revient à ajouter quatre unités de plus qu'il n'y en a dans la caractéristique. On cherche le nombre auquel appartient ce nouveau logarithme, et on avance la virgule d'autant de rangs vers la gauche de ce nombre qu'on a ajouté d'unités au logarithme donné.

Ainsi, pour trouver le nombre qui a $-2,312\,1626$ pour logarithme, on ajoute $2+4$ ou 6 unités à ce logarithme, ce qui donne 3,687 8374, dont le nombre correspondant est 4873,46. Le nombre correspondant au logarithme proposé est alors 0,004 873 46.

6° *Lorsque la caractéristique du logarithme proposé est seule négative*, on lui ajoute assez d'unités pour qu'elle devienne positive et égale à 3; on cherche le nombre correspondant au nouveau logarithme, et avançant la virgule d'autant de rangs vers la gauche de ce nombre qu'on a ajouté d'unités à la caractéristique, on a le nombre correspondant au logarithme proposé.



Ainsi, pour avoir le nombre correspondant au logarithme $\overline{2},687\,8374$, on ajoute 5 unités à la caractéristique —2 ; ce qui revient à considérer le logarithme proposé comme ayant 3 pour caractéristique, ce qui donne 3,687 8374. Le nombre correspondant à ce logarithme étant 4873,46, celui qui correspond au logarithme proposé est 0,048 7346.

402. *En faisant usage des logarithmes :*

1° *Multiplier* 5736 *par* 743 (6°, n° 393) :

on a
$$\log(5736 \times 743) = \log 5736 + \log 743 = 3,758\,6091 + 2,870\,9888 = 6,629\,5979.$$

Le nombre 4 261 848, qui correspond à ce logarithme, est le produit demandé.

2° *Diviser* 4 261 848 *par* 743 (8°, n° 393) :

on a
$$\log\left(\frac{4\,261\,848}{743}\right) = \log 4\,261\,848 - \log 743 = 6,629\,5979 - 2,870\,9888 = 3,758\,6091.$$

Le nombre 5736, qui correspond à ce logarithme, est le quotient cherché.

3° *Élever le nombre* 17 *à la troisième puissance* (7°, n° 393) :

on a
$$\log(17^3) = 3(\log 17) = 3 \times 1,230\,448\,92 = 3,691\,346\,76.$$

Le nombre 4913, qui correspond à ce logarithme, est le cube de 17.

4° *Extraire la racine cinquième de* 243 (9°, n° 393) :

$$\log \sqrt[5]{243} = \frac{\log 243}{5} = \frac{2,385\,606\,27}{5} = 0,477\,121\,25.$$

Le nombre 3, correspondant à ce logarithme, est la racine cherchée.

403. *Les moyens 3° et 4° du numéro précédent font voir qu'à l'aide des logarithmes on peut obtenir une puissance ou une racine quelconque,* même d'un degré fractionnaire, *d'un nombre.*

Soit à élever 125 à la puissance $\frac{1}{3}$. On a

$$\log\left(125^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}(\log 125) = \frac{2,096\,910\,01}{3} = 0,698\,970\,00.$$

Le nombre 5, correspondant à ce logarithme, est la puissance $\frac{1}{3}$ de 125.

On voit qu'élever un nombre à une puissance $\frac{1}{3}$ revient à en extraire la racine cubique (277).

En général, élever un nombre à une puissance fractionnaire revient à extraire du nombre la racine dont l'indice est le degré de la puissance renversé; et, réciproquement, extraire une racine d'un indice fractionnaire d'un nombre revient à élever ce nombre à une puissance d'un

degré égal à l'indice renversé. Ainsi

$$\log \sqrt[\frac{2}{3}]{64} = \log\left(64^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2} \times 1,806\,179\,97 = 2,709\,269\,96.$$

Le nombre 512, correspondant à ce logarithme, est la racine $\frac{2}{3}$ ou la puissance $\frac{3}{2}$ de 64.

Cet exemple fait voir qu'élever un nombre à une puissance d'un degré fractionnaire, $\frac{3}{2}$ par exemple, revient à l'élever à une puissance égale au numérateur 3, et à extraire de la puissance obtenue une racine d'un indice égal au dénominateur 2. Cet exemple fait voir également qu'extraire une racine d'un indice fractionnaire, $\frac{2}{3}$, par exemple, d'un nombre, revient à extraire de ce nombre une racine ayant le numérateur 2 pour indice, et à élever la racine à une puissance d'un degré égal au dénominateur 3; ce qui revient à élever le nombre à la puissance $\frac{3}{2}$, c'est-à-dire à élever d'abord le nombre au cube et à extraire ensuite la racine carrée de ce cube.

404. *Logarithmes népériens ou hyperboliques.* Les logarithmes ont été imaginés par le baron écossais Jean Néper, qui en a publié la découverte en 1614. Les *logarithmes népériens*, que l'on nomme aussi *logarithmes hyperboliques*, à cause du rôle important qu'ils jouent dans la quadrature de l'hyperbole (voir 5ᵉ partie), ont pour base le nombre 2,718 281 828 459... Néper reconnut qu'il aurait pu choisir un système de logarithmes plus en harmonie que le sien avec notre système de numération, et par conséquent plus convenable pour les calculs numériques, et il adopta le système ordinaire, dont la base est 10. Mais la mort l'empêcha de dresser ses nouvelles tables, et il chargea de ce travail important Henri Briggs, professeur de mathématiques au collége de Gresham, qui publia, en 1618, année de la mort de Néper, une table des logarithmes vulgaires des 1000 premiers nombres entiers; en 1624, il en donna une seconde contenant les logarithmes des nombres entiers de 1 à 20 000 et de 90 000 à 100 000. Les lacunes furent bientôt remplies par Gellibrand, Gunther et Adrien Vlacq, savants distingués, élèves ou amis de Briggs.

405. Les logarithmes log. A et L. A d'un même nombre A dans deux systèmes, dont les bases sont b et b', sont en raison inverse des logarithmes de ces bases pris dans un système quelconque. Ainsi l'on a, en prenant, par exemple, les logarithmes de b et b' dans le système log A,

$$\frac{\log \mathrm{A}}{\mathrm{L.\,A}} = \frac{\log b'}{\log b},$$

d'où,

$$\log \mathrm{A} = \mathrm{L.\,A}\,\frac{\log b'}{\log b} \quad \text{et} \quad \mathrm{L.\,A} = \log \mathrm{A}\,\frac{\log b}{\log b'},$$

ou, en remarquant que $\log b = 1$ (1°, n° 393),

$$\log A = L.\,A \times \log b', \quad \text{et} \quad L.\,A = \log A \times \frac{1}{\log b'}.$$

Ce qui permet de passer du logarithme d'un nombre quelconque A dans un système au logarithme de ce même nombre dans un autre système.

Soit, par exemple, $A = 743$, dont le logarithme hyperbolique $L.\,A = 6{,}610\,6960$, et supposons qu'il s'agisse de déterminer le logarithme vulgaire $\log A$.

La base $b' = 2{,}718\,2818$ du système népérien a pour logarithme vulgaire $\log b' = 0{,}434\,2945$; donc

$$\log 743 = 6{,}610\,6960 \times 0{,}434\,2945 = 2{,}870\,9888.$$

Ainsi *le produit du logarithme népérien d'un nombre par* 0,434 2945 *est le logarithme vulgaire de ce nombre.*

Comme on a aussi

$$L.\,A \text{ ou } 6{,}610\,6960 = \frac{\log A}{\log b'} = \frac{2{,}870\,9888}{0{,}434\,2945} = 2{,}870\,9888 \times 2{,}302\,585,$$

le logarithme népérien d'un nombre est donc égal au quotient du logarithme vulgaire de ce nombre par 0,434 2945, ou encore *au produit de ce logarithme vulgaire par* 2,302 585, soit par 2,3026.

$$L.\,10 = 2{,}302\,585.$$

Table des 9 premiers multiples de $\log b'$ et de $\frac{1}{\log b'}$, avec 10 décimales.

	$\log b'$		$\frac{1}{\log b'}$
1	0,434 29 448 19	1	2,302 58 509 30
2	0,868 58 896 38	2	4,605 17 018 60
3	1,302 88 344 57	3	6,907 75 527 90
4	1,737 17 792 76	4	9,210 34 037 20
5	2,171 47 240 95	5	11,512 92 546 50
6	2,605 76 689 14	6	13,815 51 055 80
7	3,040 06 137 33	7	16,118 09 565 10
8	3,474 35 585 52	8	18,420 68 074 40
9	3,908 65 033 71	9	20,723 26 583 69

DEUXIÈME PARTIE.

ALGÈBRE.

DÉFINITIONS ET PRINCIPES.

406. L'*algèbre* est la partie des mathématiques où l'on fait usage de signes particuliers qui permettent d'abréger et de généraliser la résolution des propositions relatives aux quantités en général (2 et 3). C'est l'arithmétique généralisée.

407. Les éléments dont on fait usage en algèbre sont :

1° Les *lettres de l'alphabet*, qui servent à représenter les quantités sur lesquelles on doit raisonner. On représente ordinairement les *quantités connues* ou *données* par les prémières lettres de l'alphabet, a, b, c...., et les *quantités inconnues* ou *cherchées* par les dernières lettres, x, y, z, v, u, t...

Les notations a', a'', a''', etc., que l'on désigne par *a prime*, *a seconde*, *a tierce*, etc., ou encore celles a_1, a_2, a_3, etc., que l'on énonce *a indice* 1, *a indice* 2, *a indice* 3, etc., s'emploient dans une même question pour désigner des quantités analogues de valeurs différentes.

2° Les *signes abréviatifs* du n° 22 ont en algèbre les mêmes significations qu'en arithmétique; ainsi

$$a+b-c=d\times e-\frac{b}{g}$$

signifie a *plus* b *moins* c *égale* d *multiplié par* e *moins* b *divisé par* g.

Pour indiquer le produit de plusieurs quantités représentées par des lettres a, b, c, on écrit et on énonce simplement abc, au lieu de $a\times b\times c$. Des auteurs substituent quelquefois un simple point au signe $\times$. Ainsi $a\,.\,b$ s'énonce *a multiplié par b*.

$\frac{a}{b}$ s'énonce indifféremment a divisé par b, ou a sur b, ou encore le *rapport de* a *à* b.

a : b indique aussi le quotient de a par b ou le rapport de a à b (292).

3° Le *coefficient*, nombre que l'on écrit à la gauche d'une quantité, et qui lui sert de multiplicateur.

Ainsi l'on a

$$3a=a\times 3=a+a+a,\ \text{et}\ \frac{2}{5}a=a\times\frac{2}{5}.$$

3 et $\frac{2}{5}$ sont les coefficients de a, et les expressions précédentes s'énoncent *trois a* et *deux cinquièmes de a*. Une quantité non affectée d'un coefficient a l'unité pour coefficient; mais il ne s'écrit pas.

Un coefficient peut encore être exprimé au moyen de lettres; c'est ce que nous verrons plus loin.

4° L'*exposant*, qui a la même signification qu'en arithmétique (85). Ainsi a^5 équivaut à $aaaaa$, et on l'énonce *a cinq*. Toute quantité a non affectée d'exposant a l'unité pour exposant (276).

5° Le *radical*, $\sqrt{\ }$, qui indique, comme en arithmétique (235), une racine à extraire; et l'*indice*, nombre qu'on écrit entre les branches du radical, et qui indique le degré de la racine. Ainsi :

$\sqrt{ab}$ indique la racine carrée du produit de a par b, c'est-à-dire la racine carrée du produit des quantités représentées par a et b;

$\sqrt[3]{a^2+b^3}$ indique la racine cubique de la somme du carré de a et du cube de b.

408. Une *quantité algébrique*, ou une *quantité littérale* est une quantité représentée par une *expression algébrique*, c'est-à-dire par une ou plusieurs lettres représentant des nombres liés entre eux par un ou plusieurs signes d'opération.

Une quantité est dite *rationnelle* quand elle ne contient pas de $\sqrt{\ }$:

$$5ab^2 - \frac{3a+b}{c} + 2bc.$$

Une quantité est dite *irrationnelle* quand elle contient un ou plusieurs $\sqrt{\ }$:

$$4a^2b - \sqrt{ab^3}.$$

Une quantité est dite *entière* quand elle ne contient ni $\sqrt{\ }$ ni le signe de la division :

$$4a^2b^3 + 5ac - 3c^4.$$

Une quantité est *fractionnaire* quand elle contient le signe de la division :

$$2ab^2 + \frac{a-3b}{2}.$$

409. On appelle :

1° *Terme algébrique*, toute quantité algébrique dont les parties ne sont séparées par aucun des signes + ou —;

2° *Monôme*, une quantité algébrique d'un seul terme : $3ab^2$;

3° *Binôme*, une quantité algébrique de deux termes : $a + b^2c^3$;

4° *Trinôme*, une quantité algébrique de trois termes :

$$\frac{4}{3}a^4c + b^2c^3 + 3c^5, \text{ etc.};$$

5° *Polynôme*, toute quantité algébrique de plusieurs termes :

$$a^2+b^2, \quad ab+b^2c^2+c^4, \quad 3a^3-b^2c-\sqrt[3]{a+b}.$$

410. Un terme est dit *positif* ou *négatif*, selon qu'il est précédé du signe + ou du signe —. Quand le premier terme d'un polynôme est positif, ce qui a lieu ordinairement, on supprime son signe; ainsi au lieu d'écrire $+3a^3+b^2c^2$, on écrit seulement $3a^3+b^2c^2$.

Deux termes affectés l'un du signe + et l'autre du signe — sont dits de *signes contraires*. Tels sont $3ab$ et $-cd$.

411. La *valeur absolue* d'une quantité est sa valeur abstraction faite de son signe. Sa *valeur relative* ou *algébrique* est sa valeur eu égard à son signe.

412. La *valeur numérique d'une quantité algébrique* est le nombre qu'on obtient en remplaçant dans cette quantité chaque lettre par sa valeur numérique, et en effectuant ensuite toutes les opérations arithmétiques indiquées par les divers signes qui entrent dans la quantité proposée.

Supposant $a=2$, $b=3$, $c=4$, la valeur numérique de

$$a^2-ab+b^2c-c^2 \text{ est } 2^2-2\times3+3^2\times4-4^2=18.$$

413. *Remarque* 1re. La valeur numérique d'un polynôme est égale à la somme de ses termes positifs, moins celle de ses termes négatifs :

$$a^2-ab+b^2c-c^2=a^2+b^2c-(ab+c^2)=4+36-(6+16)=18.$$

Remarque 2e. La valeur numérique d'un polynôme ne change pas lorsqu'on intervertit l'ordre de ses termes sans en changer les signes respectifs :

$$a^2-ab+b^2c-c^2=b^2c-ab-c^2+a^2.$$

414. Le *degré d'un monôme ou d'un terme par rapport à une de ses lettres* est l'exposant de cette lettre, et son *degré par rapport à plusieurs de ses lettres* est la somme des exposants de ces lettres. Ainsi le monôme $7a^2b^3$ est du 2e degré par rapport à a, du 3e par rapport à b, et du 5e par rapport aux lettres a et b.

Quand il est question du *degré d'un monôme*, sans autre indication, on entend parler du degré de ce monôme par rapport à toutes ses lettres. Ainsi le monôme $7ab^3c^2$ est du 6e degré.

415. Le *degré d'un polynôme par rapport à une ou plusieurs de ses lettres* est le plus grand exposant de cette lettre, ou la plus grande somme des exposants de ces lettres dans un terme du polynôme. Ainsi le polynôme $5ab^4+6a^2b^5-9a^4b^2$ est du 4e degré par rapport à a, du 5e par rapport à b, et du 7e par rapport aux lettres a et b.

Quand un monôme ou un polynôme ne contient pas une lettre, on dit qu'il est du *degré zéro* par rapport à cette lettre (448).

416. *Un polynôme est homogène par rapport à une ou plusieurs de ses lettres*, quand tous ses termes sont du même degré par rapport à cette

lettre ou à ces lettres. Ainsi le polynôme $5a^2b^2c + 6a^2b^2c^2 - a^2bc^3$ est homogène et du 2e degré par rapport à a, et homogène et du 4e degré par rapport aux lettres b et c.

Quand on dit qu'un *polynôme est homogène*, sans autre indication, on entend que ce polynôme est homogène par rapport à toutes ses lettres, c'est-à-dire que tous ses termes sont du même degré. Ainsi le polynôme $3a^2b^3c - 5a^3bc^2 + a^4b^2$ est homogène et du 6e degré. Au contraire, celui $3ab^3c^2 - 5a^2bc^2 + 2a^3bc^3$ n'est pas homogène.

LIVRE I.

Des quatre opérations algébriques fondamentales.

RÉDUCTION DES TERMES SEMBLABLES.

417. On appelle *termes semblables*, des termes qui contiennent les mêmes lettres affectées respectivement des mêmes exposants. Ainsi ab et $4ab$ sont deux termes semblables; il en est de même de $5a^2b^3$ et $-2a^2b^3$. Les termes ab^2, ab^3 ne sont pas semblables.

418. *Faire la réduction des termes semblables d'un polynôme*, c'est réduire en un seul terme chaque groupe de termes semblables de ce polynôme.

419. *Pour opérer la réduction des termes semblables d'un polynôme*, on remplace chacun des groupes de termes semblables par un seul terme semblable à ceux-ci, auquel on donne pour coefficient la différence entre la somme des coefficients affectés du signe + et celle des coefficients précédés du signe —, et pour signe celui des coefficients dont la somme est la plus grande.

Ainsi ayant le polynôme

$$3ab^2 - 4a^2c + 3a^2c - ab^2 - 5a^2c + 7bc,$$

on remarque qu'on peut l'écrire

$$3ab^2 - ab^2 + 3a^2c - 4a^2c - 5a^2c + 7bc. \qquad (413)$$

Or $3ab^2 - ab^2$ se réduit à $2ab^2$; $3a^2c - 4a^2c - 5a^2c$ se réduit à $3a^2c - 9a^2c$ ou $-6a^2c$. Le polynôme proposé se réduit donc à

$$2ab^2 - 6a^2c + 7bc.$$

Quelquefois on se contente d'écrire les coefficients d'un même terme entre parenthèses avec leurs signes respectifs; c'est ce qu'on est obligé de faire quand ces coefficients sont représentés par des lettres différentes (427). Le polynôme

$$7x + ax - abx + ay^2 - cy^2 - cdy^2$$

se réduit ainsi à

$$(7 + a - ab)x + (a - c - cd)y^2.$$

La réduction des termes semblables est d'un usage fréquent dans toutes les opérations algébriques.

ADDITION.

120. Les quatre opérations fondamentales sur les quantités algébriques devant former à l'esprit les mêmes idées que les opérations analogues de l'arithmétique, il est inutile de les définir de nouveau (23, 26, 31 et 48).

121. *Pour additionner plusieurs quantités algébriques, monômes ou polynômes*, on les écrit les unes à la suite des autres, en conservant à chaque terme son signe primitif, et l'on fait, s'il y a lieu, la réduction des termes semblables (119). Ainsi la somme des quantités algébriques $3a^2 + 4ab$, $6ab - a^2$, $5b^3 - 3ab$ et $-2bc$, est

$$3a^2 + 4ab + 6ab - a^2 + 5b^3 - 3ab - 2bc,$$

ou, en réduisant,

$$2a^2 + 7ab + 5b^3 - 2bc.$$

Dans la pratique, on écrit ordinairement les quantités à ajouter les unes sous les autres, comme ci-dessous; on fait la réduction des termes semblables comme si les quantités à ajouter étaient placées les unes à la suite des autres, et l'on écrit au-dessous, avec leurs signes respectifs, les résultats de la réduction.

$$\begin{array}{l} 4a^3 \ + 5a^2b + c \\ 2a^3 \ - 7a^2b - 4c \\ 6a^2b + c + bc + 25 \\ \hline 6a^3 \ + 4a^2b - 2c + bc + 25 \end{array}$$

On peut faciliter la réduction des termes semblables en plaçant ces termes les uns sous les autres quand on écrit les quantités à ajouter.

Un léger trait passé sur les termes, au fur et à mesure qu'on les réduit, permet de distinguer les termes dont on n'a pas encore tenu compte dans la formation du résultat.

Remarque. Selon qu'à une quantité on ajoute 7 ou -7, cette quantité augmente ou diminue de 7; l'addition algébrique ne comporte donc pas nécessairement l'idée d'augmentation.

SOUSTRACTION.

122. *Pour soustraire une quantité algébrique d'une autre*, on écrit la quantité à soustraire à la droite de celle dont on soustrait, en changeant les signes de tous ses termes, et l'on fait, s'il y a lieu, la réduc-

tion des termes semblables. Ainsi, soustrayant $3a^2 - 2ab + bc - b^2$ de $7a^2 - 2ab$, on a

$$7a^2 - 2ab - 3a^2 + 2ab - bc + b^2,$$

ou, en réduisant,

$$4a^2 - bc + b^2.$$

Pour faire dépendre la soustraction de l'addition, et faciliter la réduction des termes semblables, on pose sous la quantité dont on soustrait la quantité à soustraire, en donnant à ses termes des signes contraires à ceux qu'ils ont, et la somme des deux quantités algébriques ainsi placées est le résultat demandé.

Ainsi, pour soustraire $2a + 3b^2c - 7$ de $8a - 5b^2c - 4$, on exécute le calcul de la manière suivante :

$$\begin{array}{rr} & 8a - 5b^2c - 4 \\ & -2a - 3b^2c + 7 \\ \hline \text{reste} & 6a - 8b^2c + 3 \end{array}$$

Quand on ne tient pas à réduire à un seul polynôme le résultat de la soustraction, on écrit la quantité à soustraire à la droite de la quantité dont on soustrait, en la plaçant entre les branches d'une parenthèse que l'on fait précéder du signe —. De cette manière, le résultat de la soustraction précédente est

$$8a - 5b^2c - 4 - (2a + 3b^2c - 7).$$

Si, ayant écrit le résultat sous cette forme, on voulait le réduire à un seul polynôme, il suffirait de faire la réduction des termes semblables, en considérant chaque terme placé dans la parenthèse comme ayant un signe contraire à celui qu'il y possède. De cette manière, on obtiendrait pour résultat $6a - 8b^2c + 3$, comme plus haut.

Remarque. Comme, selon que d'une quantité on retranche 7 ou —7, cette quantité diminue ou augmente de 7, la soustraction algébrique ne comporte donc pas nécessairement l'idée de diminution.

MULTIPLICATION.

423. *Pour multiplier un monôme par un monôme*, il y a 4 règles distinctes à considérer :

1° *La règle des signes.* Le produit de deux monômes affectés du même signe a le signe + ; le produit de deux monômes affectés de signes contraires a le signe —. Ainsi + multiplié par + et — multiplié par — donnent + au produit, tandis que + multiplié par — et — multiplié par + donnent — au produit;

2° *La règle des coefficients.* Le coefficient du produit est égal au produit des coefficients des facteurs;

3° *La règle des lettres.* Toute lettre qui entre dans l'un des facteurs ou dans les deux s'écrit une seule fois au produit;

4° *La règle des exposants.* L'exposant de chaque lettre du produit est égal à la somme des exposants de cette lettre dans les facteurs. Une lettre qui n'a pas d'exposant est supposée avoir l'unité pour exposant (85 et 407). Une lettre qui n'entre pas dans un facteur est supposée avoir 0 pour exposant dans ce facteur (418).

Applications de ces règles :

$$3a^m \times a = 3a^{m+1};$$
$$-2a \times -3a^2b^2 = 6a^3b^2;$$
$$+4a^2b^3c \times -b^2c = -4a^2b^5c^2;$$
$$-2b^2cd \times +4c^2d^3e^2 = -8b^2c^3d^4e^2.$$

424. *Le produit de plusieurs monômes s'obtient* en multipliant les deux premiers monômes entre eux, le produit des deux premiers par le 3°, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait employé le dernier monôme comme multiplicateur.

De cette règle et du n° 423 découlent les règles suivantes pour former le produit :

1° Le produit a le signe + quand le nombre des monômes facteurs négatifs est nul ou pair; il a le signe — quand le nombre de ces facteurs est impair;

2° Le coefficient du produit est égal au produit des coefficients des facteurs;

3° Chaque lettre qui se trouve au moins dans l'un des facteurs s'écrit une seule fois au produit;

4° Chaque lettre du produit a pour exposant la somme de ses exposants dans les facteurs.

Ainsi l'on a

$$2a \times 3a^2b \times -b^3c^2 \times -5 = 30a^3b^4c^2;$$
$$3a^2 \times -2ab^2 \times -5a^4bc^3 \times -5c = -150a^7b^3c^4.$$

Remarque. Le degré du produit de plusieurs monômes est égal à la somme des degrés des facteurs (414).

425. *Le produit de plusieurs monômes change ou ne change pas de signe*, selon qu'on change de signe un nombre impair ou un nombre pair de ses facteurs (424).

426. *Le produit de plusieurs monômes ne change pas quand on intervertit l'ordre de ses facteurs* (40).

427. *Pour multiplier un polynôme par un monôme*, on multiplie successivement chacun des termes du polynôme par le monôme, d'après les règles données pour obtenir le produit de deux monômes (423). Exemple :

$$\begin{array}{l} 3a^2 + 4ab - b^2c \\ 2ab^2 \\ \hline 6a^3b^2 + 8a^2b^3 - 2ab^4c \end{array}$$

Pour indiquer la multiplication d'un polynôme par un monôme, on

écrit ce polynôme entre parenthèses, et on le considère comme un monôme. Ainsi, pour indiquer le produit de $3a^2 + 4ab - b^2c$ par $2ab^2$, on écrit :

$$(3a^2 + 4ab - b^2c) \times 2ab^2.$$

Quand le facteur monôme est positif, on supprime souvent le signe $\times$. Il en est de même lorsque le monôme est négatif, mais alors placé devant le polynôme. Ainsi $-a(a-b)$, de même que $-a \times (a-b)$ indiquent le produit de $-a$ par $a-b$, mais en intervertissant l'ordre des facteurs (425), il faut écrire $(a-b) \times -a$.

428. *Pour multiplier un polynôme par un polynôme*, on multiplie successivement tout le polynôme multiplicande par chaque terme du multiplicateur (427), et on fait l'addition des produits partiels (421 et 432). Exemple :

Multiplicande	$4a^3 + 2a^2b - 5ab^2 - 2b^3$
Multiplicateur	$2a^2 - 3ab + b^2$
1er produit partiel	$8a^5 + 4a^4b - 10a^3b^2 - 4a^2b^3$
2e *id.*	$-12a^4b - 6a^3b^2 + 15a^2b^3 + 6ab^4$
3e *id.*	$+ 4a^3b^2 + 2a^2b^3 - 5ab^4 - 2b^5$
Produit	$8a^5 - 8a^4b - 12a^3b^2 + 13a^2b^3 + ab^4 - 2b^5$

Pour indiquer la multiplication d'un polynôme par un autre, on les écrit entre parenthèses, et on les considère comme des monômes. Ainsi la multiplication précédente s'indique

$$(4a^3 + 2a^2b - 5ab^2 - 2b^3) \times (2a^2 - 3ab + b^2)$$

ou

$$(4a^3 + 2a^2b - 5ab^2 - 2b^3)(2a^2 - 3ab + b^2).$$

429. *Le produit de plusieurs polynômes s'obtient* en multipliant les deux premiers polynômes entre eux, le produit obtenu par le 3e polynôme, et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les polynômes aient été employés comme multiplicateurs. Cette règle est encore applicable au cas où il y a des facteurs monômes.

430. Le produit de plusieurs quantités algébriques, monômes ou polynômes, ne change pas quand on intervertit l'ordre des facteurs (426).

431. *Ordonner un polynôme par rapport à une lettre*, c'est disposer ses termes de manière que les exposants de la lettre considérée aillent en croissant ou en décroissant.

Le polynôme $ab^4 + 3a^3b - 5a^2b^2 + a^4$, ordonné par rapport à la lettre a, suivant l'ordre croissant, donne

$$ab^4 - 5a^2b^2 + 3a^3b + a^4;$$

suivant l'ordre décroissant, il devient

$$a^4 + 3a^3b - 5a^2b^2 + ab^4.$$

Dans cet exemple, on voit que le polynôme se trouve en même temps ordonné par rapport à la lettre b.

La lettre par rapport à laquelle un polynôme est ordonné est dite *lettre principale.*

Lorsque plusieurs termes du polynôme contiennent la même puissance de la lettre principale, on écrit une seule fois cette puissance, et à sa gauche, entre parenthèses, ou dans une colonne verticale séparée par un trait, les quantités qui multiplient cette puissance. Ainsi le polynôme

$$3a^2b + 5ab^2 + 2b^3 - a^2 + 4ab - 3b^2 - ac,$$

ordonné par rapport aux exposants décroissants de la lettre a, devient

$$(3b-1)a^2 + (5b^2 + 4b - c)a + 2b^3 - 3b^2$$

ou

$$\left.\begin{matrix} 3b \\ -1 \end{matrix}\right| a^2 + \left.\begin{matrix} 5b^2 \\ +4b \\ -c \end{matrix}\right| a + \begin{matrix} 2b^3 \\ -3b^2 \end{matrix}$$

Il convient d'ordonner, comme on vient de le faire, par rapport à une autre lettre b, les polynômes multiplicateurs des différentes puissances de la lettre principale a.

432. On facilite beaucoup la réduction des termes semblables dans la multiplication des polynômes, en ordonnant ces polynômes par rapport à une même lettre. C'est ce qu'on a fait dans l'application du n° 428, et ce que nous allons répéter pour un nouvel exemple. Soit à multiplier

$$(3a-b)x^2 + (5a^2 - 4a + b)x + 2a^3 - 3a^2$$

par

$$(6a+b)x - 2a^2 - b.$$

Les coefficients de la lettre principale x n'étant pas des nombres donnés, mais des polynômes, la multiplication est plus compliquée. Ordinairement, dans ce cas, on ordonne d'après la seconde méthode, et l'on suit la règle générale de la multiplication des polynômes. Ainsi on multiplie tous les termes du multiplicande d'abord par le premier terme $6ax$ du multiplicateur, puis par le deuxième bx, puis par le troisième, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait employé le dernier, et l'on fait la réduction des termes semblables dans chaque colonne verticale de produits partiels obtenus.

Multiplicande	$3a$	$x^2 + 5a^3$	$x + 2a^3$	
	$-b$	$-4a$	$-3a^2$	
		$+b$		
Multiplicateur	$6a$	$x - 2a^2$		
	$+b$	$-b$		
	$18a^2$	$x^3 + 30a^3$	$x^2 + 12a^5$	$x - 4a^5$
	$-6ab$	$-24a^2$	$-18a^3$	$+6a^4$
	$+3ab$	$+6ab$	$+2a^3b$	$-2a^3b$
	$-b^2$	$+5a^2b$	$-3a^2b$	$+3a^2b$
		$-4ab$	$-10a^4$	
		$+b^2$	$+8a^3$	
		$-6a^3$	$-2a^2b$	
		$+2a^2b$	$-5a^2b$	
		$-3ab$	$+4ab$	
		$+b^2$	$-b^2$	
Produit	$18a^2$	$x^3 + 24a^3$	$x^2 + 2a^4$	$x - 4a^5$
	$-3ab$	$-24a^2$	$-10a^3$	$+6a^4$
	$-b^2$	$+7a^2b$	$+2a^3b$	$-2a^3b$
		$-ab$	$-10a^2b$	$+3a^2b$
		$+2b^2$	$+4ab$	
			$-b^2$	

433. Un polynôme ordonné est dit *complet* ou *incomplet*, selon qu'il contient ou non la lettre principale avec tous les exposants inférieurs au plus grand qu'elle possède. Ainsi le polynôme $a^4 + 3a^3b - 5a^2b^2 + ab^4$ est complet par rapport à a; il est, au contraire, incomplet par rapport à b, parce qu'il ne contient pas b^3.

434. Le produit d'un polynôme ordonné par rapport à une lettre, par un monôme, est un polynôme ordonné de la même manière par rapport à la même lettre.

435. Lorsque deux polynômes et leur produit sont ordonnés par rapport à une même lettre, le premier terme du produit provient, sans réduction possible, de la multiplication des premiers termes des facteurs, et son dernier terme est le produit des derniers termes des deux facteurs (428). Ce produit ne peut donc avoir moins de deux termes. Le plus grand nombre de termes possible est égal au produit du nombre des termes du multiplicande par le nombre des termes du multiplicateur.

436. Quand un polynôme homogène (416) ne contient que deux lettres, s'il est ordonné par rapport à l'une d'elles, il l'est en même temps par rapport à l'autre, mais dans un ordre inverse :

$$4a^3 + 7a^2b - ab^2 + 3b^3.$$

437. Si deux et en général un nombre quelconque de polynômes sont homogènes, leur produit est homogène, et son degré est égal à la somme

des degrés des facteurs (416). Si tous les facteurs ne sont pas homogènes, le produit n'est pas homogène.

Comme cas particulier, le produit d'un polynôme homogène par un monôme est homogène, et d'un degré égal à la somme des degrés des facteurs.

438. Quand on multiplie chaque lettre d'un monôme ou d'un polynôme homogène d'un degré m, par un même facteur k affecté de l'exposant de chaque lettre, le monôme ou le polynôme est multiplié par k^m :

$$5a^2k^2 \times b^3k^3 \times ck = 5a^2b^3c \times k^6;$$
$$5a^2k^2 \times b^3k^3 \times ck + 6a^3k^3 \times b^2k^2 \times ck - ak \times b^3k^3 \times c^2k^2 =$$
$$(5a^2b^3c + 6a^3b^2c - ab^3c^2)k^6.$$

439. *Le carré de la somme de deux quantités se compose* (84 et 240) : 1° du carré de la première quantité ; 2° du double produit de la première quantité par la seconde ; 3° du carré de la seconde. Ainsi l'on a

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \qquad (428)$$

440. *Le carré de la différence de deux quantités se compose :* 1° du carré de la première quantité ; 2° moins le double produit de la première quantité par la seconde ; 3° plus le carré de la seconde. Ainsi

$$(2a^2b - bc)^2 = 4a^4b^2 - 4a^2b^2c + b^2c^2. \qquad (428)$$

441. Le carré de la somme de deux quantités moins le carré de leur différence est égal à 4 fois le produit de ces quantités (422, 439 et 440) :

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab.$$

442. *Le cube de la somme de deux quantités se compose* (84 et 247) : 1° du cube de la première quantité ; 2° du triple produit du carré de la première quantité par la seconde ; 3° du triple produit de la première par le carré de la seconde ; 4° du cube de la seconde :

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \qquad (428)$$

443. *Le cube de la différence de deux quantités se compose :* 1° du cube de la première quantité ; 2° moins le triple produit du carré de la première quantité par la seconde ; 3° plus le triple produit de la première quantité par le carré de la seconde ; 4° moins le cube de la seconde :

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \qquad (428)$$

444. *Le produit de la somme de deux quantités par leur différence* est égal à la différence des carrés de ces quantités :

$$(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2;$$
$$(2ab + 3b^2c) \times (2ab - 3b^2c) = 4a^2b^2 - 9b^4c^2. \qquad (428)$$

445. *Le carré d'un polynôme quelconque se compose :* du carré du premier terme, du double produit du premier terme par le second, du

carré du second, des doubles produits de chacun des deux premiers par le troisième, du carré du troisième, des doubles produits de chacun des trois premiers par le quatrième, du carré du quatrième, etc. Ainsi l'on a

$$(a+b-c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2; \qquad (428)$$

$$(a+bx+cx^2+dx^3)^2 = a^2 + 2abx + b^2x^2 + 2acx^2 + 2bcx^3 + c^2x^4 + \\ + 2adx^3 + 2bdx^4 + 2cdx^5 + d^2x^6.$$

DIVISION.

446. Une quantité algébrique est *divisible* par une autre, lorsque le quotient de la première par la seconde est une quantité entière (408).

447. *Pour diviser un monôme par un monôme* on distingue, comme pour la multiplication (423), quatre règles :

1° *Le signe du quotient est + ou —* selon que le dividende et le diviseur ont le même signe ou des signes contraires. Ainsi + divisé par + et — divisé par — donnent + au quotient, au lieu que + divisé par — et — divisé par + donnent — au quotient;

2° *Le coefficient du quotient* s'obtient en divisant le coefficient du dividende par celui du diviseur;

3° *Toute lettre du dividende et du diviseur s'écrit une seule fois au quotient;*

4° *L'exposant de chaque lettre du quotient* est égal à l'exposant de cette lettre dans le dividende, moins l'exposant de cette même lettre dans le diviseur.

De ces règles, il résulte qu'on a :

$$\frac{24a^3b^3c^2d}{6ab^2c} = 4a^2bcd, \quad \frac{15a^5b^8cd^3}{-3a^3b^5d^2} = -5a^2b^3cd.$$

Remarque. Le degré du quotient est égal au degré du dividende moins celui du diviseur (414).

448. *Il peut se présenter des cas sur lesquels il convient de donner quelques développements :*

1° Quand le coefficient du dividende n'est pas divisible exactement par celui du diviseur, on laisse le coefficient du quotient sous la forme d'une fraction, que l'on peut réduire à sa plus simple expression (161). Ainsi

$$\frac{6a^4b^2}{9a^2b} = \frac{2}{3}a^2b;$$

2° Lorsqu'une même lettre a le même exposant au dividende et au diviseur, la règle des exposants (4°, 447) conduit à l'écrire au quotient avec l'exposant 0. Ainsi

$$\frac{a^2}{a^2} = a^0.$$

Or, comme on a évidemment $\frac{a^2}{a^2} = 1$, on a aussi $a^0 = 1$, et il résulte

qu'on peut se dispenser de l'écrire au quotient. Ainsi on néglige toute lettre qui a le même exposant au dividende et au diviseur.

De la règle des exposants, on conclut $\frac{a^3}{a^2} = a^1$, et comme $\frac{a^3}{a^2} = \frac{a \times a \times a}{a \times a} = a$, on a donc $a^1 = a$ (276);

3° Une lettre peut avoir un exposant plus fort au diviseur qu'au dividende. Dans ce cas, la règle des exposants (4°, 447) conduit à donner un exposant négatif à cette lettre au quotient. Ainsi

$$\frac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3};$$

4° Une lettre peut se trouver au diviseur sans se trouver au dividende. Dans ce cas, la règle des exposants peut encore s'appliquer, en supposant que la même lettre se trouve au dividende avec l'exposant 0 (2°). Au quotient, cette lettre aura un exposant négatif égal à celui qu'elle a au diviseur. Ainsi

$$\frac{a^4}{a^2 b} = \frac{a^4 b^0}{a^2 b} = a^2 b^{-1}.$$

On voit que les exposants négatifs permettent de rendre générales les règles du n° 447. Ainsi l'on a

$$\frac{-12a^4 b^2 cde}{-8a^2 bc^3 df^2} = \frac{3}{2} a^2 bc^{-2} ef^{-2}.$$

449. *Quoique cette notation des exposants négatifs soit très-commode dans beaucoup de cas, nous n'en ferons d'abord pas usage.*

Quand l'un des cas que nous venons d'exposer (448) se présentera, nous laisserons le quotient de la division sous la forme d'une fraction dont le numérateur sera le dividende et le dénominateur le diviseur.

Nous réduirons la fraction quotient à sa plus simple expression : 1° En divisant les deux coefficients par leur plus grand commun diviseur; 2° en supprimant les lettres qui ont le même exposant aux deux termes de la fraction; 3° en retranchant le plus petit des exposants d'une même lettre du plus grand, et en écrivant la lettre affectée de cette différence d'exposants, seulement dans celui des deux termes de la fraction où l'exposant était le plus grand; 4° en écrivant les lettres non communes aux deux termes de la fraction, avec leurs exposants respectifs, dans celui des deux termes où elles entraient. On a ainsi :

$$\frac{-12a^4b^2cde}{-8a^2bc^3df^2} = \frac{3a^2be}{2c^2f^2}, \quad \frac{48a^3b^2cd^3}{36a^2b^3c^3de} = \frac{4ad^2}{3bce}, \quad \frac{7ab^3c^5d}{3a^3bc^4d^3} = \frac{7b^2c}{3a^2d^2}, \quad \frac{7a^2b}{21a^4b^2} = \frac{1}{3a^2b}.$$

450. *Pour diviser un polynôme par un monôme*, on divise successivement chaque terme du dividende par le diviseur (447) :

$$\frac{4a^5b + 2a^4b^2c - 5a^3b^3c^2}{a^2b} = 4a^3 + 2a^2bc - 5ab^2c^2.$$



Dans le cas où il y a des termes non divisibles exactement par le diviseur, on peut ne faire qu'indiquer la division de tout le polynôme par le diviseur, ou ne laisser sous forme de fraction que les termes non divisibles exactement :

$$\frac{4a^5b+3a^4b^2c-5ab^3}{2a^2b}=\frac{4a^5b}{2a^2b}+\frac{3a^4b^2c}{2a^2b}-\frac{5ab^3}{2a^2b}=2a^3+\frac{3a^2bc}{2}-\frac{5b^2}{2a}.$$

432. ***Pour diviser un polynôme par un autre*** (suivre sur le 1er exemple suivant), on ordonne le dividende et le diviseur par rapport aux puissances croisantes ou décroissantes d'une même lettre (431), on divise le premier terme a^5 à gauche du dividende par le premier terme a^3 à gauche du diviseur, ce qui donne le premier terme a^2 du quotient; on multiplie le diviseur par ce terme, et on retranche le produit $+a^5-3a^4b$ du dividende proposé. On divise ensuite le premier terme $-2a^4b$ à gauche du reste, par le premier terme a^3 à gauche du diviseur, ce qui donne le second terme $-2ab$ du quotient ; on multiplie le diviseur par ce second terme ; on retranche le produit du premier reste obtenu, ce qui fournit un second reste, sur lequel on opère comme pour le premier, et l'on continue ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à un reste nul ou à un reste dont le premier terme ne soit pas divisible par le premier terme du diviseur.

Pour retrancher du dividende et des restes successifs obtenus les divers produits du diviseur par les termes du quotient, afin de faciliter les opérations, on écrit ces produits sous les restes en changeant les signes de leurs termes ; par là, chaque soustraction est ramenée à une addition, c'est-à-dire à une simple réduction de termes semblables (422).

1er *Exemple.* Ayant à diviser $5a^3b^2+3a^2b^3-5a^4b+a^5$ par a^3-3a^2b, on dispose, conformément à la règle précédente, les calculs de la manière suivante :

Dividende	$a^5-5a^4b+5a^3b^2+3a^2b^3$	a^3-3a^2b	diviseur.
	$-a^5+3a^4b$	$a^2-2ab-b^2$	quotient.
1er *reste*	$-2a^4b+5a^3b^2+3a^2b^3$		
	$+2a^4b-6a^3b^2$		
2e *reste*	$-a^3b^2+3a^2b^3$		
	$+a^3b^2-3a^2b^3$		
Reste de la division	0		

2e *Exemple :*

$10a^4-48a^3b+51a^2b^2+4ab^3-15b^4+3b^5+c$	$-5a^2+4ab+3b^2$
$-10a^4+8a^3b+6a^2b^2$	$-2a^2+8ab-5b^2$
$-40a^3b+57a^2b^2+4ab^3-15b^4+3b^5+c$	
$+40a^3b-32a^2b^2-24ab^3$	
$+25a^2b^2-20ab^3-15b^4+3b^5+c$	
$-25a^2b^2+20ab^3+15b^4$	
Reste de la division $+3b^5+c$	

3ᵉ *Exemple.* Soit à diviser x^4-a^4 par $x-a$

$$\begin{array}{l|l} x^4-a^4 & x-a \\ \hline -x^4+ax^3 & x^3+ax^2+a^2x+a^3 \\ \hline ax^3-a^4 & \\ -ax^3+a^2x^2 & \\ \hline a^2x^2-a^4 & \\ -a^2x^2+a^3x & \\ \hline a^3x-a^4 & \\ -a^3x+a^4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

452. Dans ce dernier exemple, il résulte du calcul même que les exposants de x diminuent d'une unité, et que ceux de a croissent de la même quantité, dans les restes et dans les quotients partiels successifs. Ainsi x^m-a^m est divisible exactement par $x-a$, et l'on a

$$\frac{x^m-a^m}{x-a}=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ldots+a^{m-2}x+a^{m-1}.$$

Si $a=1$, on a

$$\frac{x^m-1}{x-1}=x^{m-1}+x^{m-2}+x^{m-3}+\ldots+x+1.$$

x^m+a^m n'est pas divisible par $x-a$, le reste est $2a^m$; ainsi l'on a

$$\frac{x^m+a^m}{x-a}=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ldots+a^{m-2}x+a^{m-1}+\frac{2a^m}{x-a}.$$

x^m-a^m est ou n'est pas divisible par $x+a$ selon que m est pair ou impair, et l'on a respectivement

$$\frac{x^m-a^m}{x+a}=x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\ldots\pm a^{m-2}x\mp a^{m-1}+\frac{\pm a^m-a^m}{x+a}.$$

Lorsque m est pair, le reste $+a^m-a^m=0$, et quand m est impair, le reste $-a^m-a^m=-2a^m$.

x^m+a^m est ou n'est pas divisible par $x+a$ selon que m est impair ou pair, et l'on a respectivement

$$\frac{x^m+a^m}{x+a}=x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\ldots\mp a^{m-2}x\pm a^{m-1}+\frac{\mp a^m+a^m}{x+a}.$$

Lorsque m est impair, le reste $-a^m+a^m=0$, et quand m est pair, il est $+a^m+a^m=2a^m$.

453. Lorsque dans les polynômes à diviser l'un par l'autre les puissances de la lettre principale ont des polynômes pour coefficients, on les ordonne comme il a été fait pour la multiplication (432), puis on applique la règle générale de la division (451).

$18a^2$	$x^3 + 24a^3$	$x^2 + 2a^4$	$x - 4a^5$	$6a \mid x \; -2a^2$
$-3ab$	$-24a^2$	$-10a^3$	$+6a^4$	$+b \mid \; -b$
$-b^2$	$+7a^2b$	$+2a^3b$	$-2a^3b$	$3a \mid x^2 + 5a^2 \mid x + 2a^3$
......	$-ab$	$-10a^2b$	$+3a^2b$	$-b \mid \; -4a \mid \; -3a^2$
	$+2b^2$	$+4ab$	.....	$+b$
	......	$-b^2$	$+4a^5$	
	$+6a^3$	......	$+2a^3b$	
	$+3ab$	$+10a^4$	$-6a^4$	
	$-2a^2b$	$+5a^2b$	$-3a^2b$	
	$-b^2$	$-8a^3$	0	
	$+30a^3$	$-4ab$		
	$-24a^2$	$+2a^2b$		
	$+5a^2b$	$+b^2$		
	$+2ab$	$+12a^4$		
	$+b^2$	$-18a^3$		
	......	$+2a^3b$		
		$-3a^2b$		
		.....		
		$-12a^4$		
		$-2a^3b$		
		$+18a^3$		
		$+3a^2b$		
		0		

1re *Division partielle.*

$$\begin{array}{l|l} 18a^2 - 3ab - b^2 & 6a + b \\ \hline -3ab & 3a - b \\ \hline -6ab - b^2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

3e *Division partielle.*

$$\begin{array}{l|l} 12a^4 - 18a^3 + 2a^3b - 3a^2b & 6a + b \\ \hline +18a^3 \qquad +3a^2b & 2a^3 - 3a^2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

2e *Division partielle.*

$$\begin{array}{l|l} 30a^3 - 24a^2 + 5a^2b + 2ab + b^2 & 6a + b \\ \hline -24a^2 \qquad + 2ab + b^2 & 5a^2 - 4a + b \\ + 4ab & \\ \hline 6ab + b^2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

On divise, à part, le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur, c'est-à-dire le coefficient $18a^2 - 3ab - b^2$ par celui $6a + b$ et x^3 par x, ce qui donne $(3a - b)x^2$ pour le premier terme du quotient. On multiplie le diviseur par ce premier terme, et on retranche le produit du dividende. On divise, à part, le premier terme $(30a^3 - 24a^2 + 5a^2b + 2ab + b^2)x^2$ du reste par le premier terme du diviseur, ce qui donne le deuxième terme $(5a^2 - 4a + b)x$ du quotient. On multiplie le diviseur par ce deuxième terme, et on retranche le produit du 1er reste. On divise de même le 1er terme $(12a^4 - 18a^3 + 2a^3b - 3a^2b)x$ du deuxième reste par le premier terme du diviseur, ce qui donne les autres termes $2a^3$ et $-3a^2$ du quotient, termes qui sont indépendants de x dans l'exemple choisi. Multipliant le diviseur par l'ensemble $2a^3 - 3a^2$ de ces termes, et retranchant le produit du deuxième reste, on a le reste de la division, qui est 0 dans notre exemple.

154. Lorsque le dividende et le diviseur sont homogènes (146), le quotient et les restes successifs sont homogènes. De plus, le degré du quotient est égal à celui du dividende moins celui du diviseur.

Quand le dividende est homogène et que le diviseur ne l'est pas, le quotient ne se termine pas.

155. *Les preuves des quatre opérations sur les quantités algébriques* s'opèrent d'après les règles données pour les nombres entiers (25, 29, 47 et 63).

FRACTIONS ALGÉBRIQUES.

156. Une *fraction algébrique* est un quotient exprimé par deux quantités algébriques à diviser l'une par l'autre. Ainsi

$$\frac{a}{b}, \qquad \frac{a^3+b^4}{a+b},$$

que l'on énonce a *divisé par* b *et* a^3+b^4 *divisé par* a + b, sont des fractions algébriques.

Le dividende est le *numérateur* de la fraction, le diviseur est son *dénominateur*, et le numérateur et le dénominateur en sont les deux *termes* (127).

157. Tout ce qui a été dit des fractions numériques s'applique aux fractions littérales. Ainsi l'on a :

1° $$a=\frac{ab}{b}; \qquad (133)$$

2° $$\frac{a}{b}\times c=\frac{ac}{b}=\frac{a}{b:c}; \qquad (137)$$

3° $$\frac{a}{b}:c=\frac{a}{bc}=\frac{a:c}{b}; \qquad (138)$$

4° $$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}=\frac{a:c}{b:c}. \qquad (139)$$

Pour réduire une fraction à sa plus simple expression, on divise ses deux termes par leurs facteurs communs :

$$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}, \quad \text{et} \quad \frac{ab^3c^4}{b^2c^6}=\frac{ab}{c^2}. \qquad (147)$$

Une fraction ne change pas de valeur quand on change les signes de ses deux termes; puisque cela revient à multiplier ses deux termes par -1 :

$$\frac{a}{b}=\frac{-a}{-b}, \quad \text{et} \quad \frac{a+b-3c}{2a-d+e}=\frac{-a-b+3c}{-2a+d-e};$$

5° *Les règles pour réduire les fractions au même dénominateur sont les mêmes* (141);

6° $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$, et $a \pm \frac{b}{c} = \frac{ac \pm b}{c}$; (142, 143, 145 et 146)

7° $$\left\{ \begin{array}{c} a \times \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}, \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \\ \left(a + \frac{b}{c}\right) \times \left(m - \frac{p}{q}\right) = \frac{(ac + b)(mq - p)}{qc}; \end{array} \right\}$$ (150 et 151)

8° $$\left\{ \begin{array}{c} a : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} = \frac{a : c}{b : d}, \\ \left(a + \frac{b}{c}\right) : \left(m - \frac{p}{q}\right) = \frac{(ac + b)q}{(mq - p)c}, \\ 1 : \frac{a}{b} = \frac{b}{a}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{b} = \frac{a}{c}, \quad \frac{a}{b} : \frac{a}{c} = \frac{c}{b}; \end{array} \right\}$$ (155 et 157)

9° La somme terme à terme de plusieurs fractions égales entre elles donne une fraction égale à chacune des premières :

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = \frac{a + b + c}{d + e + f} \qquad (134)$$

On a aussi

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{d^2 + e^2 + f^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{d^2 + e^2 + f^2}};$$

10° Soit p la période, de n chiffres, d'un nombre décimal périodique simple. Représentant cette fraction par $x = 0,ppp.....$, et multipliant par 10^n, il vient $10^n x = p,ppp.....$ Soustrayant une fois la valeur de x de cette expression, on a $(10^n - 1)x = p$, et par suite

$$x = \frac{p}{10^n - 1}. \text{ Faisant, par exemple, } n = 3, \text{ on a } x = \frac{p}{999}.$$

Ce qui confirme ce qu'on a dit en arithmétique (193).

LIVRE II.

Équations du premier degré.

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A UNE SEULE INCONNUE.

458. Deux quantités égales réunies par le signe = constituent une *égalité*. Ces quantités sont les deux *membres* de l'égalité, celle placée à gauche du signe = est le *premier membre*, et celle placée à droite est le *deuxième membre*.

459. Les égalités qui contiennent une ou plusieurs lettres représen-

tant des quantités inconnues sont des *équations*. Telles sont :

$$3+x=7 \quad \text{et} \quad x+y=\frac{a}{b}.$$

L'égalité ne subsiste que pour des valeurs particulières des inconnues.

460. Toute égalité qui subsiste, quelles que soient les valeurs particulières que l'on attribue aux lettres est une *identité*. Telles sont les égalités :

$$2x+4=2x+4, \quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \quad \text{et} \quad (a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

Lorsque les deux membres d'une égalité sont les mêmes, ou que, comme dans ces deux derniers exemples (440, 444), un membre n'est que le résultat des calculs indiqués dans l'autre, l'égalité est une *identité*.

461. *Toute équation doit devenir une identité* l'orsqu'on y remplace les inconnues par leurs valeurs, c'est-à-dire quand on fait la *vérification de l'équation.*

462. Une *équation* est *numérique* lorqu'il n'y a que les valeurs des inconnues qui sont représentées par des lettres. C'est une *équation littérale* ou *algébrique* lorsqu'il y entre des lettres représentant des quantités connues.

463. Lorsque l'un des membres d'une équation ne contient que l'inconnue, l'autre membre, qui renferme le tableau des opérations à effectuer sur les quantités connues pour avoir la valeur de l'inconnue, prend le nom de *formule*. Tel est le second membre de l'équation

$$x=a^2+4\frac{b}{c}.$$

C'est l'*expression* de la valeur de l'inconnue.

464. Deux quantités qui varient simultanément, de manière qu'une variation de l'une entraîne une variation de l'autre, sont dites *fonctions* l'une de l'autre. Ainsi la surface s d'un cercle variant avec le rayon r, elle est une fonction du rayon. C'est ce qu'on représente d'une manière générale par $s=f(r)$. (Voir *Géométrie.*) De même l'espace que parcourt un corps en tombant est une fonction du temps, et réciproquement le temps est une fonction de l'espace. (Voir *Mécanique.*)

On considère ordinairement l'une des deux quantités comme variant d'une manière arbitraire, et on l'appelle *variable indépendante;* l'autre, dont la variation est déterminée par celle de la première, est la fonction proprement dite.

Lorsque la relation qui existe entre des variables peut être exprimée par une équation qui ne renferme que des quantités algébriques (408, 459), la *fonction* est dite *algébrique;* mais si la relation entre la fonction et la variable indépendante ne peut être exprimée par les signes $+, -, \times, :, \sqrt{\ }$ et exposants, la *fonction* est appelée *transcendante.*



Ainsi le logarithme d'un nombre est une fonction transcendante de ce nombre; les fonctions circulaires, c'est-à-dire celles dans lesquelles il entre des expressions trigonométriques, sont aussi transcendantes. (Voir *Trigonométrie.*)

465. On nomme *solution d'une équation* ou *d'un système d'équations*, chaque valeur de l'inconnue ou chaque système de valeurs des inconnues qui rend identique l'équation ou le système d'équations (461).

La valeur 3 de x est la solution de l'équation

$$5x = 15.$$

466. *Résoudre une équation* ou *un système d'équations*, c'est trouver toutes les solutions de cette équation ou de ce système d'équations.

467. Deux équations ou deux systèmes d'équations sont *équivalents*, lorsqu'ils admettent les mêmes solutions et en même nombre. Telles sont les équations :

$$5x = 15 \quad \text{et} \quad x + 7 = 10.$$

468. *Altérer une équation* ou *un système d'équations*, c'est lui faire subir une transformation qui change ses solutions ou le nombre de ses solutions.

469. *La résolution d'une équation ou d'un système d'équations repose sur les principes suivants* :

1° On n'altère pas une équation en augmentant ou en diminuant ses deux membres d'une même quantité.

2° On n'altère pas une équation en faisant passer un terme d'un membre dans l'autre, avec un signe contraire. Cela revient, en effet, à ajouter ce terme aux deux membres de l'équation ou à l'en retrancher, selon que ce terme est affecté du signe — ou du signe +.

Il en résulte qu'on peut changer les signes de tous les termes d'une équation.

3° Une équation n'est pas altérée quand on multiplie ou quand on divise ses deux membres par une même quantité, qui n'est pas nulle et ne contient pas d'inconnues. Si elle renfermait des inconnues, la nouvelle équation ne serait pas du même degré que la première et ne lui serait pas équivalente; elle aurait, lorsqu'on multiplie, en outre des solutions de la première équation, celles de l'équation qu'on obtient en égalant à 0 la quantité par laquelle on multiplie. Ainsi, en multipliant par $x - 3$ les deux membres de l'équation

$$x - 5 = 0,$$

ce qui donne

$$(x - 5)\ (x - 3) = 0,$$

cette nouvelle équation contient, en outre de la solution $x = 5$ de la première équation, celle $x = 3$ de l'équation $x - 3 = 0$.

La division par une quantité contenant l'inconnue peut au contraire faire disparaître une ou plusieurs solutions de l'équation.



4° En chassant les dénominateurs, ce qui se fait en réduisant tous les termes de l'équation au même dénominateur et en supprimant ce dénominateur commun (5°, 457), on obtient une nouvelle équation équivalente à la première.

Chassant les dénominateurs de l'équation

$$2+\frac{9}{6+x}=x, \text{ ou } \frac{12+2x+9}{6+x}=\frac{6x+x^2}{6+x}, \text{ ou } \frac{x^2+4x-21}{6+x}=0,$$

on a
$$x^2+4x-21=0, \quad \text{d'où} \quad (526) \quad x=\begin{cases}3\\-7\end{cases}.$$

Ces deux solutions satisfont bien à l'équation proposée.

Opérant de même pour l'équation

$$1+\frac{1}{x-1}=\frac{x^2}{x-1}-6 \text{ ou } \frac{x^2-7x+6}{x-1}=0,$$

on a
$$x^2-7x+6=0, \quad \text{d'où} \quad x=\begin{cases}6\\1\end{cases}.$$

La solution $x=6$ satisfait à l'équation proposée. Quant à la solution $x=1$, comme elle annule le dénominateur $x-1$, elle donne

$$\frac{x^2-7x+6}{x-1}=\frac{0}{0};$$

signe de l'indétermination, qui indique que $x-1=0$ est facteur commun au numérateur et au dénominateur, et qu'il faut le faire disparaître (486); ce qui ramène l'équation proposée à $\frac{x-6}{1}=0$ dont l'unique solution est $x=6$.

Règle générale, quand on a fait disparaître des dénominateurs, si l'on arrive à une ou plusieurs solutions qui annulent le dénominateur commun, on doit les négliger, et ne tenir compte que des autres. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, on ne tiendra compte que de la solution $x=6$, et l'on rejettera celle $x=1$.

5° On n'altère pas une équation en faisant subir à ses deux membres toutes les modifications qui ne changent pas leur valeur. Ainsi, par exemple, on peut effectuer les calculs indiqués par les signes qu'ils renferment.

6° On n'altère pas un système de plusieurs équations, quand on remplace l'une d'elles par l'équation que l'on obtient en combinant les équations proposées membre à membre par voie d'addition ou de soustraction.

7° Lorsqu'on élève au carré les deux membres d'une équation

$$x=5,$$

l'équation

$$x^2=25$$

qui en résulte comprend, outre les solutions de l'équation $x-5=0$ ou $x=5$, celles de l'équation $x+5=0$ ou $x=-5$.

Cela provient de ce que

$$x^2-25=(x-5)(x+5)=0 \qquad (3°).$$

470. Le *degré* d'une équation est la plus grande somme des exposants des inconnues dans un même terme de l'équation. Ainsi les équations

$$2x-y=7, \quad 3xy=18, \quad y^2x^5=1-x^6$$

sont respectivement du 1er, du 2e et du 7e degré.

Ce mode d'évaluation du degré d'une équation suppose qu'il n'entre pas d'inconnues en dénominateur dans aucun terme. Lorsque des inconnues entrent en dénominateur, on fait disparaître les dénominateurs (4°, 469), et alors on évalue le degré comme dans le cas précédent.

L'équation $a+\frac{bx}{b+y}=y$, qui paraît être du premier degré, est du deuxième degré, parce qu'en réduisant au même dénominateur tous les termes de l'équation, et en supprimant le dénominateur commun $b+y$, elle devient

$$ab+ay+bx=by+y^2, \quad \text{ou } y^2+(b-a)y-bx-ab=0.$$

Si le dénominateur commun $b+y$ était facteur du premier membre de l'équation mise sous la dernière forme, il faudrait le faire disparaître par la division avant d'évaluer le degré. En résolvant l'équation sans faire disparaître le dénominateur commun comme facteur du premier membre, et en négligeant les solutions trouvées qui annulent le dénominateur commun, on arrive aux solutions de l'équation proposée ramenée à son véritable degré (486).

471. *Règle générale pour résoudre une équation du premier degré à une seule inconnue :*

1° On commence par chasser les dénominateurs s'il y en a (469).

2° On fait la transposition des termes, c'est-à-dire qu'on transporte dans un même membre, dans le premier ordinairement, tous les termes affectés de l'inconnue, et dans l'autre membre les termes connus.

3° On fait la réduction des termes semblables (419), c'est-à-dire qu'on donne pour coefficient unique à l'inconnue la somme algébrique de tous ses coefficients, ce qui réduit le premier membre à un seul terme, et qu'on effectue dans le coefficient unique qui en résulte et dans le second membre les opérations indiquées.

4° Enfin, on divise le membre tout connu par le coefficient unique de l'inconnue, et on a la valeur de l'inconnue.

1er *exemple.* $\qquad 6x-2=2x+6.$

Transposant les termes, on a

$$6x-2x=6+2.$$

Réduisant, il vient

$$(6-2)x=8 \text{ ou } 4x=8, \quad \text{d'où } x=\frac{8}{4}=2.$$

2° *exemple.*
$$\frac{ax}{b}+\frac{x}{c}-2=8-\frac{x}{d}.$$

Chassant les dénominateurs, on a (4°, 469)

$$acdx+bdx-2bcd=8bcd-bcx.$$

Transposant et réduisant, il vient

$$(acd+bd+bc)x=8bcd+2bcd=10bcd,$$

d'où
$$x=\frac{10bcd}{acd+bd+bc}.$$

472. D'après ce qui précède, on voit qu'une équation du premier degré à une seule inconnue peut toujours se ramener à la forme générale $ax=b$, d'où l'on tire $x=\frac{b}{a}$, a et b étant des quantités connues.

473. *La résolution algébrique d'un problème se compose de 3 parties :*

1° *La mise en équation,* qui consiste à traduire en langue algébrique les conditions du problème considéré comme résolu. Cela se réduit à indiquer, au moyen des signes algébriques (407), les opérations qu'il faudrait effectuer sur les valeurs des inconnues, si l'on voulait s'assurer qu'elles satisfont aux conditions du problème; de sorte que, pour mettre un problème en équation, il suffit d'indiquer la preuve.

2° *La résolution de l'équation,* qui consiste à déterminer la valeur ou les valeurs de l'inconnue ou de chacune des inconnues, de manière qu'il n'entre que des quantités connues dans ces valeurs (471).

3° *La vérification* ou *preuve*, qui consiste à vérifier si les valeurs des inconnues satisfont aux conditions du problème (461).

474. Nous allons distinguer ces trois parties dans la résolution du problème suivant, qui conduit à une équation du premier degré à une seule inconnue.

Trouver un nombre x, *dont la moitié, plus le tiers, plus le quart, plus* 45 *unités donnent* 448 *pour somme.*

1° *Mise en équation :*

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x+45=448.$$

2° *Résolution de l'équation* (471) :

Chassant les dénominateurs, on a

$$6x+4x+3x+12\times 45=12\times 448,$$

ou

$$13x=5376-540=4836, \quad \text{d'où} \quad x=\frac{4836}{13}=372.$$

3° *Vérification :*

$$\frac{372}{2}+\frac{372}{3}+\frac{372}{4}+45=448,$$

ou

$$186+124+93+45=448.$$

Le premier membre étant égal au second, 372 est bien la solution du problème.

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A PLUSIEURS INCONNUES.

475. *Lorsqu'une équation renferme plusieurs inconnues, elle admet une infinité de solutions.* En effet, donnant des valeurs arbitraires à toutes les inconnues, moins une, la résolution de l'équation donne pour cette dernière inconnue une valeur correspondante qui, avec les valeurs supposées des autres inconnues, forme une solution; et l'on conçoit que, pouvant varier à l'infini les valeurs arbitraires, on aura ainsi une infinité de solutions.

476. *Il faut en général autant d'équations que d'inconnues pour que le système de ces inconnues soit complétement déterminé.*

477. Lorsque le nombre des équations surpasse d'un nombre quelconque m celui des inconnues, le système d'équations proposé n'a de solution qu'autant que l'on peut satisfaire à m équations de condition entre les nombres et les constantes qui entrent dans ce système.

478. On appelle *système d'équations* l'ensemble des équations desquelles on part pour déterminer les inconnues. Ainsi, un système comprend autant d'équations qu'il y a d'inconnues (476). Un système d'équations est le résultat de la mise en équation d'un problème (1°, 473).

479. *Éliminer une inconnue entre* m *équations*, c'est déduire du système de ces équations un système de $m-1$ équations ne contenant pas cette inconnue.

Quelle que soit la méthode qu'on emploie pour résoudre un système de plusieurs équations, on procède toujours par élimination.

480. *Nous distinguerons trois méthodes pour résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues :*

1° *La méthode par substitution*, qui consiste, étant donné un système de deux équations du premier degré entre deux inconnues x et y, à tirer de l'une quelconque des équations la valeur d'une des inconnues en fonction de l'autre, par exemple, la valeur de y en fonction de x (471); à *substituer* cette valeur de y dans l'autre équation, ce qui donne une équation du premier degré qui ne renferme que l'inconnue x, et dont la solution est la valeur de x. Cette valeur de x, substituée dans l'expression précédente de y en fonction de x, fait connaître y.

Soit le système $\left\{\begin{array}{l} x+y=c, \\ x-y=c'. \end{array}\right.$

De la deuxième équation, tirant y en fonction de x, on a

$$y = x - c'. \qquad (1)$$

Substituant cette valeur de y dans la première équation, il vient

$$x + x - c' = c,$$

d'où

$$2x = c + c', \quad \text{ou} \quad x = \frac{c + c'}{2}.$$

Substituant cette valeur de x dans l'équation (1), on a

$$y = \frac{c + c'}{2} - c' = \frac{c + c' - 2c'}{2} = \frac{c - c'}{2}.$$

Pour $c = 12$ et $c' = 6$, on a donc

$$x = \frac{12 + 6}{2} = 9, \quad \text{et} \quad y = \frac{12 - 6}{2} = 3.$$

Faisant la vérification, on a bien

$$x + y \quad \text{ou} \quad 9 + 3 = 12,$$

et

$$x - y \quad \text{ou} \quad 9 - 3 = 6.$$

2° *La méthode par comparaison.* Elle consiste à tirer la valeur de la même inconnue, de y par exemple, en fonction de l'autre inconnue x, des deux équations; à égaler les deux valeurs de y, ce qui donne une équation, laquelle ne renfermant plus que x, en donne la valeur (471). Cette valeur, substituée dans l'une des valeurs précédentes de y, permet de déterminer y, que l'on peut du reste encore trouver en opérant comme pour x.

Des deux équations $\begin{cases} x + y = c, \\ x - y = c', \end{cases}$

on tire respectivement

$$y = c - x \quad \text{et} \quad y = x - c'. \qquad (2)$$

Égalant ces deux valeurs de y, on a

$$c - x = x - c', \quad \text{d'où} \quad x = \frac{c + c'}{2}.$$

Substituant cette valeur de x dans l'une des équations (2), on a

$$y = \frac{c + c'}{2} - c' = \frac{c - c'}{2}.$$

3° *La méthode par réduction* ou *par addition ou soustraction.* Elle consiste à faire en sorte qu'une des inconnues ait le même coefficient dans les deux équations, ce qui se fait en multipliant ou en divisant tous les termes d'une des équations par une quantité convenable.

Ajoutant ou retranchant membre à membre les deux équations renfermant l'inconnue qui a le même coefficient, suivant que cette inconnue a des signes contraires ou le même signe dans les deux équations, on obtient une nouvelle équation qui ne renferme que l'autre inconnue, et de laquelle on peut en tirer la valeur. On détermine ensuite la valeur de la première inconnue en opérant comme pour la précédente.

1[er] *exemple.* $\begin{cases} x + y = c, \\ x - y = c'. \end{cases}$

Considérant l'inconnue y, on voit qu'elle a le même coefficient dans les deux équations; comme elle a des signes contraires dans ces équations, on la fait disparaître en ajoutant membre à membre les deux équations, ce qui donne

$$2x = c + c', \quad \text{d'où} \quad x = \frac{c + c'}{2}.$$

Considérant de même l'inconnue x, on voit qu'elle a aussi le même coefficient dans les deux équations; et comme elle a le même signe, on la fait disparaître en retranchant membre à membre une des équations de l'autre, ce qui donne

$$2y = c - c', \quad \text{d'où} \quad y = \frac{c - c'}{2}.$$

2[e] *exemple.* $\begin{cases} ax + y = c, & (1) \\ a'x - b'y = c'. & (2) \end{cases}$

Considérant l'inconnue y, on voit que pour lui donner le même coefficient dans les deux équations, il faut multiplier les termes de l'équation (1) par le coefficient b' de y dans la seconde équation, ce qui donne

$$ab'x + b'y = cb'. \quad (3)$$

Ajoutant (2) et (3), on a

$$(a' + ab')x = cb' + c', \quad \text{d'où} \quad x = \frac{cb' + c'}{a' + ab'}.$$

Considérant de même l'inconnue x, on voit que pour lui donner le même coefficient dans les deux équations proposées, il faut multiplier les termes de la première équation par le coefficient a' de x dans la seconde, et ceux de la deuxième par le coefficient a de x dans la première, ce qui donne

$$aa'x + a'y = ca', \quad (4)$$
$$aa'x - ab'y = ac'. \quad (5)$$

Retranchant (5) de (4), on a

$$(a' + ab')y = ca' - ac', \quad \text{d'où} \quad y = \frac{ca' - ac'}{a' + ab'}.$$

481. Ce qui précède fait voir que tout système de deux équations du premier degré à une seule inconnue peut se ramener à la forme générale (472)

$$ax + by = c,$$
$$a'x + b'y = c'.$$

D'où l'on tire

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \quad \text{et} \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

482. *Problème conduisant à un système de deux équations du premier degré à une seule inconnue.*

On a des pièces de 2 francs et de 5 francs; il s'agit de payer 26 francs avec 10 de ces pièces; quels sont les nombres x et y que l'on doit donner de chacune de ces pièces?

1° Mise en équation (473) $\left\{ \begin{array}{l} x + y = 10 \text{ pièces}, \\ 2 \times x + 5 \times y = 26 \text{ francs}. \end{array} \right.$

2° Résolvant par l'une quelconque des trois méthodes du n° 480, on trouve

$$x = 8 \quad \text{et} \quad y = 2.$$

3° La vérification donne bien $\left\{ \begin{array}{l} x + y \quad \text{ou} \quad 8 + 2 = 10 \text{ pièces}, \\ 2x + 5y \quad \text{ou} \quad 16 + 10 = 26 \text{ francs}. \end{array} \right.$

483. *Pour résoudre trois équations du premier degré à trois inconnues*, les suivantes, par exemple, auxquelles on peut toujours ramener un système quelconque de trois équations du premier degré à trois inconnues,

$$ax + by + cz = d, \qquad (1)$$
$$a'x + b'y + c'z = d', \qquad (2)$$
$$a''x + b''y + c''z = d'', \qquad (3)$$

à l'aide de l'une des trois méthodes du n° 480 on élimine une des inconnues, z par exemple,

1° Entre les équations (1) et (2), ce qui donne

$$(ac' - ca')x + (bc' - cb')y = dc' - cd'; \qquad (4)$$

2° Entre les équations (2) et (3), ce qui donne

$$(a'c'' - c'a'')x + (b'c'' - c'b'')y = d'c'' - c'd''. \qquad (5)$$

On obtient ainsi les deux équations du premier degré à deux inconnues (4) et (5), entre lesquelles éliminant y, on obtient

$$x = \frac{db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + bc'd'' - cb'd''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

Effectuant des calculs analogues pour éliminer x et z, on trouve

$$y = \frac{ad'c'' - ac'd'' + ca'd'' - da'c'' + dc'a'' - cd'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

Éliminant de même x et y, on obtient

$$z = \frac{ab'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba'd'' + bd'a'' - db'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

484. Considérant les résultats obtenus aux nos 472, 481 et 483, on voit :

1° (472) Que pour une équation du premier degré à une seule inconnue, les nombres de termes du numérateur et du dénominateur de la valeur de l'inconnue peuvent toujours être ramenés à 1.

2° (481) Que pour deux équations à deux inconnues, ces nombres peuvent être ramenés à 2 ou 1×2.

3° (483) Que pour trois équations à trois inconnues, ces nombres peuvent être ramenés à 6 ou $1 \times 2 \times 3$.

Ces nombres seraient 24 ou $1 \times 2 \times 3 \times 4$ pour quatre équations à quatre inconnues; de 120 ou $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ pour cinq équations à cinq inconnues, et ainsi de suite.

485. L'emploi des accents dans les notations des coefficients a donné lieu à l'observation d'une loi d'après laquelle on peut facilement former les numérateurs et les dénominateurs des valeurs des inconnues.

Considérant d'abord deux équations à deux inconnues (481) :

1° *Pour obtenir le dénominateur commun aux deux valeurs des inconnues*, on forme avec les lettres a et b, qui désignent les coefficients de x et y dans la première équation $ax + by = c$, les deux permutations ab et ba; on sépare ces permutations par le signe $-$, ce qui donne $ab - ba$; et accentuant la dernière lettre de chacun des termes, on obtient le dénominateur commun

$$ab' - ba'.$$

2° *Pour obtenir le numérateur relatif à chacune des inconnues*, on remplace, dans le dénominateur, les lettres qui désignent les coefficients de l'inconnue considérée par les lettres qui désignent les quantités toutes connues, en laissant les accents aux mêmes places. Ainsi, pour les inconnues x et y, le dénominateur $ab' - ba'$ fournit respectivement les numérateurs $cb' - bc'$ et $ac' - ca'$.

Considérant le cas des trois équations à trois inconnues (483) :

1° *Pour obtenir le dénominateur commun*, on introduit successivement la lettre c à droite, au milieu et à gauche de chacune des permutations ab et ba; cela fournit six nouvelles permutations, que l'on interpose de signes alternativement négatifs et positifs, ce qui donne

$$abc - acb + cab - bac + bca - cba.$$

Plaçant dans chacun des six termes de ce polynôme un accent sur la deuxième lettre et deux accents sur la troisième, on obtient le dénominateur commun

$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''.$$

2° *Pour avoir le numérateur de chacune des valeurs des inconnues*, on



substitue dans le dénominateur la quantité constante au coefficient de l'inconnue considérée, en laissant les accents à leurs places. Ainsi, pour obtenir, par exemple, le numérateur de la valeur de x, on substitue d à a, ce qui donne

$$db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + bc'd'' - cb'd''.$$

SOLUTIONS NÉGATIVES, IMPOSSIBLES, INDÉTERMINÉES, DES ÉQUATIONS.

186. *Interprétation de quelques solutions singulières auxquelles peut conduire la résolution d'un problème.*

1° *Solutions négatives.* a étant l'âge d'un père et b celui de son fils, dans quel temps x l'âge du père sera-t-il le triple de l'âge du fils?

On doit avoir

$$a + x = 3(b + x), \quad \text{d'où} \quad x = \frac{a - 3b}{2}.$$

A l'inspection de cette formule, on reconnaît que la valeur de x est positive ou négative selon que a est plus grand ou plus petit que $3b$, ce qui ne peut être interprété que de cette manière : selon qu'on a $a > 3b$ ou $a < 3b$, la valeur de x doit être comptée dans l'avenir ou dans le passé :

$$\text{Pour } a = 45 \text{ ans et } b = 11 \text{ ans, on a } x = \frac{45 - 33}{2} = 6 \text{ ans},$$

et c'est dans 6 *ans* que l'âge du père sera le triple de celui du fils;

$$\text{Pour } a = 55 \text{ ans et } b = 23 \text{ ans, on a } x = \frac{55 - 69}{2} = -7 \text{ ans},$$

et il y a 7 ans que l'âge du père était le triple de celui du fils.

2° *Solutions impossibles.* Quel est le nombre x, dont la moitié, plus le tiers, plus 5 égalent ses $\frac{5}{6}$, plus 7?

A l'inspection de cet énoncé on reconnaît de suite que le problème est impossible, puisque, ayant $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, on ne peut avoir

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 5 = \frac{5}{6}x + 7.$$

Résolvant cette équation, qui est celle du problème proposé, on a

$$3x + 2x + 30 = 5x + 42 \quad \text{ou} \quad (3 + 2 - 5)x = 42 - 30, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{12}{5 - 5},$$

c'est-à-dire

$$0 \times x = 12 \quad \text{ou} \quad x = \frac{12}{0} = \infty.$$

Telle est la formule qui révèle l'impossibilité d'assigner à x une valeur satisfaisant à l'énoncé. ∞ représente l'*infini*.

D'une manière générale le symbole de l'impossibilité est

$$\frac{a}{0} = \infty \quad \text{ou} \quad \frac{a}{\infty} = 0.$$

3° *Solutions indéterminées.* Quel est le nombre x, dont la moitié, plus le tiers, plus 7 égalent ses 5/6, plus 7?

Mettant le problème en équation, on a

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 7 = \frac{5}{6}x + 7.$$

Ayant $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, cette équation est une identité pour une valeur quelconque que l'on attribue à x, par conséquent il y a indétermination.

Résolvant l'équation précédente, il vient

$$3x + 2x + 42 = 5x + 42, \quad \text{ou} \quad (5-5)x = 42-42, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{42-42}{5-5},$$

c'est-à-dire

$$0 \times x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{0}{0}.$$

Tel est le symbole de l'indétermination.

Remarque. Ce symbole $\frac{0}{0}$ n'indique cependant pas toujours l'indétermination. C'est ce qui arrive quand le numérateur et le dénominateur contiennent un facteur commun qui devient nul pour certaines valeurs attribuées aux lettres. Dans ce cas on supprime ce facteur commun pour avoir la valeur de x. Supposons que par la résolution du problème on soit arrivé à l'une des valeurs

$$x = \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}, \qquad x = \frac{2(a-b)^2}{3(a^2-b^2)}, \qquad x = \frac{2(a^2-b^2)}{3(a-b)^2},$$

qui prennent l'une et l'autre la forme $\frac{0}{0}$ quand $a = b$. Le facteur $a - b$, qui devient nul quand $a = b$, étant commun aux deux termes de chacune de ces valeurs de x, on peut le supprimer, ce qui donne

$$x = \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}, \qquad x = \frac{2(a-b)}{3(a+b)}, \qquad x = \frac{2(a+b)}{3(a-b)}.$$

Valeurs qui deviennent, en supposant $a = b$,

$$x = \frac{3a}{2}, \qquad x = \frac{0}{6a} = 0, \qquad x = \frac{4a}{0} = \infty,$$

et qui sont respectivement *finie*, *nulle*, *infinie*.

INÉGALITÉS.

487. On nomme *inégalité* l'ensemble de deux quantités séparées par le signe > ou <. Ces deux quantités sont les deux membres de l'inégalité.

On entend, d'une manière générale, qu'une quantité A est plus grande qu'une autre quantité B, quand la différence A — B est positive; dans le cas contraire on a A < B. Il en résulte que toute quantité positive est plus grande que zéro; qu'au contraire une quantité négative est plus petite que zéro, et d'autant plus petite que sa valeur absolue est plus grande. On a ainsi

$$\frac{1}{2} > 0, \qquad 0 > -6, \qquad 3 > -4, \qquad -3 > -7;$$

parce que $\frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$, $0 - (-6) = 6$, $3 - (-4) = 7$, $-3 - (-7) = 4$.

488. Les principes énoncés au n° 469 pour les équations s'appliquent aux inégalités, sauf quelques modifications.

1° Une inégalité subsiste toujours, et avec son sens, lorsqu'à ses deux membres on ajoute une même quantité, ou que de ses deux membres on retranche une même quantité :

Ayant $5 > 3$, on a $5 - 7 > 3 - 7$ ou $-2 > -4$.

Il en résulte qu'on peut aussi faire passer un terme d'un membre dans l'autre en changeant son signe.

Mais si l'on change les signes de tous les termes, il faut changer le sens de l'inégalité :

Ayant $5 > 3$, on a $-5 < -3$.

2° Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise les deux membres d'une inégalité par un même nombre positif, l'inégalité subsiste avec son sens. Le sens change quand le nombre par lequel on multiplie ou l'on divise est négatif :

$12 > 4$ donne $12 \times 2 > 4 \times 2$, $\frac{12}{2} > \frac{4}{2}$, $12 \times -2 < 4 \times -2$;

ayant $12 - 4 = 8$, on a bien

$$12 \times 2 - 4 \times 2 = 8 \times 2, \quad \frac{12}{2} - \frac{4}{2} = \frac{8}{2}, \quad 12 \times -2 - (4 \times -2) = 8 \times -2.$$

3° La somme membre à membre de plusieurs inégalités de même sens donne une inégalité de même sens.

4° Selon que les deux membres d'une inégalité sont positifs ou négatifs, leurs carrés forment une inégalité de même sens que la première ou de sens contraire :

$a > b$ donne $a^2 > b^2$ et $-a > -b$ donne $a^2 < b^2$.

489. A l'aide de ces principes, on peut résoudre une inégalité en suivant la même marche que pour résoudre une équation (471). Ainsi x devant satisfaire à la condition

$$\frac{3x}{2} - 7 > x + \frac{2}{3},$$

on a successivement

$$9x - 12 > 6x + 4,\quad 9x - 6x > 12 + 4,\quad 3x > 16,\quad x > \frac{16}{3}.$$

Toute quantité plus grande que $\frac{16}{3}$ vérifie l'inégalité proposée.

LIVRE III.

Puissances et racines des quantités algébriques.

CALCUL DES RADICAUX CARRÉS.

490. Les puissances et les racines ont en Algèbre les mêmes significations qu'en arithmétique (82 et 233).

491. Puisqu'en formant le carré de la racine carrée d'une quantité on doit retrouver cette quantité, il résulte, d'après le n° 423, que *pour extraire la racine carrée d'un monôme*, il suffit d'extraire la racine carrée du coefficient, et de diviser par deux chacun des exposants :

$$\sqrt{36a^8b^2c^6} = 6a^4bc^3.$$

De cette règle, il résulte qu'un monôme n'est un carré parfait, et qu'on ne peut en extraire la racine carrée, qu'autant que son coefficient est un carré parfait (245), et que ses exposants sont des nombres pairs.

Dans les calculs, il peut arriver qu'on ait à extraire la racine carrée d'un monôme qui n'est pas un carré parfait; alors on ne fait qu'indiquer l'opération. Ainsi, ayant à extraire la racine carrée du monôme $35a^4b$, on écrit simplement

$$\sqrt{35a^4b}.$$

Ces sortes d'expressions sont appelées *monômes irrationnels* (408), ou simplement *radicaux carrés*.

492. *La racine carrée du produit de deux ou d'un nombre quelconque de facteurs est égale au produit des racines carrées de ces facteurs* (272).

$$\sqrt{36a^2b^3c^5} = \sqrt{36} \times \sqrt{a^2} \times \sqrt{b^3} \times \sqrt{c^5}.$$

493. De là il résulte que *pour simplifier un monôme irrationnel* (491), il suffit de mettre en facteur, devant le radical, le produit des racines carrées de tous les facteurs qui sont des carrés parfaits (c'est ce qu'on appelle *faire sortir ces facteurs du radical*), et à laisser sous le radical les facteurs qui ne sont pas des carrés parfaits. Ainsi

$$\sqrt{36a^2b^3c^5} = 6a\sqrt{b^3c^5},\quad \text{et}\quad \sqrt{8ab^4c^5} = 2b^2\sqrt{2ac^5}.$$

Dans les seconds membres de ces égalités les quantités $6a$ et $2b^2$ s'appellent les *coefficients du radical.*

494. Le carré d'une quantité, positive ou négative, étant toujours positif (423), il en résulte qu'*un monôme positif a deux racines carrées égales et de signes contraires.* Ainsi

$$\sqrt{4a^6b^2} = \pm 2a^3b.$$

495. Le carré d'une quantité quelconque étant positif (423), il en résulte que l'extraction de la racine carrée d'une quantité négative est impossible. Ainsi

$$\sqrt{-16} = 4\sqrt{-1}, \quad \sqrt{-4a^6b^2} = 2a^3b\sqrt{-1}, \quad \sqrt{-3ab^2} = b\sqrt{3a}\sqrt{-1}$$

sont des symboles algébriques qui représentent des opérations impossibles. On les désigne sous le nom de *quantités* ou plutôt *d'expressions imaginaires.* Ce sont des symboles d'absurdité, auxquels conduit souvent la résolution des problèmes du second degré.

La forme générale d'une quantité imaginaire est $a\sqrt{-1}$, dans laquelle a est une quantité réelle.

Toute racine imaginaire d'une équation du second degré peut se mettre sous la forme $a \pm b\sqrt{-1}$, dans laquelle a et b sont des quantités réelles (526).

496. Deux *radicaux* sont *semblables* lorsqu'ils ne diffèrent que par les coefficients des radicaux (493). Tels sont :

$$3\sqrt{ab^3}, \quad (c+d)\sqrt{ab^3}, \quad 2(c+2d)\sqrt{ab^3}.$$

497. *Pour combiner par voie d'addition ou de soustraction des radicaux semblables*, on effectue ces opérations sur les coefficients des radicaux, et on affecte le radical proposé du résultat obtenu considéré comme coefficient. Ainsi

$$3\sqrt{ab^3} + (c+d)\sqrt{ab^3} = (3+c+d)\sqrt{ab^3},$$
$$3\sqrt{ab^3} - (c+d)\sqrt{ab^3} = (3-c-d)\sqrt{ab^3}.$$

Si les radicaux n'étaient pas semblables, on ne ferait qu'indiquer les opérations. Ainsi, en ajoutant $\sqrt{a}$ et $3\sqrt{b}$, on obtient

$$\sqrt{a} + 3\sqrt{b}.$$

En retranchant la deuxième quantité de la première, on a

$$\sqrt{a} - 3\sqrt{b}.$$

498. *Pour multiplier un radical du second degré par un autre*, on multiplie entre elles les quantités placées sous le signe $\sqrt{}$, et on affecte le produit de ce signe commun, auquel on donne pour coefficient le produit des coefficients des radicaux proposés. Ainsi

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}, \quad 3\sqrt{5a^2b} \times -5\sqrt{ab} = -15\sqrt{5a^3b^2},$$
$$2\sqrt{3a+b^2} \times 5c\sqrt{3a+b^2} = 10c\sqrt{(3a+b^2)^2} = 10c(3a+b^2).$$

Il est évident que si les radicaux sont semblables, comme dans ce dernier exemple, le produit des radicaux s'obtient en supprimant le signe $\sqrt{}$, et en multipliant la quantité qui était sous ce signe par le produit des coefficients des radicaux proposés.

499. *Pour diviser l'un par l'autre deux radicaux du second degré*, on divise l'une par l'autre les quantités placées sous le signe $\sqrt{}$, et on affecte le quotient de ce signe commun, auquel on donne pour coefficient le quotient des coefficients des radicaux proposés. Ainsi

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}},\quad \frac{5a\sqrt{b}}{2b\sqrt{c}}=\frac{5a}{2b}\sqrt{\frac{b}{c}},\quad \frac{12ac\sqrt{6bc}}{4c\sqrt{2b}}=3a\sqrt{3c}.$$

500. *Pour faire sortir du radical les facteurs qui sont des carrés parfaits*, il suffit de les supprimer sous le radical, et d'écrire leurs racines carrées comme facteurs du coefficient du radical (492). Ainsi

$$\sqrt{3a^2b^4c}=ab^2\sqrt{3c},\quad 8d\sqrt{a^3b^2c^4}=8bc^2d\sqrt{a^3}.$$

Pour faire passer sous le radical un facteur du coefficient, il suffit de le supprimer au coefficient, et de multiplier la quantité placée sous le signe $\sqrt{}$ par son carré. Ainsi

$$3\sqrt{a}=\sqrt{9a},\quad a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}.$$
$$4a\sqrt{b+c}=4\sqrt{a^2(b+c)}=\sqrt{16a^2(b+c)}.$$

501. On peut souvent simplifier le calcul des expressions irrationnelles, en chassant les radicaux qui se trouvent au dénominateur. Exemples :

$$\frac{7}{2\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{10},\quad \frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b},\quad \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{ma}+\sqrt{mb}}{a-b},$$
$$\frac{3\sqrt{11}}{4\sqrt{2}+2\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{11}(4\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{16\times2-4\times3}=\frac{12\sqrt{22}-6\sqrt{33}}{20}=\frac{6\sqrt{22}-3\sqrt{33}}{10}.$$

On a multiplié les deux termes des fractions respectivement par $\sqrt{5}$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $4\sqrt{2}-2\sqrt{3}$, de manière à rendre les dénominateurs rationnels (444).

Dans l'exemple suivant, on multiplie d'abord les deux termes de la fraction proposée par $(\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{c}$; puis les deux termes de la fraction obtenue par $(a+b-c)-2\sqrt{ab}$.

$$\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}\ \text{ou}\ \frac{\sqrt{m}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{ma}+\sqrt{mb}+\sqrt{mc}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-c}=$$
$$\frac{\sqrt{ma}+\sqrt{mb}+\sqrt{mc}}{a+b-c+2\sqrt{ab}}\ \text{ou}\ \frac{\sqrt{ma}+\sqrt{mb}+\sqrt{mc}}{(a+b-c)+2\sqrt{ab}}=\frac{(\sqrt{ma}+\sqrt{mb}+\sqrt{mc})(a+b-c-2\sqrt{ab})}{(a+b-c)^2-4ab}.$$

502. De la composition du carré d'un polynôme quelconque (445), il résulte que pour *extraire la racine carrée d'un polynôme* il faut, comme

dans l'exemple suivant, l'ordonner par rapport aux puissances croissantes ou décroissantes de la même lettre; extraire la racine carrée du premier terme à gauche $4a^6$, ce qui donne le premier terme $2a^3$ de la racine; supprimer le premier terme du polynôme, et diviser le premier terme $28a^5$ du reste par le double $4a^3$ du premier terme de la racine, ce qui donne le second terme $7a^2$ de la racine; retrancher du premier reste le double produit $28a^5$ du premier terme de la racine par le second, et le carré $49a^4$ du second; diviser le premier terme $12a^3$ du second reste par le double du premier terme de la racine, ce qui donne le troisième terme 3 de cette racine; retrancher du second reste les doubles produits $12a^3$ et $42a^2$ du premier et du second termes de la racine par le troisième, et le carré 9 du troisième terme; diviser le premier terme du troisième reste obtenu par le double du premier terme de la racine, ce qui donne le quatrième terme de cette racine, et ainsi de suite.

Ayant, par exemple, à extraire la racine carrée du polynôme $49a^4 + 12a^3 + 9 + 4a^6 + 42a^2 + 28a^5$, pour effectuer les calculs indiqués dans la règle précédente, on dispose les opérations comme il suit :

carré. . .	$4a^6+28a^5+49a^4+12a^3+42a^2+9$	$2a^3+\ 7a^2+3$ racine.	
	$-4a^6$	$4a^3+\ 7a^2$	$4a^3+14a^2+3$
1er reste. . . .	$28a^5+49a^4+12a^3+42a^2+9$	$7a^2$	3
	$-28a^5-49a^4$	$28a^5+49a^4$	$12a^3+42a^2+9$
2e reste.	$12a^3+42a^2+9$		
	$-12a^3-42a^2-9$		
3e reste.	0		

La racine obtenue peut indifféremment être affectée du signe plus ou du signe moins (494).

PUISSANCES ET RACINES QUELCONQUES DES QUANTITÉS ALGÉBRIQUES.

503. On a d'une manière générale, en désignant par a' la valeur absolue de $\sqrt[m]{a}$ (411), pour :

m nombre pair $\sqrt[m]{a} = \pm a'$,

id. $\sqrt[m]{-a} = a'\sqrt{-1}$, imaginaire (495);

m nombre impair $\sqrt[m]{a} = a'$,

id. $\sqrt[m]{-a} = -a'$.

Ainsi :

$\sqrt{4} = \pm 2;\ \sqrt[4]{16} = \pm 2,\ \sqrt[4]{-16} = 2\sqrt{-1},\ \sqrt[3]{27} = 3,\ \sqrt[3]{-27} = -3.$

504. Pour extraire la racine quelconque $m^{ième}$ d'un monôme, il faut extraire la racine $m^{ième}$ du coefficient, et diviser par m l'exposant de

chaque lettre (424). Ainsi

$$\sqrt[3]{64a^3b^6} = 4ab^2, \quad \sqrt[5]{32a^{10}b^5} = 2a^2b.$$

505. Cette règle, appliquée dans sa plus grande généralité, conduit à la *notation des exposants fractionnaires positifs* et même *négatifs*, imaginée par Descartes, et l'une des plus expressives de l'algèbre (277) :

$$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}, \quad \sqrt[5]{32a^4b^6c} = 2a^{\frac{4}{5}}b^{\frac{6}{5}}c^{\frac{1}{5}}, \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

506. Ayant à diviser a^m par a^n, il faut retrancher l'exposant du diviseur de celui du dividende (447 et 448). Ainsi

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Quand $m = n$ on a

$$\frac{a^m}{a^m} \quad \text{ou} \quad 1 = a^{m-m} = a^0.$$

Ce qui montre qu'une quantité quelconque élevée à la puissance 0 donne 1.

Lorsqu'on a $m < n$, cette division conduit à un exposant négatif. Ainsi

$$\frac{a^m}{a^{m+p}} = a^{-p}.$$

Comme on a aussi $\frac{a^m}{a^{m+p}} = \frac{1}{a^p}$, on a donc

$$\frac{1}{a^p} = a^{-p}.$$

L'expression a^{-p} est donc le symbole d'une division qui n'a pas pu s'effectuer; et sa vraie valeur est le quotient de l'unité divisée par la même quantité a affectée de l'exposant p pris positivement. Ainsi

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3}, \quad \text{et} \quad a^{-5} = \frac{1}{a^5}.$$

507. De la combinaison d'une extraction de racine et d'une division impossibles, de quantités monômes, il résulte une autre notation, c'est l'*exposant fractionnaire négatif*.

De ce que $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$, il résulte que l'on a

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \sqrt[n]{a^{-m}} = a^{-\frac{m}{n}}. \qquad (504)$$

Ainsi, en résumant ce qui précède (505, 506, 507), on a

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \quad \frac{1}{a^p} = a^{-p}, \quad \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = a^{-\frac{m}{n}}.$$

508. *Les opérations sur les exposants fractionnaires positifs et néga-*

tifs s'effectuent comme pour les exposants entiers et comme pour l'exposant 2 en particulier. Les exemples suivants font voir la manière d'opérer dans les différents cas :

1°
$$\sqrt[5]{a^3} \times \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{5}+\frac{2}{3}} = a^{\frac{19}{15}},$$
$$\sqrt[4]{\frac{1}{a^3}} \times \sqrt[6]{a^5} = a^{-\frac{3}{4}} \times a^{\frac{5}{6}} = a^{-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}} = a^{\frac{1}{12}},$$
$$a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{2}}c^{-1} \times a^2 b^{\frac{2}{3}} c^{\frac{3}{5}} = a^{\frac{11}{4}} b^{\frac{1}{6}} c^{-\frac{2}{5}};$$

2°
$$a^{\frac{2}{3}} : a^{-\frac{3}{4}} = a^{\frac{2}{3}-\left(-\frac{3}{4}\right)} = a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}} = a^{\frac{17}{12}},$$
$$a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{3}{4}} : a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{7}{8}} = a^{\frac{9}{10}}b^{-\frac{1}{8}};$$

3° *Pour élever un monôme affecté d'exposants quelconques à une puissance quelconque*, il faut multiplier l'exposant de chaque lettre par l'exposant de la puissance. Ainsi :

$$(a^2)^3 = a^6, \quad (a^2b^5)^7 = a^{14}b^{35},$$
$$\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^5 = a^{\frac{3}{4}\times 5} = a^{\frac{15}{4}}, \quad \left(a^{-\frac{5}{6}}\right)^{12} = a^{-10},$$
$$\left(2a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}\right)^6 = 64a^{-3}b^{\frac{9}{2}},$$
$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{-\frac{r}{s}} = a^{\frac{m}{n}\times -\frac{r}{s}} = a^{-\frac{mr}{ns}};$$

4° *Pour extraire une racine quelconque d'un monôme*, on divise l'exposant de chaque lettre par l'indice de la racine. Ainsi :

$$\sqrt[3]{a^3} = a, \quad \sqrt[2]{a^2b^6} = ab^3,$$
$$\sqrt[3]{a^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{2}{9}}, \quad \sqrt[2]{a^{-\frac{3}{4}}} = a^{-\frac{3}{8}}, \quad \sqrt[3]{a^{\frac{3}{5}}b^{-2}} = a^{\frac{1}{5}}b^{-\frac{2}{3}},$$
$$\sqrt[s]{\sqrt[n]{\frac{1}{a^{mr}}}} = \sqrt[s]{\sqrt[n]{a^{-mr}}} = \sqrt[s]{a^{-\frac{mr}{n}}} = a^{-\frac{mr}{ns}}.$$

USAGE DES LOGARITHMES POUR LES CALCULS ALGÉBRIQUES.

509. Ce qui a été dit en arithmétique relativement aux logarithmes peut se répéter ici (393). Les exemples suivants résument l'usage que l'on peut faire des logarithmes pour abréger les calculs arithmétiques auxquels conduisent les opérations algébriques :

1° $\text{Log}\,(abc) = \log a + \log b + \log c;$

2° $\text{Log}\left(\frac{ab}{cd}\right) = \log a + \log b - \log c - \log d;$

3° $\text{Log}\,(a^m b^n c^p) = m \log a + n \log b + p \log c;$

4° $\text{Log}\left(\frac{ab^m}{c^n}\right) = \log a + m \log b - n \log c;$

5° $\operatorname{Log}(a^2 - b^2) = \log[(a+b)(a-b)] = \log(a+b) + \log(a-b)$;

6° $\operatorname{Log}\sqrt{(a^2 - b^2)} = \frac{1}{2}\log(a+b) + \frac{1}{2}\log(a-b)$; (444)

7° $\operatorname{Log}\left(a^2\sqrt[4]{a^3}\right) = \log a^2 + \log\sqrt[4]{a^3} = 3\log a + \frac{3}{4}\log a = \frac{15}{4}\log a$;

8° $\operatorname{Log}\sqrt[n]{(a^3 - b^3)^m} = \frac{m}{n}\log[(a-b)(a^2+ab+b^2)] = \frac{m}{n}\log(a-b) + \frac{m}{n}\log(a^2+ab+b^2)$;

9° $\operatorname{Log}\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{(a+b)^2} = \frac{1}{2}\log(a+b) + \frac{1}{2}\log(a-b) - 2\log(a+b) = \frac{1}{2}\log(a-b) - \frac{3}{2}\log(a+b)$.

ARRANGEMENTS. PERMUTATIONS. COMBINAISONS.

310. Ayant m objets distincts, m lettres par exemple, on appelle :

1° *Arrangements* de ces m lettres n à n, les groupes différents que l'on peut former avec ces m lettres, en les prenant n à n de toutes les manières possibles et en les plaçant les unes à côté des autres sur une même ligne droite. Deux arrangements quelconques diffèrent par leurs lettres ou seulement par l'ordre qu'elles occupent.

Les 3 lettres a, b, c, prises 2 à 2, donnent les 6 arrangements :

$$ab,\ ac,\ ba,\ bc,\ ca,\ cb.$$

2° *Permutations* de ces m lettres, les groupes différents que l'on peut former avec ces m lettres, en les plaçant les unes à côté des autres sur une même ligne droite. Chaque permutation contient toutes les lettres, et, par suite, deux permutations quelconques ne diffèrent que par l'ordre des lettres. Les 3 lettres a, b, c donnent les 6 permutations :

$$abc,\ acb,\ cab,\ bac,\ bca,\ cba.$$

3° *Combinaisons* de m lettres n à n, les groupes différents que l'on peut former avec ces m lettres, en les prenant n à n de toutes les manières possibles, mais de façon que deux groupes quelconques diffèrent au moins par une lettre. On n'a pas égard à l'ordre des lettres ; de sorte que si ces lettres représentent des quantités différentes, les combinaisons représentent tous les produits différents que l'on peut former en prenant comme facteurs ces m quantités n à n de toutes les manières possibles. Les 3 lettres a, b, c donnent, 2 à 2, les trois combinaisons

$$ab,\ ac,\ bc.$$

311. Les arrangements de m lettres 1 à 1 sont la suite des m lettres

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots\ldots,\ k,$$

et leur nombre $A_m^1 = m$.

Les arrangements des m lettres 2 à 2 s'obtiennent en écrivant à la droite de la lettre a de la suite précédente successivement chacune des $m-1$ autres lettres; puis à la droite de la lettre b chacune des $m-1$ autres lettres, et ainsi de suite. Les arrangements ainsi obtenus fournissent le tableau suivant :

$$\begin{array}{l} ab,\ ac,\ ad,\ \ldots\ldots,\ ak, \\ ba,\ bc,\ bd,\ \ldots\ldots,\ bk, \\ ca,\ cb,\ cd,\ \ldots\ldots,\ ck, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ ka,\ kb,\ kc,\ \ldots\ldots,\ kh, \end{array}$$

et leur nombre est $A_m^2 = m(m-1)$.

Les arrangements des m lettres 3 à 3 s'obtiennent de même en écrivant, à la droite de chaque arrangement du tableau précédent, successivement chacune des $m-2$ autres lettres qui n'entrent pas dans l'arrangement considéré; ce qui donne :

$$\begin{array}{l} abc,\ abd,\ abe,\ \ldots\ldots,\ abk, \\ acb,\ acd,\ ace,\ \ldots\ldots,\ ack, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ bac,\ bad,\ bae,\ \ldots\ldots,\ bak, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Le nombre de ces arrangements est $A_m^3 = m(m-1)(m-2)$.

Le nombre des arrangements de m lettres n à n est donc

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1).$$

Application. Combien y a-t-il de nombres différents composés de 4 chiffres significatifs? Faisant $m=9$ et $n=4$ dans la formule précédente, on a

$$A_9^4 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024.$$

312. Les permutations de m lettres ne sont autre chose que les arrangements de ces m lettres prises toutes ensemble, c'est-à-dire m à m. Leur nombre est donc

$$P_m = A_m^m = m(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1 = 1.2.3.4\ldots m.$$

Avec une lettre on a $P_1 = 1$.

Avec deux lettres on peut former les permutations :

$$ab,\ ba,$$

et l'on a $$P_2 = 1.2.$$

Pour former les permutations de 3 lettres, on introduit la lettre c à toutes les places, à la fin, au milieu et au commencement de chacune des deux permutations précédentes, ce qui donne

$$abc,\ acb,\ cab,$$
$$bac,\ bca,\ cba,$$

et
$$P_3 = 1.2.3.$$

On formerait ainsi les permutations pour un nombre quelconque m de lettres, et l'on voit qu'on a bien, d'une manière générale, comme ci-dessus,

$$P_m = 1.2.3.4 \ldots m.$$

Application. De combien de manières peut-on disposer 5 soldats en ligne?

La formule précédente donne

$$P_5 = 1.2.3.4.5 = 120.$$

513. Supposant qu'on a formé toutes les combinaisons de m lettres n à n, si l'on permute les lettres dans chacune de ces combinaisons, on formera les arrangements des m lettres n à n, et le nombre de ces arrangements sera égal au nombre des combinaisons des m lettres n à n multiplié par celui des permutations de n lettres. On a donc

$$A^n = C_m^n \times P_n, \quad \text{d'où} \quad C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}.$$

Remplaçant A_m^n et P_n par leur valeur (511, 512), il vient

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}.$$

Pour $n = m$ cette formule devient $C_m^m = 1$.

Pour $m = 7$ et $n = 3$, on a

$$C_7^3 = \frac{7.6.5}{1.2.3} = 35.$$

On voit qu'au dénominateur se trouvent les nombres entiers successifs depuis 1 jusqu'à n, et au numérateur autant de nombres entiers successifs décroissants, le premier étant égal à m. Il est donc facile de former la valeur de C_m^n.

514. Le nombre des combinaisons de m objets n à n est égal au nombre des combinaisons de m objets $m-n$ à $m-n$:

$$C_m^n = C_m^{m-n}.$$

C'est ce qu'il est facile de vérifier à l'aide de la formule du n° précédent.

515. Le nombre des combinaisons de m objets n à n est égal au nombre des combinaisons de $m-1$ objets n à n, plus le nombre des combinaisons de $m-1$ objets $n-1$ à $n-1$:

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}.$$

516. *Application des combinaisons à la probabilité que l'on avait de gagner à la loterie?* (374).

La loterie se composait de 90 numéros, et on en sortait 5 à chaque tirage. En prenant un n°, c'est-à-dire un *extrait*, le nombre des cas possibles est le nombre des combinaisons de 90 numéros 5 à 5, c'est-à-dire,

$$C_{90}^{5} = \frac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5}.$$

Quant au nombre des cas favorables, il est égal à celui des combinaisons qui contiennent le n° choisi. Or, supposant que le n° choisi a été ôté, et que l'on combine les 89 autres 4 à 4; puis qu'on ajoute le n° choisi à chacune des combinaisons obtenues, on aura les combinaisons favorables, dont le nombre est par conséquent

$$C_{89}^{4} = \frac{89.88.87.86}{1.2.3.4}.$$

La probabilité de la sortie du n° choisi est alors (374).

$$\frac{C_{89}^{4}}{C_{90}^{5}} = \frac{89.88.87.86 \times 1.2.3.4.5}{90.89.88.87.86 \times 1.2.3.4} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}.$$

Ainsi, à chances égales, on devait jouer 1 contre 18. La loterie ne payait que 15 fois la mise.

En prenant 2, 3 ou 4 numéros, c'est-à-dire un *ambe*, un *terne* ou un *quaterne*, on trouverait, en opérant comme ci-dessus, que la probabilité que ces 2, 3 ou 4 numéros se trouveront dans les 5 numéros sortis est respectivement :

$$\frac{1}{399,5}, \quad \frac{1}{11748}, \quad \frac{1}{511\,038}.$$

La loterie ne payait que

270, 5500, 75000 fois la mise.

FORMULE DU BINOME DE NEWTON.

517. De la règle suivie pour obtenir le produit de deux et en général d'un nombre quelconque de polynômes (428 et 429), il résulte que ce produit est la somme des produits que l'on obtient en prenant de toutes les manières possibles un terme dans chacun des polynômes facteurs.

De là, soit à effectuer le produit

$$(x+a)(x+b)(x+c)\dots(x+h)(x+k),$$

de m binômes qui ont le même premier terme x, en l'ordonnant suivant les puissances décroissantes de x.

Prenant le 1er terme x dans chacun des binômes facteurs, on a le 1er terme x^m du produit.

Prenant successivement le second terme a dans le 1er binôme avec le 1er terme x dans tous les autres, le second terme b dans le 2e binôme avec le 1er terme x dans les autres, et ainsi de suite, on obtient les produits partiels ax^{m-1}, bx^{m-1}, ..., kx^{m-1}, dont la somme

$$(a+b+c+\ldots+k)x^{m-1}, \text{ ou, pour abréger, } S_1x^{m-1}$$

est le second terme du produit.

Prenant successivement les seconds termes dans deux binômes facteurs quelconques et le premier x dans les $m-2$ autres, on a les produits partiels abx^{m-2}, acx^{m-2}, bcx^{m-2} ..., dont la somme

$$(ab+ac+\ldots)x^{m-2}, \text{ ou } S_2x^{m-2}$$

est le 3e terme du produit.

Le 4e terme est de même

$$(abc+abd+\ldots)x^{m-3}, \text{ ou } S_3x^{m-3}.$$

Le terme quelconque de degré $m-n$ s'obtient en prenant successivement les seconds termes dans n facteurs quelconques et le premier x dans les autres, et en faisant la somme de tous les produits partiels ainsi obtenus. On peut le mettre sous la forme

$$S_nx^{m-n}.$$

L'avant-dernier terme est

$$S_{m-1}x.$$

Enfin le dernier terme du produit est simplement le produit

$$abc\ldots k, \quad \text{ou} \quad S_m,$$

de tous les seconds termes des binômes facteurs.

Le produit cherché est donc

$$x^m + S_1x^{m-1} + S_2x^{m-2} + \ldots + S_nx^{m-n} + \ldots + S_{m-1}x + S_m.$$

Il est à remarquer que

$$S_1, \quad S_2, \quad S_3, \quad \ldots, \quad S_n, \quad \ldots, \quad S_{m-1}, \quad S_m,$$

ne sont autre chose que les sommes des combinaisons obtenues en prenant les m seconds termes des binômes facteurs respectivement

1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, ..., n à n, ..., $m-1$ à $m-1$, m à m. (510).

518. *Soit maintenant à effectuer la puissance* $(x+a)^m$.

Cela revient à supposer que chacun des seconds termes a, b, c, ... k des m polynômes facteurs est égal à a, et si l'on remarque qu'on a alors (513).



$$S_1 = a + a + a + \dots = C_m^1\, a = ma,$$
$$S_2 = a^2 + a^2 + a^2 + \dots = C_m^2\, a^2 = \frac{m(m-1)}{1.2}\, a^2,$$
$$S_3 = a^3 + a^3 + a^3 + \dots = C_m^3\, a^3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\, a^3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$S_m = a^m = C_m^m\, a^m = a^m,$$

on a donc

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}\, a^2x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\, a^3x^{m-3} + \dots$$
$$+ ma^{m-1}x + a^m.$$

Telle est la formule connue sous le nom de *formule du binôme de Newton*. Dans laquelle : 1° $(x+a)^m$ se compose de $m+1$ termes, dont le premier est x^m et le dernier a^m; 2° l'exposant de x décroît d'une unité en passant d'un terme au suivant, et, par suite, devient nul au dernier terme; tandis que l'exposant de a augmente au contraire d'une unité d'un terme au suivant, depuis le premier terme, où il est nul, jusqu'au dernier, où il est égal à m. Il s'ensuit que dans un terme quelconque la somme des exposants de a et de x est égale à m.

3° Le coefficient d'un terme quelconque s'obtient en multipliant le coefficient du terme précédent par l'exposant de x dans ce terme, et en divisant le produit par un plus l'exposant de a dans ce même terme.

4° Les coefficients de deux termes également distants des extrêmes sont égaux. Il en est par conséquent de même des coefficients de deux termes également distants de celui du milieu si m est pair, ou des deux du milieu si m est impair, ces deux du milieu étant du reste égaux entre eux dans ce dernier cas. Par suite, ayant calculé les coefficients de au moins la moitié des termes, on peut se dispenser de calculer les suivants.

Appliquant ces règles aux deux exemples suivants, on obtient très-facilement :

$$(x+a)^8 = x^8 + 8ax^7 + 28a^2x^6 + 56a^3x^5 + 70a^4x^4 + 56a^5x^3 + 28a^6x^2 + 8a^7x + a^8;$$
$$(x+a)^7 = x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 + 35a^3x^4 + 35a^4x^3 + 21a^5x^2 + 7a^6x + a^7.$$

Le terme qui occupe le rang quelconque $n+1$ dans la formule, celui que nous avons représenté par S_nx^{m-n} au n° précédent, est

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n}\, a^nx^{m-n}.$$

Ce terme, appelé *terme général*, permet de calculer un terme quelconque sans avoir les autres. Il suffit de remplacer dans son expression m et n par leurs valeurs. Ainsi le $(n+1)^e = 4^e$ terme de la valeur de $(x+a)^{m=8}$ est

$$\frac{8.7.6}{1.2.3}\, a^3x^{8-3} = 56a^3x^5.$$

Si dans la formule du binôme on remplace a par $-a$, il vient

$$(x-a)^m = x^m - max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} a^2x^{m-2} - \ldots \pm a^m.$$

Formule qui ne diffère de la première qu'en ce que ses termes sont alternativement positifs et négatifs.

519. Le tableau suivant, connu sous le nom de *triangle de Pascal*, a ses lignes horizontales formées par les coefficients du binôme de Newton pour les diverses valeurs de m.

La colonne verticale intitulée 1re contient les nombres de combinaisons 1 à 1, de 1, 2, 3 ... objets (513); la colonne verticale 2e, les nombres de combinaisons 2 à 2, de 2, 3, 4 ... objets, et en *général* une colonne verticale ne contient les nombres de combinaisons n à n, de n, $n+1$, $n+2$ ... objets.

		1re	2e	3e	4e	5e	6e	7e	8e	9e	10e
$m=1$	1	1	:	:	:	:	:	:	:	:	:
$m=2$	1	2	1	:	:	:	:	:	:	:	:
$m=3$	1	3	3	1	:	:	:	:	:	:	:
$m=4$	1	4	6	4	1	:	:	:	:	:	:
$m=5$	1	5	10	10	5	1	:	:	:	:	:
$m=6$	1	6	15	20	15	6	1	:	:	:	:
$m=7$	1	7	21	35	35	21	7	1	:	:	:
$m=8$	1	8	28	56	70	56	28	8	1	:	:
$m=9$	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	:
$m=10$	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

En un mot, le nombre appartenant à la colonne verticale ne et à la ligne horizontale me exprime le nombre C_m^n des combinaisons de m objets n à n (513). Ainsi 8 objets combinés 5 à 5 donnent $C_m^n = 56$.

Un nombre quelconque du triangle arithmétique est égal à celui placé au-dessus, plus celui qui se trouve à gauche de ce dernier. Ainsi le nombre 56 de la 8e ligne horizontale est égal à $35 + 21$. Cela résulte de la relation

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}. \qquad (515)$$

Cette relation rend très-facile la formation du triangle arithmétique.

Le me nombre d'une colonne verticale quelconque est égal à la somme des m premiers nombres de la colonne précédente. En effet, considérant le 4e nombre 35 de la colonne verticale 4e, comme on a

$$35 = 15 + 20, \quad 15 = 5 + 10, \quad 5 = 1 + 4,$$

on a bien

$$35 = 20 + 10 + 4 + 1.$$

D'une manière générale, le me nombre de la colonne verticale ne se trouve dans $m+n-1$ ligne horizontale; il est donc

$$C_{m+n-1}^n = \frac{(m+n-1)(m+n-2)\ldots m}{1.2.3\ldots n} = \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots n}.$$

520. *Nombre de boulets contenus dans une pile a base triangulaire.*

Fig. 1.

Un triangle de m boulets au côté étant formé de m files qui contiennent respectivement 1, 2, 3...m boulets, nombres entiers consécutifs contenus dans la colonne verticale 1re du triangle arithmétique et que l'on appelle *nombres figurés du* 1er *ordre*, le triangle contient

$$1+2+3+\ldots+m=\frac{m(m+1)}{1.2} \text{ boulets,} \qquad (519)$$

nombre qui est le m^e de la colonne verticale 2e du triangle arithmétique (519). Pour $m=6$, il y a 21 boulets dans le triangle.

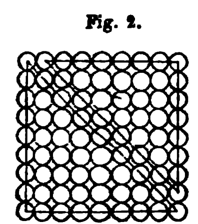
Ainsi les nombres 1, 3, 6... de la colonne verticale 2e du triangle arithmétique sont les *nombres triangulaires* ou les *nombres figurés du second ordre*, ce sont les nombres de boulets contenus dans les assises successives d'une pile triangulaire, et la somme des m premiers, c'est-à-dire

$$\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} \qquad (519)$$

est le nombre des boulets contenus dans la pyramide, et aussi le m^e nombre de la colonne verticale 3e du triangle arithmétique. Pour $m=6$, il y a 56 boulets dans la pyramide. Ainsi les nombres 1, 4, 10... contenus dans la colonne verticale 3e sont les *nombres pyramidaux.*

521. Une *pyramide à base carrée* dont le côté contient m boulets

Fig. 2.



pouvant être considérée comme étant formée de deux pyramides triangulaires dont les arêtes contiennent m boulets pour l'une et $m-1$ pour l'autre, le nombre total des boulets qu'elle contient est (520)

$$\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}+\frac{(m-1)m(m+1)}{1.2.3}=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

et ce nombre est la somme

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+m^2$$

des carrés des m premiers nombres entiers successifs, puisque ces carrés expriment les nombres de boulets contenus dans les assises successives de la pyramide quadrangulaire.

Pour $m=48$ boulets, on a

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+48^2=\frac{48\times 49\times 97}{6}=38\,024 \text{ boulets.}$$

522. Considérant une *pile à base rectangulaire*, dont les côtés de la base contiennent l'un m et l'autre $n<m$ boulets, comme étant formée d'une pile à base carrée de n boulets au côté, et d'un prisme ayant une hauteur de $m-n$ boulets et une base triangulaire de n boulets de côté, le nombre de boulets qu'elle contient est (520 et 521)

Fig. 3.



$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)(m-n)}{2}=\frac{n(n+1)(3m-n+1)}{6}.$$

Pour $m=25$ et $n=10$, la pile contient $\frac{10\times 11\times 66}{6}=1210$ boulets.

523. *Somme* S_m *des puissances* m^ièmes *de* n *nombres*, a, b, c... j, k *en progression arithmétique de raison* r (328).

Ayant $b=a+r$, $c=b+r$, ..., $k=j+r$, on a (518) :

$$b^{m+1}=a^{m+1}+\frac{m+1}{1}ra^m+\frac{(m+1)m}{1.2}r^2a^{m-1}+\ldots+\frac{m+1}{1}r^m a+r^{m+1},$$

$$c^{m+1}=b^{m+1}+\frac{m+1}{1}rb^m+\frac{(m+1)m}{1.2}r^2b^{m-1}+\ldots+\frac{m+1}{1}r^m b+r^{m+1},$$

. . . .

$$k^{m+1}=j^{m+1}+\frac{m+1}{1}rj^m+\frac{(m+1)m}{1.2}r^2j^{m-1}+\ldots+\frac{m+1}{1}r^m j+r^{m+1},$$

$$(k+r)^{m+1}=k^{m+1}+\frac{m+1}{1}rk^m+\frac{(m+1)m}{1.2}r^2k^{m-1}+\ldots+\frac{m+1}{1}r^m k+r^{m+1}.$$

Ajoutant ces égalités, en supprimant les termes b^{m+1}, c^{m+1}... k^{m+1}, qui deviennent communs aux deux membres de l'égalité résultante, et en faisant $a^m+b^m+\ldots+k^m=S_m$, $a^{m-1}+b^{m-1}+\ldots+k^{m-1}=S_{m-1}$... $a+b+\ldots+k=S_1$ et $n=S_0$, on a

$$(k+r)^{m+1}=a^{m+1}+\frac{m+1}{1}rS_m+\frac{(m+1)m}{1.2}r^2S_{m-1}+\ldots+\frac{m+1}{1}r^mS_1+r^{m+1}S_0;$$

d'où l'on tire

$$S_m=\frac{(k+r)^{m+1}-a^{m+1}}{(m+1)r}-\frac{m}{2}rS_{m-1}-\ldots-r^{m-1}S_1-\frac{r^m}{m+1}S_0;$$

A l'aide de cette formule on calculera successivement S_1, S_2, S_3... en partant de $S_0=n$.

Pour $a=1$, $r=1$ et $m=1$, d'où $k=S_0=n$, S_m devient $S_1=1+2+3+\ldots+n$, et la formule précédente donne

$$S_1=\frac{(n+1)^2-1}{2}-\frac{n}{2}=\frac{n(n+1)}{2} \qquad (332)$$

Pour $a=1$, $r=1$ et $m=2$, d'où $k=S_0=n$, S_m devient $S_2=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$, et la formule donne

$$S_2=\frac{(n+1)^3-1}{3}-S_1-\frac{1}{3}S_0=\frac{(n+1)^3-1}{3}-\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n}{3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ces formules de S_1 et S_2 sont identiques à celles trouvées aux n°s 520 et 521; seulement m est remplacée par n.

Pour $a=1$, $r=1$ et $m=3$, d'où $k=S_0=n$, S_m devient $S_3=1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$, et la formule donne

$$S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Pour $a = 1$, $r = 2$ et $m = 2$, d'où $k = 2n - 1$, $S_0 = n$, $S_1 = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2$, S_m devient $S_2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2$, et la formule donne

$$S_2 = \frac{(2n+1)^3 - 1}{6} - 2n^2 - \frac{4}{3}n = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

Les deux formules précédentes des valeurs de S_2 trouvent leur application dans le calcul de la somme des longueurs des tiges de ponts suspendus.

LIVRE IV.

Équations du second degré.

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ A UNE SEULE INCONNUE.

324. On distingue deux espèces d'équations du second degré à une seule inconnue :

1° Les *équations incomplètes*, qui ne renferment que des termes affectés du carré de l'inconnue et des termes connus. Telles sont

$$3x^2 = 5, \quad 4x^2 - 7 = 2x^2 + 9, \quad \frac{1}{3}x^2 - 3 + \frac{5}{12}x^2 = \frac{7}{24},$$

qui reviennent, en opérant comme au n° 471, à

$$3x^2 = 5, \quad 2x^2 = 16, \quad 18x^2 = 79.$$

Ce qui fait voir que les équations incomplètes du second degré peuvent toujours se ramener à la forme

$$ax^2 = b.$$

C'est pourquoi on leur donne le nom d'*équations à deux termes;*

2° Les *équations complètes*, qui renferment non-seulement le carré, mais aussi la première puissance de l'inconnue. Telles sont

$$5x^2 - 7x = 34, \quad 4x^2 + \frac{1}{2}x + 3 = 8 + \frac{1}{3}x,$$

qui reviennent, en opérant d'une manière analogue à ce qui a été fait n° 471, à

$$x^2 - \frac{7}{5}x = \frac{34}{5}, \quad x^2 + \frac{1}{24}x = \frac{5}{4}.$$

Ce qui fait voir que toutes les équations complètes du second degré peuvent se ramener à la forme

$$x^2 + px = q.$$

C'est pourquoi on leur donne le nom d'*équations à trois termes*.

525. *Pour résoudre une équation incomplète du second degré*, on la ramène à la forme

$$ax^2 = b, \text{ d'où l'on tire } x^2 = \frac{b}{a}, \text{ puis } x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}. \qquad (494)$$

Ainsi l'inconnue x a deux valeurs égales et de signes contraires, qu'on obtient en extrayant la racine carrée d'une quantité connue. C'est ce qui a fait donner le nom de *racine* d'une équation du second degré, et en général d'une équation d'un degré quelconque à une inconnue, à chacune des solutions de cette équation.

526. *Pour résoudre une équation complète du second degré*, on la ramène à la forme (530)

$$x^2 + px = q. \qquad (524)$$

Remarquant alors que $x^2 + px$ se compose des deux premières parties du carré $x^2 + px + \frac{p^2}{4}$ de $x + \frac{p}{2}$ (439), ajoutant la troisième partie $\frac{p^2}{4}$ aux deux membres de l'équation précédente, on a

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} \text{ ou } \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} + q.$$

Extrayant la racine carrée des deux membres de cette équation, il vient

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} + q},$$

d'où l'on tire

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}. \qquad (1)$$

Le signe $\pm$ qui précède le radical montre que l'inconnue x a deux valeurs. *Ces racines de l'équation égalent la moitié du coefficient de* x *changé de signe, plus ou moins la racine carrée de la somme du carré de cette moitié et du terme connu*. En les désignant par x' et x'', on a

$$x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}, \quad x'' = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}, \qquad (530)$$

La formule (1) peut se mettre sous la forme

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}.$$

Lorsque la quantité placée sous le radical est positive, sa racine carrée est réelle, ainsi que les deux racines de l'équation.

Quand la quantité placée sous le radical est nulle, les deux racines sont égales chacune à $-\frac{p}{2}$.

Si la quantité sous le radical est négative, sa racine carrée est imaginaire et par suite aussi les racines de l'équation (495).

527. Faisant la somme des racines de l'équation, on a

$$x'+x''=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}=-p.$$

Ainsi la somme des racines est égale au coefficient p *du terme en* x, *pris avec un signe contraire* (421).

De plus, ayant (444)

$$x'x''=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}\right)\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}\right)=-q,$$

le produit des racines est donc égal à la quantité toute connue prise avec un signe contraire.

Ces valeurs de la somme et du produit des racines d'une équation du second degré fournissent deux moyens très-simples pour vérifier l'exactitude de ces racines (529).

528. *On peut former une équation du second degré ayant des racines données*, $x'=5$ *et* $x''=-2$ *par exemple.* En effet, on a

$$-p=x'+x''=5-2=3 \quad \text{et} \quad -q=x'x''=5\times-2=-10,$$

et par suite, $$x^2-3x=10.$$

529. *Équations du second degré à résoudre.*

1er *exemple.* $\frac{5}{6}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}=8-\frac{2}{3}x-x^2+\frac{273}{12}.$

Cette équation se ramène (2°, n° 524) à

$$x^2+\frac{2}{22}x=\frac{360}{22},\quad \text{d'où (526)}\left\{\begin{array}{l} x'=-\frac{1}{22}+\sqrt{\left(\frac{1}{22}\right)^2+\frac{360}{22}}=4 \\ x''=-\frac{1}{22}-\sqrt{\left(\frac{1}{22}\right)^2+\frac{360}{22}}=-\frac{45}{11}. \end{array}\right.$$

Ayant $4-\frac{45}{11}=-\frac{2}{22}$, et $4\times-\frac{45}{11}=-\frac{360}{22}$, on en conclut que ces racines sont exactes (527). Elles vérifient bien, en effet, l'équation proposée.

2e *exemple.* $$6x^2-37x=-57.$$

Cette équation revient à

$$x^2-\frac{37}{6}x=-\frac{57}{6},\quad \text{d'où}\left\{\begin{array}{l} x'=\frac{37}{12}+\sqrt{\left(\frac{37}{12}\right)^2-\frac{57}{6}}=\frac{19}{6} \\ x''=\frac{37}{12}-\sqrt{\left(\frac{37}{12}\right)^2-\frac{57}{6}}=3. \end{array}\right.$$

Les calculs sont exacts, puisque $\frac{19}{6}+3=\frac{37}{6}$, et $\frac{19}{6}\times 3=\frac{57}{6}$.

3e *exemple.* $4a^2-2x^2+2ax=18ab-18b^2$.

Cette équation se ramène, en changeant les signes, à

$$x^2-ax=2a^2-9ab+9b^2;$$

d'où $$\left\{\begin{array}{l} x'=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+2a^2-9ab+9b^2}=2a-3b \\ x''=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+2a^2-9ab+9b^2}=-a+3b \end{array}\right.$$

On passe à ces dernières valeurs de x en remarquant que la quantité sous les radicaux est égale à $\frac{9}{4}a^2-9ab+9b^2$, c'est-à-dire au carré de $\frac{3}{2}a-3b$ (439).

Les racines trouvées sont exactes, puisqu'on a $2a-3b-a+3b=a$, et $(2a-3b)(-a+3b)=-2a^2+9ab-9b^2$ (426).

4e *exemple.* $ax^2+bx=0$.

Cette équation, dans laquelle la quantité toute connue est zéro, donne, en divisant par a,

$$x^2+\frac{b}{a}x=0,\quad \text{d'où}\quad \left\{\begin{array}{l} x'=-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}}=0 \\ x''=-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}}=-\frac{b}{a}. \end{array}\right.$$

530. On peut avoir les racines de l'équation complète $ax^2+bx=c$ sans ramener préalablement cette équation à la forme $x^2+px=q$, c'est-à-dire sans y faire $\frac{b}{a}=p$ et $\frac{c}{a}=q$ (526).

Faisant dans la formule

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q},$$

$p=\frac{b}{a}$ et $q=\frac{c}{a}$, il vient

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+4ac}}{2a}. \qquad (1)$$

Cette formule est ordinairement employée dans la pratique, parce qu'elle conduit à des calculs plus simples que la première.

On a dans ce cas

$$x'+x''=-\frac{b}{a},\quad \text{et}\quad x'x''=-\frac{c}{a}.$$

Quand le coefficient b de x est pair, on peut faire $b = 2b'$ dans la formule, qui devient alors

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 + 4ac}}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 + ac}}{a}.$$

Forme sous laquelle son application exige des calculs arithmétiques plus simples encore.

L'équation

$$3x^2 - 28x = -49$$

donne ainsi

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 3 \times 49}}{3} = \frac{14 \pm 7}{3},$$

c'est-à-dire $$x' = 7 \quad \text{et} \quad x'' = \frac{7}{3}.$$

Quand $a = 1$, la formule (1) devient

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4c}}{2};$$

forme que prend la formule générale du n° 526.

531. *Décomposition du trinôme du second degré* $x^2 + px + q = 0$ *en deux facteurs du premier degré.*

Ce trinôme revenant à l'équation $x^2 + px = -q$, on a (526 et 527)

$$x' + x'' = -p \quad \text{ou} \quad -(x' + x'') = p, \quad \text{et} \quad x'x'' = q.$$

Remplaçant p et q par ces valeurs dans le trinôme, celui-ci devient

$$x^2 - (x' + x'')x + x'x'' = 0,$$

ou $$(x - x')(x - x'') = 0.$$

Ainsi l'on a d'une manière générale

$$x^2 + px + q = (x - x')(x - x'').$$

Par exemple, l'équation $x^2 + 4x - 12 = 0$ donnant $x' = -6$ et $x'' =$ on a

$$x^2 + 4x - 12 = (x + 6)(x - 2).$$

Le trinôme $ax^2 + bx + c = 0$ donnerait de même

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'').$$

Ainsi, les racines de l'équation $3x^2 - 7x + 2 = 0$ étant $x' = 2$ et $x'' = \frac{1}{3}$, on a

$$3x^2 - 7x + 2 = 3(x - 2)\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ A PLUSIEURS INCONNUES.

532. ***Résolution d'un système de deux équations à deux inconnues, dont l'une ou toutes les deux sont du second degré.***

1° *Si l'une d'elles est du premier degré*, on en tire la valeur d'une des inconnues en fonction de l'autre, et, substituant cette valeur dans l'autre équation, celle-ci devient du second degré à une seule inconnue; on en tire la valeur de cette inconnue, et cette valeur, substituée dans la première équation, permet d'obtenir la valeur de l'autre inconnue. Ainsi ayant

$$ax + by = 2s \quad \text{et} \quad xy = t,$$

de la première équation on tire (471)

$$y = \frac{2s - ax}{b}.$$

Substituant cette valeur de y dans la deuxième équation, on a

$$x \times \frac{2s - ax}{b} \quad \text{ou} \quad -\frac{a}{b}x^2 + \frac{2s}{b}x = t;$$

d'où l'on tire, en chassant les dénominateurs et changeant les signes,

$$ax^2 - 2sx = -bt,$$

et par suite (530)

$$x = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - abt}}{a}.$$

Substituant cette valeur de x dans la première des équations proposées. on en tire

$$y = \frac{s \mp \sqrt{s^2 - abt}}{b}.$$

Le système, comme on le voit, est susceptible de deux solutions directes, car on a évidemment $s > \sqrt{s^2 - abt}$; mais pour qu'elles soient réelles, il faut que l'on ait $s^2 > abt$ ou $s^2 = abt$.

Ces deux solutions séparées sont :

$$x = \frac{s + \sqrt{s^2 - abt}}{a}, \quad y = \frac{s - \sqrt{s^2 - abt}}{b};$$

et

$$x = \frac{s - \sqrt{s^2 - abt}}{a}, \quad y = \frac{s + \sqrt{s^2 - abt}}{b}.$$

Pour $a = b = 1$, les équations proposées deviennent $x + y = 2s$; $xy = t$, et les valeurs de x et de y se réduisent à

$$x = s \pm \sqrt{s^2 - t} \quad \text{et} \quad y = s \mp \sqrt{s^2 - t}.$$

Ce qui fait voir qu'alors les deux valeurs de y sont égales à celles de x prises dans un ordre inverse, c'est-à-dire que si $s+\sqrt{s^2-t}$ est la valeur de x, $s-\sqrt{s^2-t}$ sera la valeur correspondante de y, et réciproquement.

Méthode particulière. Remarquant que la résolution du système

$$x+y=2s, \quad xy=t$$

revient à trouver deux nombres x et y dont on connaît la somme et le produit, cela revient en définitive à trouver les racines de l'équation (527, 528)

$$z^2-2sz=-t.$$

Ce qui donne directement (530).

$$z'=s+\sqrt{s^2-t}, \quad z''=s-\sqrt{s^2-t}.$$

Les solutions du système sont alors, en faisant successivement $x=z'$ et $x=z''$:

$$x=s+\sqrt{s^2-t}, \quad y=2s-x=s-\sqrt{s^2-t};$$

et $$x=s-\sqrt{s^2-t}, \quad y=2s-x=s+\sqrt{s^2-t}.$$

Valeurs trouvées par la méthode générale.

Cette méthode particulière peut s'appliquer au système

$$x-y=2, \quad xy=15,$$

qui devient, en y faisant $y=-y_1$,

$$x+y_1=2, \quad xy_1=-15.$$

x et y_1 étant les racines de l'équation

$$z^2-2z=15,$$

qui donne $$z'=5 \quad \text{et} \quad z''=-3.$$

On a alors $$x=5, \quad y_1=2-5=-3;$$

et $$x=-3, \quad y_1=2+3=5.$$

Par suite, les solutions du système proposé sont

$$x=5, \quad y=3;$$

et $$x=-3, \quad y=-5.$$

Cette méthode particulière peut encore s'appliquer au système

$$x+y=8, \quad x^2+y^2=34.$$

En effet, si de la première équation élevée au carré,

$$x^2+2xy+y^2=64,$$

on retranche la seconde, on a $2xy = 30$ ou $xy = 15$, et l'on voit que le système revient au suivant

$$x + y = 8, \quad xy = 15.$$

x et y étant les racines de l'équation

$$z^2 - 8z = -15,$$

qui donne $$z' = 5 \quad \text{et} \quad z'' = 3,$$

les solutions du système sont alors

$$x = 5, \quad y = 8 - 5 = 3;$$

et $$x = 3, \quad y = 8 - 3 = 5.$$

2° *Quand une des équations est du premier degré par rapport à l'une des inconnues seulement*, on en tire la valeur de cette inconnue, et, substituant cette valeur dans l'autre équation, on obtient une équation du troisième degré. Ainsi ayant

$$ax^2 + by = 2s \quad \text{et} \quad xy = t,$$

de la première équation on tire

$$y = \frac{2s}{b} - \frac{ax^2}{b}.$$

Substituant dans la deuxième équation, on a

$$\frac{2s}{b}x - \frac{a}{b}x^3 = t;$$

ou, en chassant les dénominateurs et changeant les signes,

$$ax^3 - 2sx = -bt.$$

3° *Soit le système de deux équations du second degré à deux inconnues:*

$$x^2 + y^2 = 25, \quad xy = 12.$$

La seconde équation donne $y = \frac{12}{x}$. Substituant dans la première, on a

$$x^2 + \frac{144}{x^2} = 25, \quad \text{ou} \quad x^4 - 25x^2 = -144.$$

On est ainsi amené à résoudre une équation du 4e degré; mais cette équation étant bicarrée pour l'exemple choisi, sa résolution n'offrira aucune difficulté (533).

On peut du reste résoudre ainsi le système proposé : à la première équation ajoutant la seconde multipliée par 2, on a

$$x^2 + 2xy + y^2 \text{ ou } (x+y)^2 = 49, \quad \text{d'où} \quad x + y = \pm 7. \qquad (1)$$

De la première retranchant la seconde multipliée par 2, on a

$$x^2 - 2xy + y^2 \text{ ou } (x-y)^2 = 1, \text{ d'où } x - y = \pm 1. \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) donnant la somme et la différence des deux quantités x et y, on en déduit facilement ces quantités. Ces équations ajoutées et retranchées fournissent en effet

$$x = \frac{\pm 7 \pm 1}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{\pm 7 \mp 1}{2}.$$

Les solutions du système proposé sont donc :

$$\begin{aligned} x &= 4, \quad y = 3; \\ x &= 3, \quad y = 4; \\ x &= -4, \quad y = -3; \\ x &= -3, \quad y = -4. \end{aligned}$$

Ces solutions satisfont en effet au système.

L'élimination d'une des inconnues entre deux équations complètes du second degré à deux inconnues conduit à une équation du quatrième degré.

Considérant le système d'équations complètes du second degré

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + fx + g = 0,$$
$$a'y^2 + b'xy + c'x^2 + d'y + f'x + g' = 0,$$

ordonnons par rapport à x, ce qui donne

$$cx^2 + (by + f)x + ay^2 + dy + g = 0,$$
$$c'x^2 + (b'y + f')x + a'y^2 + d'y + g' = 0.$$

Si les coefficients de x^2 étaient les mêmes dans ces deux équations, on obtiendrait, en retranchant ces deux équations l'une de l'autre, une équation du premier degré en x, qui pourrait être substituée à l'une des équations proposées; de cette équation l'on tirerait la valeur de x en fonction de y, et reportant cette valeur dans l'une des équations proposées, on parviendrait à une équation qui ne renfermerait plus que l'inconnue y (3°, n° 480).

Or, si l'on multiplie chaque terme de la première équation par c', et ceux de la seconde par c, il vient

$$cc'x^2 + (by + f)c'x + (ay^2 + dy + g)c' = 0,$$
$$cc'x^2 + (b'y + f')cx + (a'y^2 + d'y + g')c = 0.$$

Soustrayant l'une de l'autre ces équations, dans lesquelles x^2 a le même coefficient, on trouve

$$[(bc' - cb')y + fc' - cf']x + (ac' - ca')y^2 + (dc' - cd')y + gc' - cg' = 0,$$

équation qui donne

$$x = \frac{(ca' - ac')y^2 + (cd' - dc')y + cg' - gc'}{(bc' - cb')y + fc' - cf'}.$$

Cette expression de x, substituée dans l'une des équations proposées, donnerait une équation finale en y.

Sans effectuer cette substitution, qui conduirait à un résultat très-compliqué, il est facile de reconnaître que l'équation en y serait du quatrième degré.

ÉQUATIONS TRINOMES.

533. *Il est une classe d'équations d'un degré supérieur à 2 dont on peut ramener la résolution à celle d'une équation du second degré à une inconnue.* Ce sont les équations de la forme

$$ax^{2m} + bx^m = c,$$

que l'on appelle *équations trinômes*, parce qu'elles ne contiennent que trois espèces de termes : des termes en x^{2m}, des termés en x^m, et des termes connus.

En posant $x^m = y$, on ramène l'équation à celle du second degré

$$ay^2 - by = c.$$

Ayant calculé les valeurs de y à l'aide de cette équation, celles de x sont données par la formule

$$x = \sqrt[m]{y}.$$

Si m *est un nombre pair*, toute valeur réelle positive de y donne pour x deux valeurs réelles égales et de signes contraires; au contraire, toute valeur négative de y ne donne pour x que des valeurs imaginaires (503).

Si m *est impair*, toute valeur réelle de y ne donne pour x qu'une seule valeur, qui est réelle et de même signe que y.

Soit l'*équation trinôme bicarrée*

$$x^4 - 25x^2 = -144.$$

Faisant $x^2 = y$, on la ramène à l'équation

$$y^2 - 25y = -144, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{25 \pm \sqrt{25^2 - 4 \times 144}}{2}. \quad \text{(526 et 530)}$$

Mais $x^2 = y$ donne $x = \pm\sqrt{y}$,

donc $$x = \pm\sqrt{\frac{25 \pm \sqrt{25^2 - 4 \times 144}}{2}}.$$

Ce qui fait voir que l'équation a 4 racines, égales deux à deux et de signes contraires.

Effectuant les calculs on trouve d'abord

$$y = 16 \quad \text{et} \quad y = 9.$$

Puis $$x = \pm 4 \quad \text{et} \quad x = \pm 3.$$

Valeurs qui satisfont bien à l'équation proposée.

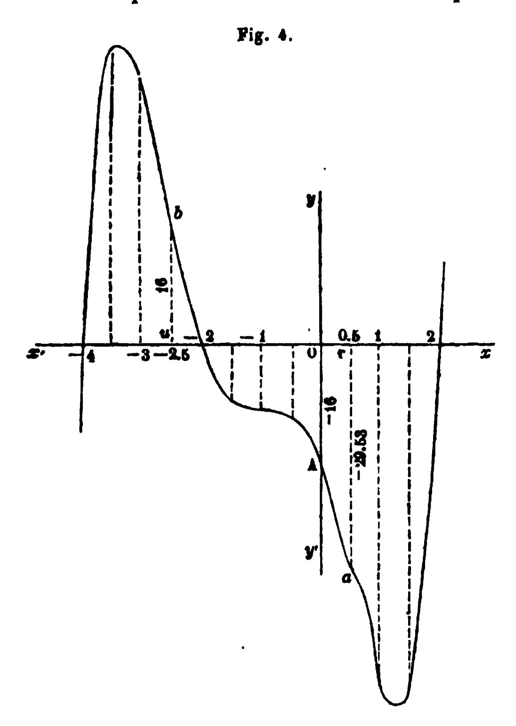
ÉQUATIONS D'UN DEGRÉ QUELCONQUE.

334. *Moyen graphique pour résoudre une équation d'un degré quelconque.* Soit, par exemple, l'équation

$$x^5 + 5x^4 + x^3 - 16x^2 - 20x - 16 = 0,$$

dans laquelle on a fait passer tous les termes dans le premier membre.

Fig. 4.



On trace deux axes Ox, Oy rectangulaires entre eux. On donne à x, dans l'équation, différentes valeurs, que l'on porte, à une échelle convenable, sur Ox ou Ox', selon qu'elles sont positives ou négatives. Aux points obtenus sur xx', on élève des perpendiculaires, sur lesquelles on prend, à une échelle convenable, qui peut être différente de la première pour la clarté du dessin, des longueurs y représentant les valeurs que prend le 1[er] membre de l'équation pour les diverses valeurs attribuées à x. On raccorde les points obtenus sur ces perpendiculaires par une courbe continue, et les distances au point O, des points où cette courbe rencontre xx', représentent très-approximativement les racines de l'équation.

Pour $x = 0$, la valeur y du 1[er] membre de l'équation étant -16, on prend $OA = -16$.

Pour $$x = 0v = 0{,}5,$$

on a $$y = va = 0{,}5^5 + 5 \times 0{,}5^4 + 0{,}5^3 - 16 \times 0{,}5^2 - 20 \times 0{,}5 - 16 = -29{,}53.$$

Pour $$x = 0u = -2{,}5,$$

on a $$y = ub = 2{,}5^5 + 5 \times 2{,}5^4 - 2{,}5^3 - 16 \times 2{,}5^2 + 20 \times 2{,}5 - 16 = 16.$$

Selon que x sera positif ou négatif, les divers termes qui entrent dans la valeur de y auront les signes de la 1re ou de la 2e de ces deux dernières égalités; ce qui évitera de rechercher ces signes pour calculer chaque valeur de y.

En opérant ainsi, on trouve que l'on a respectivement pour

$x = 0$	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$-0{,}5$	-1	$-1{,}5$	-2	$-2{,}5$	-3	$-3{,}5$	$-4,$
$y = -16$	$-29{,}53$	-45	$-45{,}72$	0	$-9{,}84$	-9	$-7{,}65$	0	16	35	40	$0.$

Ayant obtenu $y = 0$ pour les valeurs 2, -2 et -4 de x, c'est que ces valeurs sont des racines réelles de l'équation. Si l'on trace la courbe, elle rencontre xx' aux points pour lesquels on a $x = 2$, $x = -2$ et $x = -4$. L'examen de la formule montre que pour des valeurs de x supérieures à 2, les valeurs de y sont toutes supérieures à 0 et positives; comme, de plus, la courbe ne rencontre pas xx' entre $x = 0$ et $x = 2$, 2 est donc la seule racine réelle positive de l'équation. On reconnaît de même que -2 et -4 sont les seules racines réelles négatives.

Quand, comme dans l'exemple précédent, les racines sont entières, on peut les obtenir assez rapidement sans tracer la courbe. Ayant obtenu une valeur de y qui approche de zéro, en augmentant ou en diminuant convenablement x, on ne tarde pas à avoir $y = 0$, et la valeur correspondante de x est la racine cherchée.

Dans une question de mécanique pratique et en général dans toutes celles relatives à la science de l'ingénieur, on n'a ordinairement besoin que d'une racine, qui est le plus souvent positive. On conçoit que quand il en est ainsi, on ne fait aucun calcul pour les x négatifs, et on ne trace la courbe que du côté des x positifs. De plus encore, la nature de la question laisse prévoir à l'avance quelle sera à peu près la valeur de x, et l'on conçoit que c'est pour la valeur de x qu'on préjuge être la vraie, puis, si cela est nécessaire, pour les voisines de cette valeur, qu'on devra faire le tâtonnement ou tracer la courbe.

C'est surtout lorsque les valeurs de x ne sont pas entières, et en général quand elles sont formées d'un grand nombre de chiffres, que ces considérations acquièrent de l'importance.

Soit à résoudre l'équation

$$x^3 - 3x^2 + 7x - 40 = 0.$$

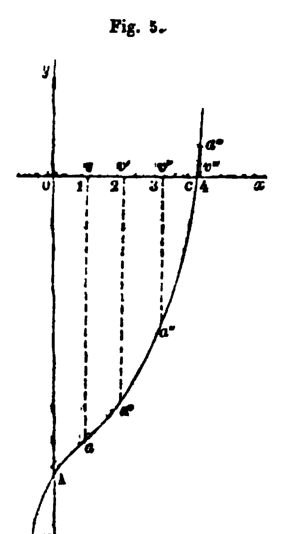
Pour $x = 0$, on a $y = 0A = -40$;

$x = 1 = 0v$, $y = va = 1 - 3 + 7 - 40 = -35$;
$x = 2 = 0v'$, $y = v'a' = 8 - 12 + 14 - 40 = -30$;
$x = 3 = 0v''$, $y = v''a'' = 27 - 27 + 21 - 40 = -19$;
$x = 4 = 0v'''$, $y = v'''a''' = 64 - 48 + 28 - 40 = 4$.



y étant devenu positif, cela indique que l'équation a une racine positive comprise entre 3 et 4. L'équation montre assez qu'au delà de 4 les valeurs de y seront toujours plus grandes que 0 et positives, et comme en deçà de $x=4$ il n'y a qu'une valeur de x qui donne $y=0$, ce que met bien en évidence le tracé de la courbe, il n'y a donc qu'une racine réelle positive. Le point de rencontre c de la courbe avec Ox donnant, avec l'exactitude fournie par un tracé graphique, $v''c=0,9$ de $v''v'''$ ou de 1, dans la pratique on pourra prendre 3,9 pour la racine de l'équation. Si l'on veut vérifier cette racine ou l'avoir avec plus d'exactitude, on opérera de la manière suivante :

Fig. 5.



Pour $x=3,9$, l'équation donne $y=0,99$.

Ce qui indique que 3,9 est trop fort.

Pour $x=3,8$, on a $y=-1,85$.

x est donc compris entre 3,8 et 3,9.

La valeur de x augmentant de $3,9-3,8=0,1$ pour une augmentation $1,85+0,99=2,84$ de y, supposant que ces accroissements restent proportionnels entre eux pour de petits écarts de x ou de y, ce qui revient à supposer que la courbe est droite entre ces écarts, pour l'augmentation 1,85 de y, x augmentera de $0,1\times\dfrac{1,85}{2,84}=0,065$. La racine cherchée est donc très-sensiblement 3,865. En substituant cette valeur de x dans l'équation, on trouve $y=0,03$, ce qui indique bien en effet une grande approximation, plus que suffisante pour la pratique.

On déterminerait de la même manière les racines négatives; mais, nous le répétons, on n'en a pas ordinairement besoin.

335. *Résolution d'une équation d'un degré quelconque par approximations successives.* Soit l'équation

$$x^5+200x=5000.$$

On suppose d'abord $x=0$ dans tous les termes moins un qui contiennent x; on excepte ordinairement le terme qui contient x avec le plus grand exposant, parce qu'on approche plus rapidement de la valeur de x, surtout quand les coefficients des autres termes d'un degré élevé ne sont pas très-grands. Faisant $x=0$ dans le second terme de l'équation proposée, elle devient

$$x^5=5000,\ \text{ou}\ 5\log x=\log 5000;\ \text{d'où}\ x=5,4928.$$

On remplace alors x par cette valeur dans les termes où l'on a d'abord fait $x=0$; notre équation devient

$$x^5+200\times 5,4928=5000;\ \text{d'où}\ x=5,2269.$$

Substituant cette nouvelle valeur de x dans l'équation, il vient

$$x^3 + 200 \times 5{,}2269 = 5000; \text{ d'où } x = 5{,}2411.$$

Cette 3e valeur substituée à son tour en fournit une 4e $x = 5{,}2403$; laquelle en fournirait une 5e $x = 5{,}2403$...

Ainsi l'on peut adopter 5,2403 pour la valeur de x, et l'on voit que, dans la pratique, on aurait pu adopter la 3e valeur 5,2411, sans erreur sensible.

Au lieu de partir de $x = 0$, on aurait pu partir d'une valeur que la nature de la question aurait fait supposer se rapprocher de la vraie valeur de x.

MAXIMA ET MINIMA.

536. Lorsqu'une grandeur prend différentes valeurs successives, on dit qu'elle atteint un *maximum* ou un *minimum*, lorsque sa valeur est respectivement plus grande ou plus petite que les valeurs voisines, celles qui la précèdent et celles qui la suivent immédiatement.

Un *maximum* ou un *minimum* est dit *absolu*, lorsqu'il n'existe aucune valeur de la quantité variable plus grande que ce maximum ou plus petite que ce minimum. C'est un *maximum relatif* ou un *minimum relatif* dans le cas contraire.

Nous allons nous occuper ici de quelques questions de maximum et de minimum qui peuvent se résoudre à l'aide des équations du second degré, en nous réservant de traiter dans la huitième partie les questions de maximum et de minimum avec plus de généralité.

537. Le maximum du produit $xy = z$ de deux facteurs variables x, y, dont la somme $x + y = a$ est constante, a lieu quand ces deux facteurs sont égaux, c'est-à-dire quand on a $x = y = \frac{a}{2}$.

1° En effet, ayant (441)

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy,$$

$(x+y)^2$ étant une quantité constante et positive, le produit $4xy$, et, par suite, celui xy sera d'autant plus grand que $x - y$ sera plus petit en valeur absolue, et il sera maximum quand on aura

$$x - y = 0, \text{ c'est-à-dire } x = y = \frac{a}{2}.$$

2° Ayant $x + y = a$ et $xy = z$, il en résulte (528) que x et y sont les racines de l'équation $u^2 - au = -z$, qui donne (526)

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - z}, \quad y = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - z}.$$

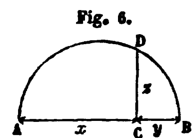
L'énoncé exigeant implicitement que x et y aient des valeurs réelles, il

faut donc que $z = xy$ ne soit pas supérieur à $\frac{a^2}{4}$, qui est sa valeur maximum. Mais quand $z = xy = \frac{a^2}{4}$, les deux racines x et y de l'équation étant égales, on a bien, comme au 1°,

$$x = y = \frac{a}{2}.$$

3° Sur une droite AB prenons, à la suite l'une de l'autre, les longueurs AC et CB, représentant, à une certaine échelle, les deux nombres x et y, dont la somme $x + y = a = AB$ est constante; sur AB, comme diamètre, décrivons une demi-circonférence, et au point C menons CD perpendiculaire à AB. Représentant CD par z, on a, quelle que soit la position du point C, c'est-à-dire les valeurs de x et y,

Fig. 6.



$$z^2 = xy.$$

Le maximum de xy correspond par conséquent à celui de z^2 ou de z; mais z est maximum quand le point C est au centre de la demi-circonférence, et alors on a

$$z = x = y = \frac{a}{2}.$$

338. Du n° précédent, il résulte :

1° *Que de tous les rectangles de même périmètre, le carré est celui dont la surface est maximum.*

2° *Que de tous les triangles rectangles dont la somme des deux côtés de l'angle droit est constante, celui qui est isocèle a une surface maximum.*

3° *Que de tous les triangles de même base* a *et de même périmètre* 2 p. *le triangle isocèle est celui dont la surface est maximum.* En effet, l'expression de la surface s du triangle étant (voir trigonométrie)

$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

les facteurs p et $p - a$ étant constants, s sera *maximum* quand le produit $(p - b)(p - c)$ des deux autres facteurs sera maximum, or comme la somme $2p - b - c = a$ de ces deux facteurs est constante, ce sera donc quand on aura $p - b = p - c$ ou $b = c$.

339. *Le produit d'un nombre quelconque* n *de facteurs positifs, dont la somme* a *est constante, est maximum quand tous ces facteurs sont égaux entre eux.* Car si seulement deux facteurs étaient inégaux, en remplaçant chacun d'eux par leur moyenne arithmétique (309), le produit de ces facteurs augmenterait et par suite aussi le produit total, sans que la somme de tous les facteurs change.

De là on conclut :

1° *Que la moyenne arithmétique de* n *nombres positifs, qui ne sont pas tous égaux entre eux, est plus grande que leur moyenne géométrique.* En



effet, ayant

$$abc\ldots < \left(\frac{a+b+c+\ldots}{n}\right)^n, \quad \text{on a bien} \quad \frac{a+b+c+\ldots}{n} > \sqrt[n]{abc\ldots}$$

2° *Que de tous les triangles de même périmètre* 2p, *le triangle équilatéral est celui dont la surface* s *est maximum*. En effet, ayant (538)

$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

puisque p est positif, chacun des 3 autres facteurs doit être positif; car si un seul ou tous les trois étaient négatifs, s aurait une valeur imaginaire, et si deux, $p-b$ et $p-c$ par exemple, étaient négatifs, on aurait $2p < b+c$, ce qui est impossible.

p étant constant, s sera *maximum* quand les produits des 3 autres facteurs sera maximum, c'est-à-dire quand on aura

$$p-a = p-b = p-c, \text{ ou } a = b = c.$$

540. *Le produit* abc... *d'un nombre quelconque* n *de facteurs positifs, dont la somme* $a^m + b^m + c^m + \ldots$ *des puissances* m^es^ *est constante, est un maximum quand tous ces facteurs sont égaux entre eux.*

Soit, par exemple, à *déterminer, parmi tous les rectangles que l'on peut inscrire dans un cercle donné, celui dont l'aire est maximum.*

s étant la surface d'un rectangle inscrit, x et y ses dimensions, et d le diamètre du cercle ou la diagonale du rectangle, on a

$$xy = s \text{ ou } x^2y^2 = s^2, \text{ et } x^2 + y^2 = d^2.$$

La somme d^2 des facteurs x^2 et y^2 étant constante, pour que le produit s^2, et par suite la surface s soit maximum, on doit avoir $x^2 = y^2$ ou $x = y$. Ainsi *le carré est de tous les rectangles inscrits celui dont l'aire est maximum.*

541. *La somme* $x + y = a$ *de deux nombres positifs* x *et* y *étant donnée, trouver le maximum du produit* $x^m y^n$, *dans lequel* m *et* n *sont des nombres entiers positifs.*

On a
$$x^m y^n = m^m n^n \frac{x^m}{m^m} \times \frac{y^n}{n^n}.$$

$m^m n^n$ étant une quantité constante, le produit $x^m y^n$ sera maximum quand $\frac{x^m}{m^m} \times \frac{y^n}{n^n}$ sera maximum. Mais ce dernier produit se composant de m facteurs égaux chacun à $\frac{x}{m}$ et de n facteurs égaux chacun à $\frac{y}{n}$, et la somme $m\frac{x}{m} + n\frac{y}{n} = x + y$ de ces $m+n$ facteurs étant constante, il est maximum quand tous ces facteurs sont égaux, c'est-à-dire quand on a

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n}.$$

Ainsi le produit $x^m y^n$ *est maximum quand* x *et* y *sont proportionnels à leurs exposants* m *et* n.

Ce qui précède s'applique quel que soit le nombre des facteurs.

Des deux équations

$$x+y=a \quad \text{et} \quad \frac{x}{m}=\frac{y}{n},$$

on tire (480)

$$x=\frac{ma}{m+n} \quad \text{et} \quad y=\frac{na}{m+n}.$$

Application 1re. *Inscrire dans un cercle de rayon donné* r, *le triangle isocèle* ABC *de surface maximum.*

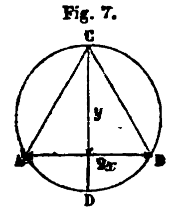


Fig. 7.

Soit $2x$ la base AB du triangle, y sa hauteur, s sa surface, et CD le diamètre perpendiculaire à AB. On a

$$xy=s \quad \text{et} \quad x^2=y(2r-y).$$

Cette dernière équation exprime que x est moyenne proportionnelle entre les deux segments du diamètre (voir géométrie).

s sera maximum quand xy ou $x^2y^2=y^3(2r-y)$ sera maximum. Mais dans ce dernier produit, qu'on obtient en multipliant par y^2 la valeur précédente de x^2, la somme $y+(2r-y)=2r$ est constante. On a donc pour le maximum, 3 étant l'exposant du premier facteur y^3 et 1 celui du second $(2r-y)$,

$$\frac{y}{2r-y}=\frac{3}{1}, \quad \text{d'où} \quad y=\frac{3}{2}r.$$

Valeur de y qui indique que le triangle maximum est équilatéral.

2me. *Construire une boîte de capacité maximum avec une feuille de carton carrée* ABCD.

Fig. 8.

Pour construire une telle boîte, on trace à égale distance des côtés de la feuille des parallèles à ces côtés; on enlève les 4 carrés des angles, et on relève à angle droit sur la feuille les 4 rectangles tels que EFLK. La boîte se trouve ainsi avoir pour fond le carré EFGH.

Désignant la constante AB par $2l$, et la variable AK par x, la capacité c de la caisse est

$$c=(2l-2x)^2x=4(l-x)^2x,$$

et la somme $(l-x)+x=l$ étant constante, le maximum de c correspond à

$$\frac{l-x}{x}=\frac{2}{1}, \quad \text{d'où} \quad x=\frac{l}{3}=\frac{2l}{6}.$$

Ainsi pour obtenir la boîte la plus grande on divisera AB et AD chacun en 6 parties égales, et on mènera les parallèles par les premiers points de division.

3me. On trouverait par une marche analogue *quel est le plus grand des cylindres inscrits dans une sphère.*

r étant le rayon de la sphère, x le rayon de la base du cylindre, et $2y$ sa hauteur, on trouve

$$y=\frac{r}{\sqrt{3}},\text{ou}\quad 2y=r\frac{2}{\sqrt{3}},\quad\text{et}\quad x=r\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

4me. *Circonscrire à un cylindre donné le cône de volume minimum.*

h étant la hauteur du cylindre et r le rayon de sa base, appelant y la hauteur du cône et x le rayon de sa base, on arrive pour le minimum cherché à

$$y=3h\quad\text{et}\quad x=\frac{3}{2}r.$$

542. *Décomposer un nombre donné* a *en deux facteurs* x *et* y *dont la somme* z *soit un minimum.* Ayant

$$x+y=z\quad\text{et}\quad xy=a,$$

x et y sont, pour une valeur quelconque de z, les racines de l'équation $u^2-zu=-a$, qui donne (526 et 527)

$$x=\frac{z}{2}+\sqrt{\frac{z^2}{4}-a},\quad y=\frac{z}{2}-\sqrt{\frac{z^2}{4}-a}.$$

x et y devant avoir des valeurs réelles, $\frac{z^2}{4}$ doit au moins être égal à a, ou z à $2\sqrt{a}$; à cette limite inférieure, les deux racines sont égales, et l'on a

$$x=y=\frac{z}{2}=\sqrt{a}.$$

Ainsi, *le minimum de la somme* x + y *de deux facteurs variables positifs, dont le produit* xy = a *est constant, a lieu quand chacun de ces facteurs est égal à la racine carrée du produit donné* (537).

Il en résulte :

1° *Que de tous les rectangles de même surface, le carré est celui qui a le plus petit périmètre.*

2° *Que de tous les triangles rectangles de même surface, le triangle isocèle est celui dans lequel la somme des côtés de l'angle droit est un minimum.*

543. *Le minimum de la somme d'un nombre quelconque* n *de facteurs variables positifs, dont le produit* a *est constant, a lieu quand tous ces facteurs sont égaux, c'est-à-dire quand chacun d'eux est égal à* $\sqrt[n]{a}$. Car si seulement deux facteurs étaient inégaux, en remplaçant chacun d'eux

par leur moyenne géométrique, leur somme diminuerait, et par suite aussi la somme totale, sans que le produit de tous les facteurs change (539).

544. *La somme* $x^2 + y^2 = z$ *des carrés de deux quantités variables* x *et* y, *dont la somme* $x + y = a$ *est constante, est un un minimum quand ces deux quantités sont égales entre elles*, *et*, par suite, *égales chacune à* $\frac{a}{2}$.

Élevant au carré les deux membres de l'égalité

$$x + y = a, \quad \text{on tire} \quad x^2 + y^2 = a^2 - 2xy,$$

et l'on voit que $x^2 + y^2$ sera minimum, quand xy sera maximum, c'est-à-dire quand on aura (537) $x = y = \frac{a}{2}$.

Il en résulte que :

1° *De tous les triangles rectangles dont la somme des côtés de l'angle droit est constante, celui qui est isocèle a la plus petite hypoténuse.*

2° *De tous les rectangles de même périmètre, le carré a la plus petite diagonale.*

3° *De tous les carrés inscrits dans un carré donné*, *le plus petit a pour sommets les milieux du carré donné.*

545. Les questions qui précèdent rentrent dans la question générale suivante : *Trouver le maximum et le minimum du trinôme.*

$$ax^2 + bx + c.$$

Désignant par y la valeur variable avec x de ce trinôme, on a

$$ax^2 + bx + c = y \quad \text{ou} \quad ax^2 + bx + c - y = 0;$$

d'où l'on tire (530)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{4ay - (4ac - b^2)}}{2a}.$$

Ainsi pour que la valeur de x soit réelle on doit avoir

$$4ay \overline{\overline{>}} 4ac - b^2. \qquad (1)$$

Et il y a deux cas à distinguer, suivant que le coefficient a de x^2 est positif ou négatif.

1er *cas*. Pour $a > 0$, la relation (1) donnant

$$y \overline{\overline{>}} \frac{4ac - b^2}{4a},$$

on voit que dans ce cas, pour les valeurs réelles de x, la *plus petite valeur* de y est $\frac{4ac - b^2}{4a}$, et comme pour ce minimum le radical devient zéro, on a en même temps $x = -\frac{b}{2a}$.

Ainsi les trinômes

$$3x^2-7x+2 \quad \text{et} \quad x^2+x+1,$$

dans lesquels le coefficient de x^2 est positif, ont respectivement pour *valeur minimum absolue :*

$$\frac{4\times3\times2-7\times7}{4\times3}=-\frac{25}{12}, \text{ qui correspond à } x=-\frac{-7}{2\times3}=\frac{7}{6};$$

$$\frac{4\times1\times1-1\times1}{4\times1}=\frac{3}{4}, \text{ qui correspond à } x=-\frac{1}{2}.$$

2° *cas.* Pour $a<0$, la relation (1) donnant, puisque $4a$ est négatif,

$$y \leqq \frac{4ac-b^2}{4a},$$

on voit qu'alors la *plus grande valeur* de y est $\frac{4ac-b^2}{4a}$, et que ce *maximum* correspond à $x=-\frac{b}{2a}$.

Ainsi le trinôme $-9x^2+6x-1$, dans lequel le coefficient de x^2 est négatif, a pour *valeur maximum absolue*

$$\frac{4\times-9\times-1-6\times6}{4\times-9}=\frac{36-36}{-36}=0, \text{ qui correspond à } x=-\frac{6}{2\times-9}=\frac{1}{3}.$$

TROISIÈME PARTIE.

GÉOMÉTRIE.

DÉFINITIONS.

546. Un *solide* ou *corps* est une proportion de l'espace terminée de toutes parts.

547. Une *surface* est ce qui termine un corps.

548. Une *ligne* est ce qui termine une surface.

549. Les extrémités d'une ligne sont des *points*.

Remarque. Un corps a trois dimensions : *longueur*, *largeur*, *épaisseur*; une surface n'en a que deux, *longueur* et *largeur;* la ligne, une, *longueur;* le point n'en a aucune. Les surfaces, les lignes et les points n'existent pas matériellement.

550. Les solides, les surfaces et les lignes se désignent sous le nom commun de *figures*.

551. Deux *figures coïncident* quand elles se confondent dans tous leurs points.

552. Deux *figures égales* sont deux figures susceptibles de coïncider.

553. Deux *figures équivalentes* sont deux figures qui ont la même étendue.

Remarque. Deux figures égales sont toujours équivalentes, mais deux figures équivalentes peuvent ne pas être égales.

554. Nous avons tous l'idée d'une ligne droite; un fil très-fin et fortement tendu nous en offre une image.

La ligne droite est le plus court chemin pour aller d'un point A à un autre B.

Fig. 9.

A B

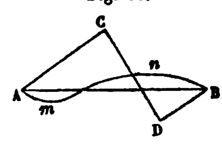
On ne peut tracer qu'une ligne droite allant d'un point A à un autre B, et deux droites qui ont deux points communs coïncident dans toute leur étendue.

555. La *direction d'une ligne droite* quelconque AB est cette ligne elle-même prolongée indéfiniment au delà de ses extrémités A et B.

556. *Sens d'une ligne.* Sur une même droite, et en général sur une ligne quelconque, il y a deux sens : ainsi il y a le sens AB et le sens BA, *fig.* 9. Un mobile suivant la ligne finie ou indéfinie AB, on dit qu'il va dans le sens AB, s'il avance du même côté que le mobile qui part de A pour aller vers B en suivant AB; on dit qu'il va dans le sens BA, s'il avance du côté opposé. On voit que l'on distingue les deux sens de la ligne par l'ordre dans lequel on désigne deux de ses points.

557. Une *ligne brisée* est une ligne ACDB composée de plusieurs droites non situées dans la même direction.

Fig. 10.



558. Une *ligne courbe* est une ligne AmnB qui n'est droite dans aucune partie de son étendue. C'est la limite vers laquelle tend une *ligne* brisée dont les éléments droits deviennent de plus en plus petits (184).

559. Le *plan* est une surface indéfinie, telle que si l'on prend deux points quelconques sur cette surface et qu'on les joigne par une droite, cette ligne sera tout entière dans la surface.

560. *On peut toujours faire passer un plan :* 1° par trois points non en ligne droite; 2° par deux droites dont les directions se rencontrent; 3° par une droite et un point situé hors de la droite; mais on n'en peut faire passer qu'un. Ainsi, tout autre plan qui contiendrait, soit les trois points, soit les deux droites, soit la droite et le point, coïnciderait avec le premier.

561. L'intersection d'une droite et d'un plan est un seul point.

L'intersection de deux plans est une ligne droite, qui contient tous les points communs aux deux plans.

562. Une *figure* est *plane* lorsqu'elle a tous ses points dans un même plan.

563. Le *contour* ou *périmètre* d'une surface plane est la ligne qui termine la surface de toutes parts.

564. Une *surface brisée* est une surface composée de plusieurs surfaces planes non situées dans un même plan (557).

565. Une *surface courbe* est une surface qui n'est plane dans aucune partie de son étendue. C'est la limite vers laquelle tend une surface brisée dont les éléments plans deviennent de plus en plus petits (558).

566. Le lieu des positions des points jouissant d'une propriété dont ne jouissent pas tous les autres points est un *lieu géométrique* (584).

567. La *géométrie* est la science des figures (550).

568. La *géométrie plane* est la partie de la géométrie relative aux figures planes. La *géométrie de l'espace* est celle où l'on traite des figures dont tous les points ne sont pas situés dans un même plan.

GÉOMÉTRIE PLANE.

LIVRE I.

De la ligne droite.

869. Deux droites AB et AC qui ont une extrémité commune et des directions différentes forment une figure appelée *angle*. Ces droites AB et AC sont les *côtés de l'angle*. Le point de rencontre A des côtés est le *sommet de l'angle*.

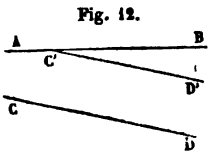
Fig. 11.

La *grandeur d'un angle* est indépendante de celle de ses côtés. On se fera une idée très-nette de l'angle et de sa grandeur, en supposant que les côtés, d'abord appliqués l'un sur l'autre, s'écartent en tournant autour du sommet A comme les deux branches d'un compas que l'on ouvre; l'angle, d'abord nul, prend une valeur qui augmente avec l'écartement des côtés.

On désigne un angle par la lettre de son sommet; ainsi on dira l'*angle* A. Mais quand il y a plusieurs angles qui ont le même sommet, on évite la confusion en désignant l'angle par les trois lettres BAC ou CAB de ses côtés, en ayant soin de placer celle du sommet au milieu.

L'angle A est l'angle des deux droites AB et AC (*fig.* 11), et, d'une manière générale, que deux droites AB et CD (*fig.* 12) soient ou non situées dans un même plan, l'*angle de ces deux droites* est l'angle BC'D' formé par l'une AB des droites avec une parallèle C'D' menée à la seconde par un point quelconque C' de la première. On voit que l'angle de 2 droites est déterminé par les sens attribués à ces droites; ainsi pour les sens BA et CD l'angle des droites serait AC'D'.

Fig. 12.



870. *Deux angles* BAC, CAD sont *adjacents*, lorsque, ayant le même sommet A, et un côté commun AC, ils sont extérieurs l'un à l'autre.

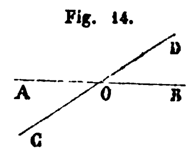
Fig. 13.

871. *Deux angles sont opposés au sommet*, quand chacun d'eux est formé par les prolongements des cotés de l'autre. Tels sont (*fig.* 14) les angles

AOC et BOD, AOD et BOC.

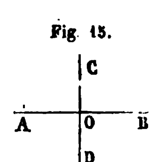
572. *Deux angles opposés au sommet sont égaux* (552).

Fig. 14.



573. Une *droite est perpendiculaire à une autre*, lorsque la première fait avec la seconde, et d'un même côté de celle-ci, deux angles adjacents égaux entre eux. Ainsi, en supposant AOC = BOC, CD est perpendiculaire à AB; et il en résulte que AB est aussi perpendiculaire à CD.

Fig. 15.



Une *droite* est *oblique sur une autre*, quand la première fait avec la seconde, et d'un même côté de celle-ci, deux angles adjacents inégaux. Telles sont CD par rapport à AB, et AB par rapport à CD (*fig.* 14).

574. Une droite est *verticale* lorsque sa direction est celle du *fil à plomb* (555). Toute verticale passant par le centre de la terre, la verticale varie donc pour chaque point de la surface du globe.

Toute droite perpendiculaire à la verticale est dite *horizontale* (743).

575. On nomme *angle droit* chacun des deux angles adjacents égaux AOC, BOC formés par une droite OC perpendiculaire à une autre AB (*fig.* 15).

576. *Tous les angles droits sont égaux entre eux* (fig. 15).

577. Tout angle BOD (*fig.* 14), plus petit qu'un angle droit, est un *angle aigu*.

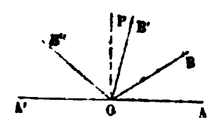
Tout angle AOD (*fig.* 14), plus grand qu'un angle droit, est un *angle obtus*.

578. Deux *angles* sont *complémentaires* ou *compléments* l'un de l'autre, quand leur somme est égale à un angle droit: tels sont (*fig.* 13) les angles BAC et CAD, en supposant leur somme BAD égale à un droit.

579. Deux *angles* sont *supplémentaires* ou *suppléments* l'un de l'autre, lorsque leur somme est égale à deux angles droits : tels sont les deux angles AOD, BOD (*fig.* 14).

580. La somme de tous les angles adjacents consécutifs AOB, BOB', B'OB'', B''OA', formés autour d'un point O, du même côté d'une droite AA', est égale à deux droits.

Fig. 16.



En effet, la perpendiculaire OP menée au point O à AA' détermine deux angles droits AOP, POA' dont la somme est égale à AOB + BOB' + B'OB'' + B''OA'.

381. La somme de tous les angles adjacents consécutifs AOB, BOB'..., formés autour d'un point O, par un nombre quelconque de droites qui partent de ce point, est égale à 4 droits.

Fig. 17.

382. Par un point quelconque on peut toujours mener une perpendiculaire à une droite donnée; mais on n'en peut mener qu'une.

Élever une perpendiculaire OC *à une droite* AB (*fig.* 15), c'est mener une perpendiculaire à cette droite par un point O pris sur la droite.

Abaisser une perpendiculaire CO *à une droite* AB (*fig.* 15), c'est mener une perpendiculaire à cette droite par un point C pris hors de la droite.

383. Lorsque d'un point A, situé hors d'une droite BC, on abaisse une perpendiculaire AD et différentes obliques AE, AF, AG : 1° la perpendiculaire AD est plus courte que toute oblique; 2° deux obliques AE, AF dont les pieds s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales; 3° de deux obliques AE, AG, celle AE dont le pied s'écarte le moins de la perpendiculaire est la plus courte. Les réciproques sont vraies.

Fig. 18.

La perpendiculaire AD étant le plus court chemin du point A à la droite, elle est la *distance du point* A *à la droite*.

384. *La perpendiculaire* CD *sur le milieu d'une droite* AB *est le lieu géométrique des points situés à égale distance des extrémités de cette droite* (566). C'est-à-dire qu'un point quelconque C, pris sur CD, donne $AC = BC$, et que pour un point quelconque E, pris hors de CD, on a $AE > BE$ ou $AE < BE$ selon que le point E est à droite ou à gauche de CD.

Fig. 19.

385. La *bissectrice d'un angle* est la droite qui le divise en deux parties égales.

386. *La bissectrice* AD *d'un angle* BAC *est le lieu géométrique des points situés dans l'angle à égale distance des côtés* (566). C'est-à-dire que si d'un point quelconque E pris sur AD on abaisse les perpendiculaires EF, EG sur les côtés, ces perpendiculaires sont égales; au lieu que H étant hors de AD, on a la perpendiculaire HF plus grande que la perpendiculaire HI.

Fig. 20.

387. Deux lignes *droites* AB et CD sont *parallèles* lorsque, étant situées dans un même plan, leurs directions ne se rencontrent pas (565).

388. Par un point A (*fig.* 21), situé hors d'une droite CD, on peut mener une parallèle à cette droite; mais on n'en peut mener qu'une.

589. Lorsque deux droites AB, CD, parallèles ou non parallèles, situées dans un même plan, sont coupées par une troisième EF, on nomme :

Fig. 21.

1° *Angle intérieur* ou *interne*, chacun des quatre angles formés entre les deux premières droites : tels sont les angles AGH, BGH, CHG, DHG.

2° *Angle extérieur* ou *externe*, chacun des quatre angles formés en dehors de ces mêmes droites : tels sont les angles AGE, BGE, CHF, DHF.

3° *Angles alternes-internes*, deux angles formés de côtés différents de la sécante, intérieurs et non adjacents : tels sont AGH et DHG, BGH et CHG.

4° *Angles internes-externes* ou *correspondants*, deux angles, l'un intérieur et l'autre extérieur, formés d'un même côté de la sécante et non adjacents : tels sont AGH et CHF, BGH et DHF, CHG et AGE, DHG et BGE.

5° *Angles alternes-externes*, deux angles formés de côtés différents de la sécante, extérieurs et non adjacents : tels sont AGE et DHF, BGE et CHF.

590. *Lorsque les deux droites* AB, CD *sont parallèles* (fig. 21) :

1° La somme de deux angles intérieurs situés d'un même côté de la sécante est égale à deux angles droits ; et, *réciproquement*, si la somme de deux angles intérieurs situés d'un même côté de la sécante est égale à deux droits, les droites sont parallèles.

2° La somme de deux angles extérieurs situés d'un même côté de la sécante est égale à deux angles droits, et *réciproquement*.

3° Deux angles quelconques de même nom, alternes-internes, correspondants, ou alternes-externes, sont égaux ; et, *réciproquement*, si deux angles quelconques de même nom sont égaux, les droites sont parallèles.

591. Deux droites AB, A'B' perpendiculaires à une troisième CD sont parallèles entre elles (573 et 587).

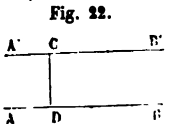


Fig. 22.

592. *Toute droite* CD *perpendiculaire à l'une* AB *de deux parallèles l'est à l'autre* A'B'.

La portion de cette perpendiculaire interceptée entre les deux parallèles est constante, c'est-à-dire que *deux parallèles sont partout également distantes*.

De plus, les parallèles comprises entre deux droites parallèles sont égales.

593. Les deux droites AB et A'B' étant parallèles entre elles (*fig.* 23), toute droite EF parallèle à l'une l'est à l'autre.

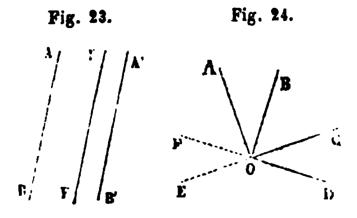


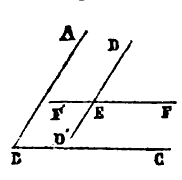
Fig. 23. Fig. 24.

594. *Deux angles qui ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun sont égaux ou supplémentaires* (579). OA étant perpendiculaire à OC et OB à OD, on a AOB = COD ou EOF, et AOB est le supplément de DOE ou COF.

Remarque. On aurait des cas analogues si les angles n'avaient pas le même sommet.

895. *Deux angles qui ont les côtés parallèles chacun à chacun sont égaux ou supplémentaires.* AB étant parallèle à DE et BC à EF, on a ABC = DEF ou D'EF', et ABC est supplémentaire de DEF' ou D'EF.

Fig. 25.



Les deux angles sont égaux lorsque leurs côtés sont respectivement dirigés dans le même sens ou en sens contraires; ils sont supplémentaires quand leurs côtés sont dirigés deux dans le même sens et deux en sens contraires.

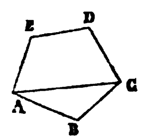
LIVRE II.

La ligne brisée et les polygones.

---

896. Un *polygone* est une surface plane terminée par une ligne brisée (557, 562) : telle est la surface ABCDE.

Fig. 26.



Chacune des droites AB, BC..., qui composent le contour d'un polygone, est un *côté du polygone.*

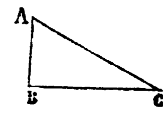
Chacun des angles EAB, ABC..., formé par deux côtés consécutifs d'un polygone, est un *angle du polygone.*

Toute droite telle que AC, qui joint deux sommets non consécutifs d'un polygone, est une *diagonale.*

897. Le polygone de trois côtés s'appelle *triangle;* celui de quatre côtés, *quadrilatère;* celui de cinq, *pentagone;* de six, *hexagone;* de sept, *heptagone;* de huit, *octogone;* de neuf, *ennéagone;* de dix, *décagone;* de onze, *endécagone;* de douze, *dodécagone;* de quinze, *pentédécagone;* de vingt, *icosogone.*

898. Un *triangle* ABC est *rectangle* lorsqu'un de ses angles est droit (575).

Fig. 27.



L'*hypoténuse* d'un triangle rectangle est le côté AC opposé à l'angle droit B.

899. Un *triangle* est *obtusangle* lorsqu'un de ses angles est obtus (577).

Un *triangle* est *acutangle* lorsque tous ses angles sont aigus.

600. Un *triangle* ABC est *isocèle* lorsque deux de ses côtés AB et AC sont égaux entre eux.

Fig. 28.

Remarque. Dans un triangle isocèle les angles B et C opposés aux côtés égaux sont égaux ; et, *réciproquement*, si dans un triangle deux angles B et C sont égaux, les côtés AC et AB opposés aux angles égaux sont égaux, c'est-à-dire que le triangle est isocèle.

601. Un *triangle* est *équilatéral* quand ses trois côtés sont égaux entre eux.

Remarque. Dans un triangle équilatéral les angles sont égaux entre eux ; et, *réciproquement*, si les trois angles sont égaux, le triangle est équilatéral.

Un triangle *scalène* est un triangle dont les côtés, et par suite les angles, sont inégaux.

602. Dans tout triangle ABC, un côté quelconque AC est plus petit que la somme AB + BC des deux autres, et plus grand que leur différence AB — BC.

Fig. 29.

603. De deux côtés AB et AC d'un triangle ABC (*fig.* 29), celui-là est le plus petit qui est opposé à un plus petit angle ; et, réciproquement, le côté AB étant plus petit que le côté AC, l'angle C est plus petit que l'angle B.

604. La *base d'un triangle* est indifféremment un côté quelconque.

Fig. 30.

Dans le triangle isocèle (*fig.* 28), on prend particulièrement pour base le côté BC qu'on ne suppose pas égal aux deux autres.

Le *sommet d'un triangle* est le sommet de l'angle opposé au côté pris pour base.

La *hauteur d'un triangle* est la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base.

Ainsi, ayant pris BC pour base (*fig.* 30), le sommet est A, et la hauteur est la perpendiculaire AD.

605. Un *parallélogramme* est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles ; tel est ABCD.

Fig. 31.

Dans un parallélogramme les côtés opposés sont égaux ainsi que les angles opposés.

Pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, il suffit que deux côtés opposés soient égaux et parallèles. C'est aussi un parallélogramme quand les côtés opposés sont égaux chacun à chacun, ou encore quand les angles opposés sont égaux chacun à chacun.

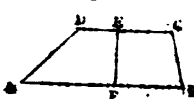
606. La *base d'un parallélogramme* est indifféremment un côté quelconque.

La *hauteur d'un parallélogramme* est la distance de la base au côté opposé.

Ainsi, ayant pris AB pour base (*fig.* 31), la hauteur est la perpendiculaire EF interceptée entre cette base et le côté parallèle DC (592).

607. Un *trapèze* est un quadrilatère dont deux côtés seulement sont parallèles : tel est ABCD.

Fig. 32.



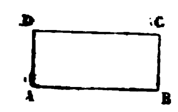
Les *bases d'un trapèze* sont les deux côtés parallèles AB, DC.

La *hauteur d'un trapèze* est la distance EF des deux bases (592).

608. Un *trapèze rectangle* est celui dont un des côtés non parallèles est perpendiculaire aux bases.

609. Un *rectangle* est un quadrilatère ABCD dont les angles sont droits.

Fig. 33.



Remarque. Tout rectangle est un parallélogramme (605).

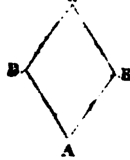
610. La *base d'un rectangle* est un côté quelconque.

La *hauteur d'un rectangle* est l'un quelconque des côtés adjacents à la base (606).

Les deux *dimensions d'un rectangle* sont sa base et sa hauteur.

611. Un *losange* est un quadrilatère ABCD dont les côtés sont égaux.

Fig. 34.



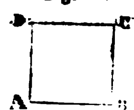
Remarque. Un losange est un parallélogramme (605).

La *base d'un losange* est un quelconque de ses côtés (606).

La *hauteur d'un losange* est la distance de sa base au côté opposé (592).

612. Un *carré* est un quadrilatère ABCD dont les angles sont droits et les côtés égaux.

Fig. 35.



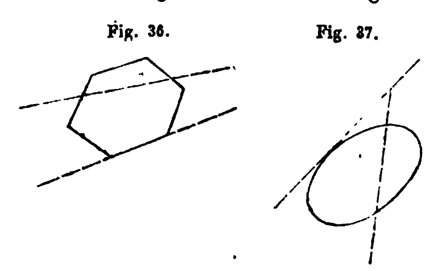
Remarque. Un carré est à la fois un parallélogramme, un rectangle et un losange (605, 609, 611). Sa *base* est un quelconque de ses côtés ; le côté adjacent à la base est la *hauteur*, qui est toujours égale à la base.

613. Un *polygone* est *équiangle* lorsque tous ses angles sont égaux entre eux. Tels sont, par exemple, le triangle équilatéral et le rectangle (601, 609).

614. Un *polygone* est *équilatéral* lorsque tous ses côtés sont égaux entre eux. Tels sont, par exemple, le triangle équilatéral et le losange (601, 611).

Remarque. Un polygone peut être à la fois équiangle et équilatéral : comme, par exemple, le triangle équilatéral et le carré.

615. Une ligne brisée ou une ligne courbe (557, 558) est dite convexe, lorsqu'elle est située tout entière du même côté de la direction de chacun de ses éléments rectilignes finis (*fig.* 36) ou infiniment petits (*fig.* 37).


Fig. 36. Fig. 37.

Une ligne droite ne peut rencontrer une ligne convexe en plus de deux points.

Un polygone et en général une surface plane quelconque est convexe lorsqu'il est terminé par une ligne convexe.

616. Tout angle formé par l'un des deux côtés consécutifs d'un polygone et le prolongement de l'autre est un *angle extérieur* au polygone. Tel est l'angle DCH, formé par le côté CD et le prolongement CH du côté adjacent BC. Il en est de même des angles EDI, AEK... (619).

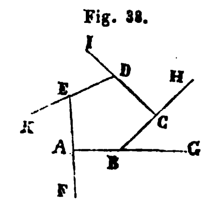


Fig. 38.

617. Les deux angles d'un triangle, non adjacents à un angle extérieur au triangle, s'appellent *angles intérieurs opposés*. Tels sont les angles A et C par rapport à l'angle extérieur CBD (619).

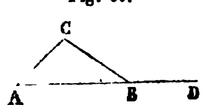


Fig. 39.

618. *La somme des angles d'un polygone est égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux dans le polygone.* Ainsi, S étant la somme des angles et n le nombre des côtés d'un polygone, on a

$$S = 2(n-2) = (2n-4) \text{ angles droits.}$$

Pour le triangle, $n=3$, $S=2(3-2)=6-4=2$ angles droits.
Pour le quadrilatère, $n=4$, $S=2(4-2)=8-4=4$ angles droits.
Pour le pentagone, $n=5$, $S=2(5-2)=10-4=6$ angles droits.
Pour l'hexagone, $n=6$, $S=2(6-2)=12-4=8$ angles droits, et ainsi de suite pour un polygone quelconque.

Remarque. La somme des angles d'un triangle étant égale à deux droits, il en résulte que si l'un des trois angles est droit ou obtus, les deux autres sont aigus.

619. L'angle extérieur CBD (*fig.* 39) d'un triangle est égal à la somme des deux angles intérieurs opposés A et C, et par conséquent plus grand que chacun d'eux.

Lorsqu'on prolonge chacun des côtés d'un polygone en suivant le contour dans le même sens (*fig.* 38), la somme CBG + DCH + EDI + ... des angles extérieurs formés est toujours égale à quatre angles droits.

620. *Deux triangles quelconques* ABC, A'B'C' *sont égaux, ainsi que leurs parties, angles et côtés :*

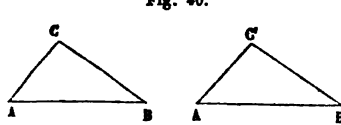


Fig. 40.

1° Lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun : A = A', AB = A'B', AC = A'C';

2° Lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à des angles égaux chacun à chacun : AB = A'B', A = A', B = B';

3° Lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun (626).

621. *Deux triangles rectangles* ABC, A'B'C' *sont égaux :*

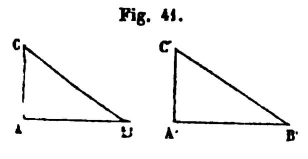


Fig. 41.

1° Lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal : BC = B'C', B = B';

2° Lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un autre côté égal : BC = B'C', AB = A'B'.

622. *Deux parallélogrammes sont égaux* lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun (605).

623. Dans un triangle isocèle (*fig.* 28), la droite A*m*, menée du sommet au milieu de la base, est perpendiculaire à cette base et divise l'angle du sommet en deux parties égales.

624. Dans tout parallélogramme les diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales; *réciproquement*, si dans un quadrilatère les diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales, la figure est un parallélogramme.

Fig. 42. A B C

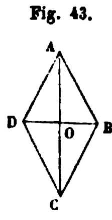


Fig. 43.

Les diagonales d'un rectangle sont égales entre elles (*fig.* 42).

Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires entre elles (*fig.* 43).

625. Dans tout trapèze : 1° la droite MN, qui joint les milieux des côtés opposés non parallèles, est parallèle aux bases et égale à leur demi-somme, $MN = \frac{AB + DC}{2}$;

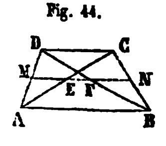


Fig. 44.

2° la droite EF, qui joint les milieux des diagonales, se confond avec MN, et elle est égale à la demi-différence des bases, $EF = \frac{AB - DC}{2}$.

626. *Données nécessaires et suffisantes pour construire un triangle.* On peut construire un triangle : 1° quand on a deux côtés et l'angle compris; 2° quand on donne un côté et deux angles; 3° quand on connaît les trois côtés; 4° quand deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux sont donnés (620). (Voir *Problèmes de géométrie.*)

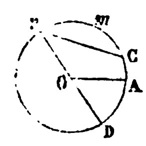
627. *On peut construire un parallélogramme* quand on connaît deux côtés consécutifs et l'angle qu'ils comprennent (622).

LIVRE III.

La circonférence et le cercle.

628. Le *cercle* est une surface plane dans laquelle est un point O, tel que toutes les droites menées de ce point au contour de la surface sont égales entre elles. Ce point est le *centre* du cercle. Le contour ou périmètre du cercle s'appelle *circonférence*. Toute droite OA menée du centre à la circonférence se nomme *rayon*.

Fig. 45.



Ainsi la circonférence est le lieu géométrique des points situés à une distance du centre égale au rayon (566).

Deux cercles de même rayon sont égaux, et leurs circonférences sont égales.

629. L'*arc* est une partie BmC de la circonférence.

La *corde* ou *sous-tendante* d'un arc est la droite BC qui joint les extrémités de l'arc.

Toute corde BD qui passe par le centre est un *diamètre*.

Tout diamètre est double du rayon. Comme les rayons d'un même cercle sont égaux entre eux, il en résulte aussi que tous les diamètres sont égaux.

Toute corde BC qui ne passe pas par le centre est moindre que le diamètre.

630. Tout angle AOD dont le sommet est au centre du cercle s'appelle *angle au centre*.

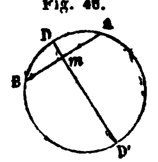
631. *Un angle au centre et un arc sont correspondants l'un à l'autre*, lorsque l'angle a pour côtés les rayons menés aux extrémités de l'arc. Tels sont l'angle AOD et l'arc AD.

632. La partie BmC de cercle comprise entre un arc et sa corde BC se nomme *segment circulaire*. Cette corde est la *base du segment*.

633. La partie AOD de cercle comprise entre un arc AD et les rayons OA, OD menés à ses extrémités s'appelle *secteur circulaire*. L'arc AD est la *base du secteur*; le centre du cercle en est le *sommet*.

634. La plus grande corde que l'on peut mener par le point *m*, pris dans l'intérieur du cercle, est le diamètre DD′ qui passe par ce point; et la plus petite est la corde AB perpendiculaire au diamètre DD′.

Fig. 46.



635. Tout diamètre DD′, perpendiculaire à une corde AB, divise cette corde et chacun des arcs sous-tendus en deux parties égales : $mA = mB$, $DA = DB$ et $D'A = D'B$.

636. Dans un même cercle ou dans deux cercles égaux :

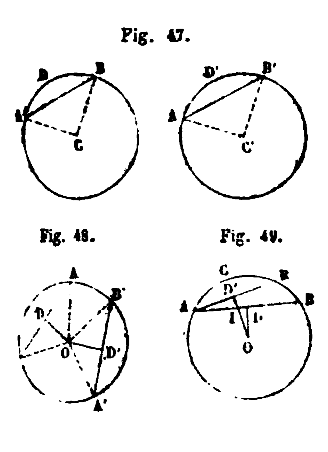


Fig. 47.

Fig. 48. Fig. 49.

1° Deux arcs égaux ADB, A'D'B' sont sous-tendus par des cordes égales AB, A'B', et réciproquement.

2° De deux arcs, le plus grand est sous-entendu par la plus grande corde, et réciproquement.

3° Deux cordes égales AB, A'B' sont également distantes du centre, OD = OD' (*fig.* 48), et réciproquement.

4° De deux cordes AB, AB' (*fig.* 49), la plus grande AB est la moins éloignée du centre, OD < OD', et réciproquement.

5° A des arcs égaux ADB, A'D'B', (*fig.* 47) correspondent des angles au centre C et C' égaux, et réciproquement.

6° A un plus grand arc correspond un plus grand angle au centre, et réciproquement.

7° Deux cordes égales AB et A'B' (*fig.* 47) sont les bases de segments égaux, et réciproquement.

8° Deux arcs égaux ADB et A'D'B' (*fig.* 47) sont les bases de secteurs égaux, et réciproquement.

637. *Une droite* BC *est inscrite dans un cercle* (*fig.* 48) *lorsqu'elle a ses extrémités sur la circonférence.*

638. L'angle CBD formé par deux cordes qui se rencontrent sur la circonférence s'appelle *angle inscrit* (*fig.* 48).

639. *Un angle est inscrit dans un segment* lorsqu'il a pour côtés les droites menées d'un point de l'arc du segment à ses extrémités.

640. *Un segment est capable d'un certain angle* lorsque tout angle inscrit dans le segment est égal à l'angle proposé (654).

641. *Un polygone inscrit* est celui dont tous les côtés sont inscrits dans le cercle (*fig.* 59). On dit alors que *le cercle est circonscrit au polygone.*

642. Lorsqu'une droite coupe une circonférence en deux points, elle prend le nom de *sécante.*

643. *Une ligne droite* AB *et une circonférence* O *sont tangentes* lorsqu'elles ont un seul point commun *m*. On peut considérer la tangente comme la position limite d'une sécante dont les deux points d'intersection se sont rapprochés de plus en plus jusqu'à se confondre.

Fig. 50.

La perpendiculaire AB menée à l'extrémité du rayon O*m* est tangente à la circonférence.

On dit également que la droite AB et le cercle O sont tangents.

644. *Deux circonférences* O *et* O′ *sont tangentes* lorsqu'elles ont un seul point commun *m*. *Elles sont tangentes extérieurement* ou *intérieurement* selon qu'elles sont extérieures ou intérieures l'une à l'autre. On dit également que les deux cercles O et O′ sont tangents.

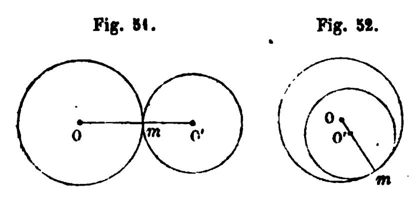


Fig. 51. Fig. 52.

Deux circonférences tangentes en un même point à une même droite sont tangentes entre elles.

Le point commun à une tangente et à la circonférence (*fig.* 50), ou à deux circonférences tangentes (*fig.* 51 et 52), s'appelle *point de contact.*

645. Deux parallèles interceptent sur la circonférence des arcs égaux; cela est vrai quand les parallèles sont deux cordes AB, CD, ou deux tangentes EF, GH, ou encore une corde et une tangente AB, EF.

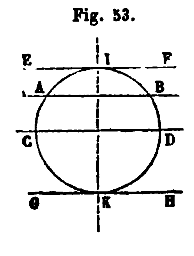


Fig. 53.

Réciproquement, deux cordes, deux tangentes ou une corde et une tangente qui interceptent des arcs égaux sont parallèles.

646. *Un polygone est circonscrit à un cercle* lorsque chacun de ses côtés est tangent à la circonférence en un point situé entre ses extrémités (*fig.* 60). On dit alors que *le cercle est inscrit dans le polygone.*

647. *Une droite est normale ou oblique à une circonférence ou à un arc qu'elle rencontre en un point*, selon qu'elle est perpendiculaire ou oblique à la tangente menée en ce point à la circonférence ou à l'arc (643).

648. *Deux cercles ou deux circonférences sont concentriques* lorsqu'ils ont même centre.

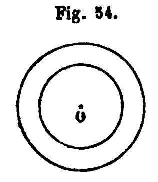


Fig. 54.

649. Lorsque deux cercles non concentriques sont dans un même plan, la droite indéfinie menée par les centres des deux cercles se nomme *ligne des centres.*

650. On peut toujours trouver un point également distant de trois autres non en ligne droite, et situé dans le plan de ces derniers. Ce point est le centre de la circonférence qui passe par les trois points donnés (Voir *Problèmes*).

Par trois points non en ligne droite on peut toujours faire passer une circonférence; mais on n'en peut faire passer qu'une.

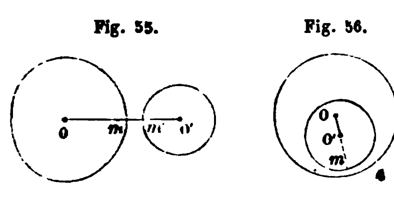
Deux circonférences ne peuvent se couper en plus de deux points.

651. Lorsque deux circonférences sont tangentes extérieurement (*fig.* 51), la distance des centres est égale à la somme des rayons. Si les circonférences sont tangentes intérieurement (*fig.* 52), la distance des centres est égale à la différence des rayons.

La ligne des centres passe par le point de contact.

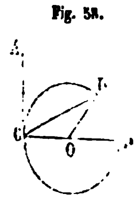
682. Lorsque deux circonférences n'ont aucun point commun, la distance des centres est plus grande que la somme des rayons ou moindre que leur différence, selon que les circonférences sont extérieures ou intérieures l'une à l'autre.

Fig. 55. Fig. 56.



683. Lorsque deux circonférences se coupent, c'est-à-dire sont *sécantes*, la ligne des centres est perpendiculaire sur le milieu de la droite mp qui joint les points communs, et la distance des centres est plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence : on a $OO' < Om + O'm$ et $OO' > Om - O'm$ (602).

Fig. 57.



Réciproquement, quand la distance des centres est moindre que la somme des rayons et plus grande que leur différence, les circonférences se coupent.

Lorsque deux circonférences ont un point commun m hors de la ligne des centres, elles se coupent en un second point p situé de l'autre côté de la ligne des centres, sur la perpendiculaire à cette ligne et à la même distance que le premier.

684. Tout angle inscrit BCD est la moitié de l'angle au centre BOD correspondant à l'arc BD compris entre ses côtés.

Fig. 58.

Tous les angles inscrits dans un même segment sont égaux.

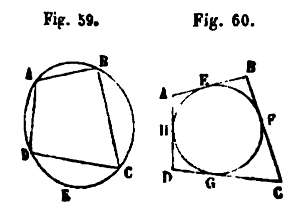
Tout angle CBD inscrit dans un demi-cercle est un angle droit.

La circonférence décrite sur une droite comme diamètre est le lieu géométrique des sommets de tous les angles droits dont les côtés passent aux extrémités de la droite (566).

Tout angle ACB formé par une tangente AC et une corde CB est moitié de l'angle au centre COB correspondant à l'arc BC compris entre ses côtés; il est par conséquent égal à tout angle inscrit dans le segment CDB qui a la corde CB pour base.

685. Dans tout quadrilatère inscrit les angles opposés sont supplémentaires, $A + C = B + D = 2$ droits, et réciproquement.

Fig. 59. Fig. 60.



686. Dans tout quadrilatère circonscrit la somme $AB + DC$ de deux côtés opposés est égale à la somme $AD + BC$ des deux autres, et réciproquement.

687. Les trois bissectrices des angles d'un triangle se coupent en un même point O, qui est le centre du cercle inscrit dans le triangle (*fig.* 61).

Les trois bissectrices des angles extérieurs du triangle (*fig.* 62) se rencontrent deux à deux sur chacune des bissectrices des angles intérieurs, et ces points de concours sont les centres de trois cercles tangents chacun à un côté du triangle et aux prolongements des deux autres. Ces cercles sont dits *exinscrits* au triangle.

Fig. 61.

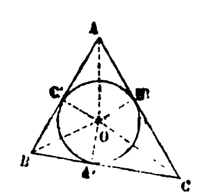
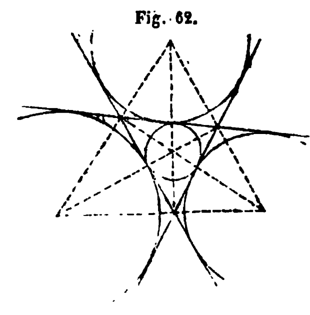


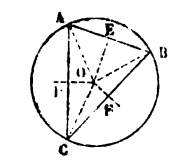
Fig. 62.



638. Les trois perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés d'un triangle se coupent en un même point O, qui est le centre du cercle circonscrit (*fig.* 63).

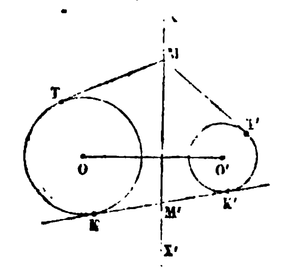
639. Les trois *médianes*, c'est-à-dire les trois droites qui joignent les sommets d'un triangle aux milieux des côtés opposés se rencontrent en un même point, qui est le *centre de gravité* du triangle (Voir *Mécanique*).

Fig. 63.



640. On nomme *axe radical* de deux circonférences (*fig.* 64), le lieu géométrique XX', tel que de l'un quelconque M de ses points menant deux tangentes MT, MT' aux circonférences, ces tangentes sont égales. XX' étant une ligne droite perpendiculaire à la ligne des centres OO', menant une tangente commune extérieure aux deux circonférences (Voir *Problèmes*), déterminant le milieu M' de la partie comprise entre les points de contact K, K', ce milieu appartient à l'axe radical, qu'on trace alors en menant par M' une perpendiculaire à OO'.

Fig. 64.



Si les deux circonférences sont tangentes intérieurement ou extérieurement, l'axe radical est la tangente commune menée au point de contact, et si les deux circonférences se coupent, l'axe radical est la corde commune prolongée indéfiniment dans les deux sens.

LIVRE IV.

Les polygones semblables et la mesure des angles.

---

661. *Deux longueurs sont dites proportionnelles à deux autres longueurs* lorsque leur rapport est égal à celui des deux autres (298).

Les longueurs ayant été mesurées au moyen de la même unité, on peut substituer, dans les rapports, aux lignes elles-mêmes les nombres qui les mesurent, et effectuer sur ces nombres les opérations de l'arithmétique.

662. *Diviser une droite en moyenne et extrême raison*, c'est la diviser en deux parties, dont la plus grande soit moyenne proportionnelle entre la ligne entière et l'autre partie (302, 316 et Problèmes).

663. Des parallèles AA′ BB′ CC′ ... interceptent sur deux sécantes PQ, RS des segments proportionnels. Ainsi l'on a

Fig. 65.

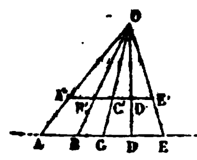
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} \cdots$$

Ces rapports sont aussi égaux à celui $\frac{AE}{A'E'}$ d'un segment quelconque AE au segment correspondant A′E′.

Si les segments d'une sécante sont égaux entre eux, AB = BC = CD ..., ceux de l'autre sécante sont aussi égaux entre eux, A′B′ = B′C′ = C′D′ ...

664. Toutes les lignes OA, OB, OC ... concourant au même point O coupent deux parallèles AE, A′E′ en segments proportionnels. Ainsi l'on a

Fig. 66.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} \cdots$$

et ces rapports sont aussi égaux à celui $\frac{AD}{A'D'}$ d'un segment quelconque AD au segment correspondant A′D′.

665. Deux polygones ABCDE, A'B'C'D'E' sont *semblables* lorsqu'ils ont les angles égaux chacun à chacun ($A = A'$, $B = B'$, $C = C' \ldots$), et les côtés homologues proportionnels $\left(\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} \cdots\right)$, et que ces côtés et ces angles sont disposés dans le même ordre.

Fig. 67.

Dans deux polygones semblables, on nomme : 1° *angles homologues*, les angles égaux et de même rang, A et A', B et B'...; 2° *côtés homologues*, les côtés adjacents aux angles homologues, AB et A'B', BC et B'C'...; 3° *sommets homologues*, les sommets des angles homologues, A et A', B et B'...; 4° *diagonales homologues*, celles qui joignent des sommets homologues, AC et A'C'...; 5° *triangles homologues*, ceux qui ont des sommets homologues, ABC et A'B'C', ACD et A'C'D'.

Le rapport constant des côtés homologues de deux polygones semblables est le rapport de *similitude* des deux figures (673, 700).

666. Les droites Aa, Bb..., joignant les sommets homologues de deux polygones et en général de deux figures semblables, se rencontrent en un même point O, appelé *centre de similitude directe*. On a

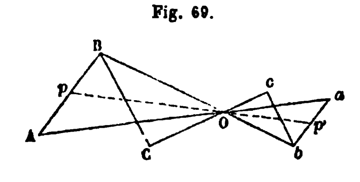
Fig. 68.

$$\frac{OA}{Oa} = \frac{OB}{Ob} \cdots = \frac{AB}{ab},$$

rapport de similitude.

Si les figures ont les angles égaux chacun à chacun et les côtés proportionnels, mais placés dans un ordre inverse, il y a encore un centre de similitude O; mais il est interne ou inverse au lieu d'être externe. On a encore

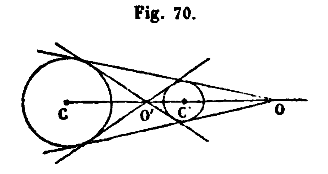
Fig. 69.



$$\frac{OA}{Oa} = \frac{OB}{Ob} = \frac{AB}{ab}.$$

Deux points p et p' de deux figures semblables, tels que la droite qui les joint concourt au centre de similitude, sont dits *points homologues*. Par extension, il en est de même dans le cas de la fig. 69.

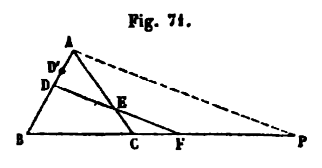
Fig. 70.



Deux circonférences C et C' ont deux centres de similitude O et O', l'un externe et l'autre interne, ce sont les points de concours des tangentes communes.

667. Toute *transversale* DE, qui rencontre les trois côtés d'un triangle ABC, détermine sur ces côtés six segments tels que le produit de trois segments non consécutifs est égal au produit des trois autres. Ainsi les segments consécutifs étant BD et DA, AE et EC, CF et FB, on a

Fig. 71.



$$BD \times AE \times CF = DA \times EC \times FB.$$

On dit dans ce cas que les six segments sont en *involution.*

La transversale peut rencontrer les prolongements des trois côtés du triangle.

Réciproquement, si trois points pris sur les côtés d'un triangle déterminent six segments en involution, ces trois points sont en ligne droite.

668. Si trois figures inégales mais semblables ont leurs dimensions homologues parallèles (*fig.* 72), les trois centres de similitude O, O', O″ sont en ligne droite, et cette droite prend le nom d'*axe de similitude directe.*

Fig. 72.

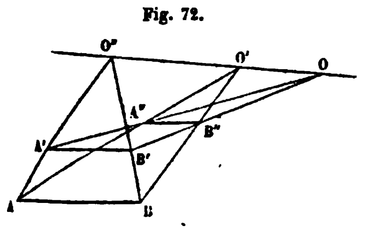
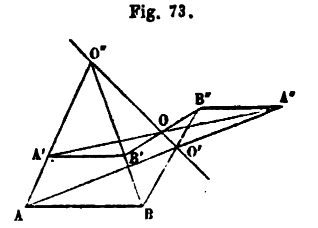
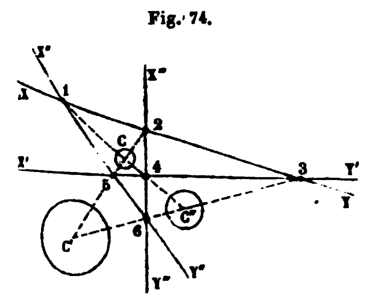


Fig. 73.



Si l'une des figures a ses dimensions situées dans un ordre inverse à celui des dimensions des deux autres (*fig.* 73), les trois centres de similitude sont encore en ligne droite; mais la similitude est inverse pour les deux centres O et O', et la droite O'OO″ est dite *axe de similitude inverse.*

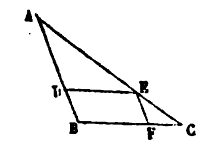
Fig. 74.



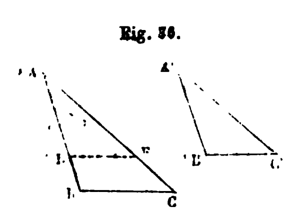
Trois circonférences ont en général six centres de similitude, situés trois à trois sur quatre axes de similitude (*fig.* 74).

669. Toute droite DE menée dans un triangle ABC, parallèlement à la base : 1° divise les côtés en parties proportionnelles, $\frac{AD}{AE} = \frac{DB}{EC} = \frac{AB}{AC}$, et réciproquement; 2° elle forme avec les côtés adjacents un triangle ADE semblable au premier ABC.

Fig. 75.



670. *Deux triangles* ABC, A'B'C' *sont semblables :*

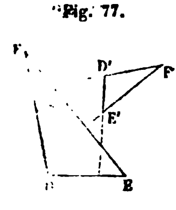

Fig. 76.

1° Quand ils ont les angles égaux chacun à chacun, $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$. L'égalité de deux angles entraînant l'égalité des troisièmes, il en résulte que deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun;

2° Lorsqu'ils ont les côtés proportionnels, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$;

3° Quand ils ont un angle égal compris entre côtés proportionnels, $A = A'$, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$;

4° Quand ils ont les côtés parallèles (*fig.* 76) ou perpendiculaires (*fig.* 77) chacun à chacun;


Fig. 77.

5° Quand, étant rectangles, ils ont l'hypoténuse et un côté de l'angle droit proportionnels.

Remarque 1re. Dans deux triangles semblables, les côtés homologues sont opposés aux angles égaux.

Remarque 2e. Dans deux triangles qui ont les côtés parallèles ou perpendiculaires chacun à chacun (4°), les côtés homologues sont parallèles ou perpendiculaires entre eux.

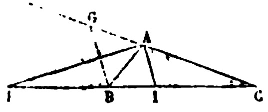
671. *Deux parallélogrammes sont semblables* lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés proportionnels.

672. *Deux polygones sont semblables* (*fig.* 67) lorsqu'ils sont décomposables en un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et situés de la même manière, et *réciproquement.*

673. Dans deux polygones semblables, les périmètres et les diagonales homologues sont proportionnels aux côtés homologues; ainsi l'on a (*fig.* 67)

$$\frac{AB + BC + CD + DE + EA}{A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'A'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}. \qquad (665, 700)$$

674. La bissectrice AI de l'angle au sommet A d'un triangle partage la base BC en deux segments proportionnels aux côtés adjacents, $\frac{BI}{CI} = \frac{AB}{AC}$, et réciproquement.


Fig. 78.

La bissectrice AI' de l'angle extérieur GAB détermine aussi sur le côté opposé des segments proportionnels aux côtés adjacents, $\frac{BI'}{CI'} = \frac{AB}{AC} = \frac{BI}{CI}$, et réciproquement.

De la proportion

$$\frac{BI'}{CI'} = \frac{BI}{CI} \qquad (a)$$

on tire, en égalant le produit des moyens à celui des extrêmes,

$$CI' \times BI = BI' \times CI.$$

Ce qui montre que le produit de la ligne entière CI' par le segment moyen BI est égal au produit des deux segments extrêmes BI' et CI.

La *proportion* (*a*) est dite *harmonique*; les points I', B, I, C forment un *système harmonique*; les points I, I' sont appelés *conjugués harmoniques*; la droite BC est partagée harmoniquement par ces deux points I, I'.

Comme, pour une même droite BC, la position des points I et I' dépend du rapport $\frac{AB}{AC}$, on voit qu'une droite BC peut être divisée harmoniquement d'une infinité de manières; mais le problème cesse d'être indéterminé dès qu'on donne AB et AC ou le rapport de ces lignes, puisque, construisant le triangle ABC, il suffit de mener les bissectrices AI et AI'.

675. Lorsque du sommet A de l'angle droit d'un triangle rectangle ABC on abaisse une perpendiculaire sur l'hypoténuse, les deux triangles ABD, ADC sont semblables entre eux et au triangle ABC. De plus : 1° chaque côté de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre l'hypoténuse entière et le segment adjacent à ce côté (302). Ainsi l'on a

Fig. 79.

$$BC : AB = AB : BD, \quad \text{et} \quad BC : AC = AC : CD;$$

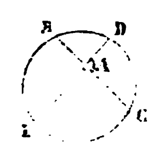
2° la perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les deux segments de l'hypoténuse,

$$BD : AD = AD : CD.$$

676. Lorsque d'un point A de la circonférence on abaisse une perpendiculaire sur un diamètre BC, et qu'on mène des cordes AB, AC aux extrémités de ce diamètre (*fig.* 79) : 1° chaque corde est moyenne proportionnelle entre le diamètre et le segment adjacent à cette corde; 2° la perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les deux segments du diamètre (Mêmes proportions qu'au numéro précédent).

677. Les parties de deux cordes BC, DE qui se coupent dans le cercle sont réciproquement proportionnelles (298) : on a

Fig. 80.



$$AB : AD = AE : AC;$$

d'où

$$AB \times AC = AD \times AE.$$

678. Lorsque d'un point pris hors d'un cercle on mène deux sécantes AB, AC qui se terminent à la circonférence, les sécantes entières sont réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures : on a

Fig. 81.

$$AB : AC = AD : AE;$$

d'où

$$AB \times AE = AC \times AD.$$

679. Lorsque d'un point A pris hors d'un cercle on mène une tangente AF et une sécante AB qui se terminent à la circonférence, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure :

$$AB : AF = AF : AE; \quad \text{d'où} \quad AB \times AE = \overline{AF}^2.$$

680. Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, deux angles au centre sont entre eux comme leurs arcs correspondants (631).

681. *Tout angle au centre a pour mesure l'arc correspondant.* Cela revient à dire que l'angle contient autant de fois l'unité d'angle, que l'arc correspondant contient l'unité d'arc. On a l'habitude de prendre l'arc d'un degré pour unité d'arc (221); l'unité d'angle est alors l'angle correspondant à l'arc d'un degré, ou simplement l'angle d'un degré; elle est la 360ᵉ partie de 4 angles droits. L'angle d'un degré se divise comme l'arc d'un degré en 60 parties égales appelées angles d'une minute, et l'angle d'une minute en 60 parties égales appelées angles d'une seconde.

682. Remarquons que quand on dit qu'un arc est de tant de degrés, on ne désigne pas la longueur de cet arc, mais seulement le nombre de fois que cet arc contient la 360ᵉ partie de la circonférence ayant pour rayon celui de l'arc. Ainsi des arcs d'un même nombre de degrés peuvent être très-inégaux. Au contraire, des angles d'un même nombre de degrés sont toujours égaux.

683. *L'angle inscrit a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés* (654, 681).

684. L'angle EAC (*fig.* 80), formé par deux droites AC, AE menées d'un point A pris dans l'intérieur du cercle à la circonférence, a pour mesure la demi-somme $\frac{EC + BD}{2}$ des arcs compris entre ses côtés et leurs prolongements.

685. L'angle formé par deux droites, tangentes ou sécantes, menées d'un point pris hors d'un cercle, a pour mesure la demi-différence des arcs compris entre ses côtés.

Ainsi (*fig.* 81), l'angle BAC a pour mesure $\frac{BC - ED}{2}$, et FAC a pour mesure $\frac{FC - FD}{2}$.

LIVRE V.

Mesure des polygones.

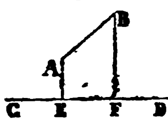
686. La *longueur d'une ligne* est la mesure de cette ligne, c'est-à-dire le rapport de son étendue à celle de l'unité linéaire (214, 292).

687. L'*aire d'une surface* est la mesure de cette surface, c'est-à-dire le rapport de son étendue à celle de l'unité de superficie.

688. Le *produit de deux lignes* est le produit de leurs longueurs.

689. La *projection d'un point* A *sur une droite* CD est le pied E de la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite CD.

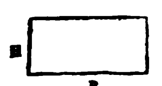
Fig. 82.



La *projection d'une droite* AB *sur une autre* CD est la partie EF de celle-ci, comprise entre les projections des extrémités de la première sur la seconde.

690. *L'aire d'un rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur :*

Fig. 83.



$$S = B \times H.$$

Cette expression de l'aire S indique que la surface contient autant de fois l'unité de surface ayant pour côté l'unité de longueur qui a servi à exprimer les longueurs de B et de H, que le produit $B \times H$ contient d'unités. Ayant $B = 3^{m},5$ et $H = 2^{m},15$, on a

$$S = 3,5 \times 2,15 = 7^{mq},525. \qquad (224)$$

691. Deux rectangles quelconques sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs. En effet, ayant $S = B \times H$ et $S' = B' \times H'$, de ces deux égalités on conclut bien

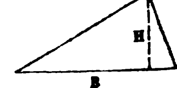
$$S : S' = B \times H : B' \times H'.$$

Deux rectangles ayant une même dimension sont entre eux comme leurs autres dimensions. Faisant, en effet, $B = B'$ dans la proportion précédente, elle devient

$$S : S' = H : H'.$$

692. *Un triangle a pour mesure* la moitié du produit de sa base par sa hauteur (604). Soient $B = 5^{m},25$ la base d'un triangle, $H = 2^{m},9$ sa hauteur; on a

Fig. 84.



$$S = \frac{B \times H}{2} = \frac{5,25 \times 2,9}{2} = 7^{mq},6125.$$

693. Deux triangles sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs :

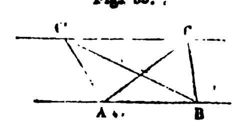
$$S : S' = B \times H : B' \times H'.$$

Deux triangles qui ont même base ou même hauteur sont entre eux comme leurs hauteurs ou leurs bases :

$$S : S' = H : H', \quad \text{ou} \quad S : S' = B : B'.$$

694. Deux triangles ABC et ABC', qui ont même base et même hauteur, sont équivalents (553, 692).

Fig. 85.

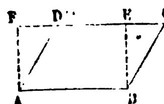


En faisant coïncider les bases, les sommets sont sur une même parallèle CC' à la base commune AB.

695. *L'aire d'un parallélogramme est égale* au produit de sa base par sa hauteur (606). Ayant B = 5m,25 et H = 2m,9, on a

Fig. 86.

$$S = B \times H = 5,25 \times 2,9 = 15^{mq},225.$$



On voit que l'aire du parallélogramme est double de celle du triangle de même base et de même hauteur (692), et égale à celle du rectangle de même base et de même hauteur (690).

Comme pour le rectangle (691), deux parallélogrammes sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs, et deux parallélogrammes de même base ou de même hauteur sont entre eux comme leurs hauteurs ou leurs bases.

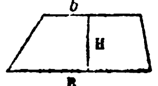
696. Un parallélogramme ABCD est équivalent à tout parallélogramme et au rectangle ABEF de même base et de même hauteur.

Fig. 87.

En faisant coïncider leurs bases, les côtés opposés sont sur une même parallèle à la base commune AB.

697. *L'aire d'un trapèze est égale* au produit de la demi-somme de ses bases par sa hauteur (607). B = 2m,4 et b = 1m,3, étant les bases, et H = 1m,5, la hauteur d'un trapèze, son aire est

Fig. 88.



$$S = \frac{B + b}{2} \times H = \frac{2,4 + 1,3}{2} \times 1,5 = 2^{mq},775.$$

Un trapèze a aussi pour mesure le produit de la droite qui joint les milieux des côtés non parallèles par la hauteur (625).

698. *Tout polygone circonscrit à un cercle a pour mesure* la moitié du produit de son périmètre par le rayon du cercle inscrit (646).

699. Deux triangles ABC et AB'C' qui ont un angle égal sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent cet angle. Ainsi S et s étant les aires de ces triangles, on a

Fig. 89.

$$S : s = AB \times AC : AB' \times AC'.$$

700. Deux triangles et en général deux polygones semblables sont entre eux comme les carrés des côtés ou des diagonales homologues.

Les polygones ABCDE et A'B'C'D'E' (*fig.* 67) étant semblables, S et s étant leurs aires, on a

Fig. 90.

$$S : s = \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2 = \overline{AC}^2 : \overline{A'C'}^2. \quad (673)$$

701. *Le carré fait sur la somme* AC *de deux droites* AB *et* BC *contient le carré fait sur la première, plus le carré fait sur la seconde, plus deux fois le rectangle compris sous les deux droites.* Ainsi l'on a (439)

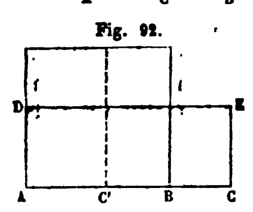
$$\overline{AC}^2 \text{ ou } \overline{(AB+BC)}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB \times BC.$$

Fig. 91.

702. *Le carré fait sur la différence* AC *de deux droites* AB *et* BC *est équivalent au carré fait sur la première, plus le carré fait sur la seconde, moins deux fois le rectangle compris sous les deux lignes* (440) :

$$\overline{AC}^2 \text{ ou } \overline{(AB-BC)}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2AB \times BC.$$

Fig. 92.

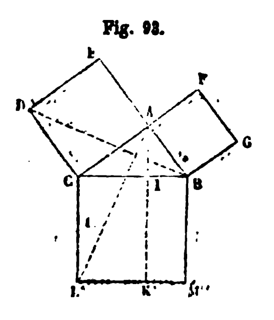


703. *Le rectangle* ACED *compris sous la somme* AC = AB + BC *et la différence* AD = AB — BC *de deux droites* AB *et* BC *est équivalent à la différence des carrés de ces droites* (444) :

$$(AB + BC)(AB - BC) = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2.$$

704. Le carré fait sur l'hypoténuse BC d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés faits sur les côtés AB et AC de l'angle droit. Le carré fait sur un des côtés de l'angle droit est égal au carré de l'hypoténuse moins le carré de l'autre côté. Ainsi l'on a

Fig. 93.



$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2, \text{ et } \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$$
$$\text{ou } \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2.$$

705. Le carré de la diagonale du carré est égal à deux fois le carré du côté; d'où il résulte que le rapport de la diagonale au côté du carré est égal à $\sqrt{2}$.

706. La perpendiculaire AI, abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle, divise cette hypoténuse en deux segments qui sont entre eux comme les carrés faits sur les côtés adjacents à l'angle droit. On a (*fig.* 93).

$$BI : IC = \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2.$$

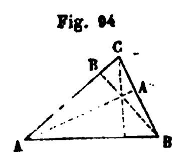


Fig. 94

707. Dans tout triangle ABC, les produits $AB \times AC'$ et $AC \times AB'$, de deux côtés AB et AC par les projections mutuelles de l'un sur l'autre, sont égaux. On a de même

$$BC \times BA' = AB \times BC' \text{ et } AC \times CB' = BC \times CA'.$$

708. Dans tout triangle obtusangle ABC, le carré fait sur le côté BC, opposé à l'angle obtus CAB, est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, plus deux fois le rectangle compris sous l'un de ces côtés et la projection de l'autre sur le premier. On a

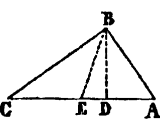


Fig. 95.

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2AC \times AD.$$

709. Dans tout triangle ABC, le carré fait sur le côté BC, opposé à un angle aigu A, est égal à la somme $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ des carrés faits sur les deux autres côtés, moins deux fois le rectangle $AC \times AD$ compris sous l'un de ces côtés et la projection de l'autre sur le premier :

Fig. 96. (B; C E D A)

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AC \times AD.$$

710. Dans tout triangle :

1° La somme $\overline{BC}^2 + \overline{BA}^2$, des carrés des deux côtés adjacents au sommet, est égale à deux fois le carré de la droite BE menée du sommet au milieu de la base, plus deux fois le carré de la moitié CE de la base :

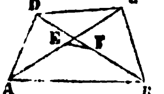
$$\overline{BC}^2 + \overline{BA}^2 = 2\overline{BE}^2 + 2\overline{CE}^2;$$

2° La différence des carrés de ces côtés est égale à deux fois le rectangle compris sous la base et la distance du milieu de cette base au pied de la hauteur :

$$\overline{BC}^2 - \overline{BA}^2 = 2AC \times DE.$$

711. Dans tout quadrilatère ABCD, la somme des carrés des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales, plus quatre fois le carré de la droite qui joint les milieux E et F des diagonales :

Fig. 97.



$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{EF}^2.$$

712. Dans tout trapèze, la somme des carrés des deux côtés non parallèles est égale à la somme des carrés des diagonales, moins deux fois le rectangle des bases. La figure 44 donne

$$\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 - 2AB \times DC.$$

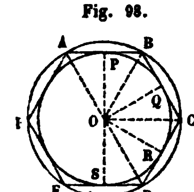
713. Dans tout parallélogramme, la somme des carrés des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales, et réciproquement.

LIVRE VI.

Les polygones réguliers et la mesure du cercle.

714. Un *polygone régulier* ABCDEF est un polygone à la fois équiangle et équilatéral (613, 614).

Fig. 98.



715. A tout polygone régulier on peut circonscrire un cercle, mais on n'en peut circonscrire qu'un (641).

716. Dans tout polygone régulier on peut inscrire un cercle, mais on n'en peut inscrire qu'un (646).

717. L'aire d'un polygone régulier est égale à la moitié du produit de son périmètre par son *apothème* OP, qui est le rayon du cercle inscrit (692).

718. Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables (665), et leurs aires sont entre elles comme les carrés des rayons ou des diamètres des cercles inscrits ou circonscrits (700).

719. Le *côté du carré circonscrit à un cercle* est égal au diamètre.

Le *côté* c *du carré inscrit est au rayon* R *comme* $\sqrt{2}:1$. Ainsi l'on a

$$c : R = \sqrt{2} : 1, \quad \text{d'où} \quad c = R\sqrt{2}.$$

Le *côté de l'hexagone régulier inscrit* est égal au rayon.

Le *côté* c *du triangle équilatéral inscrit* est au rayon R comme $\sqrt{3}:1$. Ainsi l'on a

$$c : R = \sqrt{3} : 1, \quad \text{d'où} \quad c = R\sqrt{3}.$$

Le *côté* C *du triangle équilatéral circonscrit* est double du côté du triangle équilatéral inscrit dans le même cercle. Ainsi l'on a

$$C = 2c = 2R\sqrt{3}.$$

Le *côté* C' *de l'hexagone régulier circonscrit* est le tiers du côté du triangle équilatéral circonscrit au même cercle. $C' = \frac{2}{3} R\sqrt{3}$.

Le *côté du décagone régulier inscrit* est égal au grand segment du rayon divisé en moyenne et extrême raison (597, 662).

Le *côté du pentédécagone régulier inscrit* est la corde qui sous-tend l'arc qui est la différence des arcs sous-tendus par les côtés de l'hexagone et du décagone réguliers inscrits.

La différence entre les arcs sous-tendus par les côtés du pentagone et de l'hexagone réguliers inscrits est sous-tendue par le *côté du polygone régulier inscrit de* 30 *côtés* (Voir *Problèmes*).

Côtés et apothèmes des polygones réguliers inscrits dans le cercle de rayon R.

	Côtés.	Apothèmes.
Triangle équilatéral. . .	$R\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}R$
Carré.	$R\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}R\sqrt{2}$
Pentagone.	$\frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}R(1+\sqrt{5})$
Hexagone.	R	$\frac{1}{2}R\sqrt{3}$
Octogone.	$R\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}R\sqrt{2+\sqrt{2}}$
Décagone.	$\frac{1}{2}R(\sqrt{5}-1)$	$\frac{1}{4}R\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
Dodécagone.	$R\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}R\sqrt{2+\sqrt{3}}$
	ou $\frac{1}{2}R(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	ou $\frac{1}{4}R(\sqrt{2}+\sqrt{6})$
Pentédécagone.	côté $=\frac{1}{4}R\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)\right]$	

Rayons et apothèmes des polygones réguliers de côté c.

	Rayons.	Apothèmes.
Triangle équilatéral. . .	$\frac{1}{3}c\sqrt{3}$	$\frac{1}{6}c\sqrt{3}$
Carré.	$\frac{1}{2}c\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}c$
Pentagone.	$\frac{1}{10}c\sqrt{50+10\sqrt{5}}$	$\frac{1}{10}c\sqrt{25+10\sqrt{5}}$
Hexagone.	c	$\frac{1}{2}c\sqrt{3}$
Octogone.	$\frac{1}{2}c\sqrt{4+2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}c(1+\sqrt{2})$
Décagone.	$\frac{1}{2}c(1+\sqrt{5})$	$\frac{1}{2}c\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
Dodécagone.	$c\sqrt{2+\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}c(2+\sqrt{3})$
	ou $\frac{1}{2}c(\sqrt{2}+\sqrt{6})$	

Surfaces des polygones réguliers

	inscrits dans le cercle de rayon R.	de côté c.
Triangle équilatéral. . .	$\frac{3}{4} R^2\sqrt{3}$	$\frac{1}{4} c^2\sqrt{3}$
Carré.	$2R^2$	c^2
Pentagone.	$\frac{5}{8} R^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4} c^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$
Hexagone.	$\frac{3}{2} R^2\sqrt{3}$	$\frac{3}{2} c^2\sqrt{3}$
Octogone.	$2R^2\sqrt{2}$	$2c^2(1+\sqrt{2})$
Décagone.	$\frac{5}{4} R^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{5}{2} c^2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
Dodécagone.	$3R^2$	$3c^2(2+\sqrt{3})$

On a :

$\sqrt{2} = 1,414\,213\,562\,3\ldots$ | $\text{Log}\,2 = 0,301\,030\,0$

$\sqrt{3} = 1,732\,050\,807\,5\ldots$ | $\text{Log}\,3 = 0,477\,121\,3$

$\sqrt{5} = 2,236\,067\,977\,4\ldots$ | $\text{Log}\,5 = 0,698\,970\,0$

Tableau : 1° Des valeurs du rayon, de l'apothème et de la surface d'un polygone régulier, le côté étant pris pour unité ;

2° Des valeurs du côté d'un polygone régulier, selon qu'on prend pour unité, le rayon, l'apothème ou la surface du polygone.

NOMBRE des côtés du polygone.	1° Le côté c étant 1. Rayon.	Apothème.	Surface.	2° Valeur du côté c pour Rayon = 1.	Apothème = 1	Surface = 1.
3	0,577350	0,288675	0,433013	1,732050	3,464101	1,519671
4	0,707107	0,500000	1,000000	1,414214	2,000000	1,000000
5	0,850651	0,688191	1,720477	1,175570	1,453085	0,762387
6	1,000000	0,866025	2,598076	1,000000	1,154701	0,620403
7	1,152382	1,038261	3,633912	0,867767	0,963149	0,524581
8	1,306563	1,207107	4,828427	0,765367	0,828427	0,455090
9	1,461902	1,373739	6,181824	0,684040	0,727940	0,402200
10	1,618034	1,538842	7,694207	0,618034	0,649839	0,360511
11	1,774732	1,702844	9,365640	0,563465	0,587253	0,326762
12	1,931852	1,866025	11,196150	0,517638	0,535898	0,298858
15	2,404867	2,352315	17,642360	0,415823	0,425113	0,238079
18	2,879385	2,835641	25,520770	0,347296	0,352654	0,197949
20	3,196227	3,156876	31,568760	0,312869	0,316769	0,177980

Pour un même nombre de côtés, les côtés, les rayons et les apothèmes varient dans le même rapport, et les surfaces varient comme les carrés de ces longueurs (673 et 700).

Application. Construire un réservoir prismatique de $36^{mc},75$ de capacité, de $3^{m},00$ de profondeur, et dont la base soit un octogone régulier.

La surface de la base est $\frac{36,75}{3} = 12^{mq},25$.

On a alors (2° du tableau)

$$c^2 : 0,455\,09^2 = 12,25 : 1\,;$$

d'où

$$c = 0,455\,09\sqrt{12,25} = 0,455\,09 \times 3,5 = 1^{m},592\,815.$$

On a ensuite (1° du tableau)

$$R : 1,306\,563 = 1,592\,815 : 1;$$

d'où

$$R = 1,306\,563 \times 1,592\,815 = 2^{m},081.$$

On décrira alors un cercle de $2^{m},081$ de rayon, on y inscrira 8 fois la corde $1^{m},593$, et on aura l'octogone régulier qui doit servir de base à l'intérieur du réservoir.

720. Ayant un polygone régulier inscrit, pour inscrire un polygone régulier de deux fois plus de côtés, il suffit de joindre les sommets du premier aux milieux des arcs sous-tendus par ses côtés.

Ayant un polygone régulier inscrit d'un nombre pair de côtés, pour inscrire un polygone régulier de deux fois moins de côtés, on joint de deux en deux les sommets du polygone proposé.

721. p et P étant les périmètres de deux polygones réguliers semblables, l'un inscrit et l'autre circonscrit à un même cercle, désignant par p' et P' les périmètres des polygones réguliers inscrit et circonscrit d'un nombre double de côtés, on a

$$P' = \frac{2Pp}{P+p}, \quad \text{et} \quad p' = \sqrt{P'p} = \sqrt{\frac{2Pp^2}{P+p}}.$$

722. La circonférence est plus grande que le contour de tout polygone inscrit, et moindre que celui de tout polygone circonscrit. Elle est la limite vers laquelle tendent les périmètres des polygones réguliers inscrits et circonscrits à mesure que leurs côtés deviennent plus petits, c'est-à-dire que le nombre de ces côtés devient plus grand (558).

723. Deux cercles sont toujours semblables. Leurs circonférences C et c sont entre elles comme leurs rayons R, r ou comme leurs diamètres D, d, et leurs surfaces S, s comme les carrés de ces mêmes lignes (700).

$$\frac{C}{c} = \frac{R}{r} = \frac{D}{d}, \quad \text{et} \quad \frac{S}{s} = \frac{R^2}{r^2} = \frac{D^2}{d^2}.$$

724. Dans deux cercles différents, on nomme *arcs semblables*, *secteurs semblables*, *segments semblables*, ceux qui correspondent à des angles au centre égaux.

725. Les arcs semblables sont entre eux comme leurs rayons, comme leurs diamètres, ou encore comme les cordes qui les sous-tendent.

Les secteurs et les segments semblables sont entre eux comme les carrés de leurs rayons ou de leurs diamètres, ou encore des arcs qui leur servent de bases ou des cordes qui sous-tendent ces arcs.

726. *Le rapport de la circonférence* C *à son diamètre* D est un nombre constant et incommensurable. On a l'habitude de le représenter par π, ce qui donne pour une circonférence quelconque

$$\pi = \frac{C}{D} = 3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643...$$

Dans la pratique on se contente ordinairement de faire

$$\pi = 3{,}141\,5926 \quad \text{ou} \quad 3{,}1416 \quad \text{ou même} \quad 3{,}14.$$

Archimède a fait voir que $\frac{22}{7} = 3{,}142\,8571...$ est la valeur de π à moins de $0{,}001\,2645...$ par excès, c'est-à-dire à moins de $\frac{1}{790}$.

Métius, mathématicien hollandais, a montré que $\frac{355}{113}$ était la valeur de π approchée par excès, à moins de $0{,}000\,001$.

C'est après Métius, que Snellius, autre mathématicien hollandais, a donné la valeur de π calculée jusqu'à la 12e décimale.

Ce mathématicien est parti des périmètres des carrés inscrits et circonscrits au cercle ayant l'unité pour rayon; puis, à l'aide des formules du n° 721, il a successivement calculé les périmètres des polygones réguliers inscrits et circonscrits de 8, 16, 32..... côtés, et il a continué jusqu'à ce que les deux dernières valeurs trouvées divisées par le diamètre 2 lui ont donné le même nombre jusqu'à la 12e décimale, puis d'autres chiffres différents. La circonférence étant comprise entre les périmètres des deux polygones réguliers inscrits et circonscrits qui ont fourni ces valeurs, il en résulte que la partie commune de ces valeurs est bien la valeur approchée de π à moins d'une unité décimale du 12e ordre.

Archimède était parti des hexagones réguliers inscrits et circonscrits pour calculer la valeur $\frac{22}{7}$.

Table des valeurs les plus approchées, à moins d'une unité décimale du 7e ordre, des 9 premiers multiples de π, π^2, π^3, $\sqrt{\pi}$, $\sqrt[3]{\pi}$, $\frac{1}{\pi}$, $\frac{1}{\pi^2}$, $\frac{1}{\pi^3}$, $\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ *et* $\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$, *qu'on rencontre fréquemment dans les formules.*

	π		π^2		π^3		$\sqrt{\pi}$		$\sqrt[3]{\pi}$
1	3,141 5927	1	9,869 6044	1	31,006 2767	1	1,772 4539	1	1,464 5919
2	6,283 1853	2	19,739 2088	2	62,012 5534	2	3,544 9077	2	2,929 1838
3	9,424 7780	3	29,608 8132	3	93,018 8300	3	5,317 3616	3	4,393 7756
4	12,566 3706	4	39,478 4176	4	124,025 1067	4	7,089 8154	4	5,858 3675
5	15,707 9633	5	49,348 0220	5	155,031 3834	5	8,862 2693	5	7,322 9594
6	18,849 5559	6	59,217 6264	6	186,037 6601	6	10,634 7231	6	8,787 5513
7	21,991 1486	7	69,087 2308	7	217,043 9368	7	12,407 1770	7	10,252 1432
8	25,132 7412	8	78,956 8352	8	248,050 2134	8	14,179 6308	8	11,716 7351
9	28,274 3339	9	88,826 4396	9	279,056 4901	9	15,952 0847	9	13,181 3269

	$\frac{1}{\pi}$		$\frac{1}{\pi^2}$		$\frac{1}{\pi^3}$		$\sqrt{\frac{1}{\pi}}$		$\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$
1	0,318 3099	1	0,101 3210	1	0,032 2515	1	0,564 1896	1	0,682 7841
2	0,636 6198	2	0,202 6420	2	0,064 5030	2	1,128 3792	2	1,365 5681
3	0,954 9297	3	0,303 9631	3	0,096 7545	3	1,692 5688	3	2,048 3522
4	1,273 2395	4	0,405 2841	4	0,129 0060	4	2,256 7583	4	2,731 1363
5	1,591 5494	5	0,506 6051	5	0,161 2575	5	2,820 9479	5	3,413 9203
6	1,909 8593	6	0,607 9261	6	0,193 5090	6	3,385 1375	6	4,096 7044
7	2,228 1692	7	0,709 2471	7	0,225 7605	7	3,949 3271	7	4,779 4885
8	2,546 4791	8	0,810 5682	8	0,258 0120	8	4,513 5167	8	5,462 2725
9	2,864 7890	9	0,911 8892	9	0,290 2685	9	5,077 3063	9	6,145 0566

$\log \pi = 0{,}4971499$, $\log \pi^2 = 0{,}9942997$, $\log \pi^3 = 1{,}4914496$, $\log \sqrt{\pi} = 0{,}2485749$,
$\log \sqrt[3]{\pi} = 0{,}1657166$, $\log \frac{1}{\pi} = \bar{1}{,}5028501$, $\log \frac{1}{\pi^2} = \bar{1}{,}0057003$, $\log \frac{1}{\pi^3} = \bar{2}{,}5085504$,

$\log \sqrt{\frac{1}{\pi}} = \bar{1}{,}7514251$, $\log \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} = \bar{1}{,}8342834$.

727. *Expression de la longueur* C *de la circonférence en fonction de son diamètre* D *ou de son rayon* R. Ayant (726)

$$\pi = \frac{C}{D},$$

on en conclut

$$C = \pi D \quad \text{ou} \quad C = 2\pi R;$$

d'où l'on tire

$$D = \frac{C}{\pi} \quad \text{et} \quad R = \frac{C}{2\pi}.$$

Selon que D = 1 ou R = 1, on a

$$C = \pi \quad \text{ou} \quad C = 2\pi.$$

728. *L'aire S du cercle est égale au produit de sa circonférence par la moitié de son rayon.* Ce qui équivaut à l'aire d'un triangle qui aurait une base égale à la longueur de la circonférence et une hauteur égale au rayon (692) :

$$S = \pi D \times \frac{D}{4} = \frac{\pi D^2}{4} \quad \text{ou} \quad S = 2\pi R \times \frac{R}{2} = \pi R^2;$$

d'où l'on tire

$$D = 2\sqrt{\frac{S}{\pi}} \quad \text{et} \quad R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}. \qquad (a)$$

Selon que $D = 1$ ou $R = 1$, il vient

$$S = \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad S = \pi.$$

Remplaçant dans la formule (a) R par sa valeur en fonction de C (727), on a, pour la relation entre la circonférence et la surface d'un cercle

$$C^2 = 4\pi S.$$

729. PROBLÈMES. Calculer :

1° *La longueur* C *d'une circonférence dont le rayon est* $1^m,30$.

On a (727) $\quad C = 2\pi R = 2 \times 3,1416 \times 1,30 = 8^m,168.$

2° *La surface* S *d'un cercle dont le rayon est* $1^m,30$.

Ayant calculé la longueur de la circonférence, il suffirait de la multiplier par la moitié du rayon. Dans le cas contraire on pose (728)

$$S = \pi R^2 = 3,1416 \times 1,3 \times 1,3 = 5^{mq},309.$$

3° *Le rayon d'un cercle de* $5^{mq},309$ *de surface.*

On a (726 et 728) $\quad R = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \times \sqrt{S} = 0,5642\ \sqrt{5,309} = 1^m,30.$

730. *Résolution des problèmes précédents en faisant usage de la table du* n° 291, qui contient les longueurs des circonférences et les surfaces des cercles de diamètres entiers de 1 à 1000.

1° *Étant donné le rayon* R *ou le diamètre* D, *calculer la longueur* C *de la circonférence et la surface* S *du cercle.*

Convertissant le diamètre donné en unités d'un ordre tel que la partie entière approche le plus de la limite 1000 de la table sans la surpasser, si la nouvelle partie décimale est nulle, la table donne directement la longueur de la circonférence en unités de l'ordre adopté, à moins d'un centième d'une de ces unités, et la surface du cercle à moins d'une unité de surface ayant pour côté une de ces unités. La table donne même ces surfaces avec deux décimales pour des diamètres qui ne dépassent pas 160.

1er *exemple*. Pour $D = 2^m,50$, convertissant en centimètres, il vient $D = 250$ centimètres, et 250 étant moindre que 1000, la table donne :

$$C = 785^{cm},40 = 7^m,854, \quad \text{et} \quad S = 49\,087^{cmq} = 4^{mq},90\,87.$$

2e *exemple*. Pour $D = 2\,520$ mètres, convertissant en décamètres, il vient $D = 252$ décamètres, et la table donne :

$C = 791,68$ *décamètres*, ou $7\,916^m,8$;
$S = 49\,876$ *décam. carrés*, ou $4\,987\,600^{mq}$.

3e *exemple*. Pour $d = 0^m,0252$, la table donne de même

$C = 791,68$ *dix-millimètres*, ou $0^m,079\,168$;
$S = 49\,876$ *dix-millimètres carrés*, ou $0^{mq},000\,498\,76$.

4e *exemple*. Pour $D = 2^m,5243$, convertissant en centimètres, on a $D = 252^{cm},43$. La nouvelle partie décimale n'étant pas nulle, la table ne contient pas les valeurs de C et S; mais les valeurs $C = 791^{cm},68 = 7^m,9168$ et $S = 49876^{cmq} = 4^{mq},9876$, qu'elle donne pour $D = 2^m,52$, pourront le plus souvent être adoptées dans la pratique comme suffisamment approchées de celles correspondant à $D = 2^m,5243$.

Si le diamètre était $2^m,5267$, on lui substituerait 253^{cm}, la partie négligée étant, dans ce cas, supérieure à un demi-centimètre.

On peut, du reste, avoir des valeurs plus approchées pour C et S en ayant recours aux différences proportionnelles, comme on l'a fait au n° 400 pour les logarithmes. Ainsi, pour un accroissement 1 de D, C augmentant de $794,82 - 791,68 = 3,14$ (cette augmentation est constante et égale à $\pi = 3,1415926\ldots$), pour l'accroissement 0,43 de D l'augmentation de C est $3,14 \times 0,43 = 1,35$, et l'on a pour $D = 2^m,5243$

$$C = 791,68 + 1,35 = 793^{cm},03 = 7^m,9303.$$

Le tableau des 9 premiers multiples de π (n° 726) permet de calculer facilement cet accroissement de C pour 0,43 :

	Pour $D = 252^{cm}$	$C = 791^{cm},68$
Augmentation pour	0 ,4	1 ,26
id.	0 ,03	0 ,09
	Pour $D = 252^{cm},43$	$C = 793^{cm},03 = 7^m,9303.$

De même, pour un accroissement 1 de D, S augmentant de $50\,273 - 49\,876 = 397$, pour 0,43 l'augmentation est $397 \times 0,43 = 171$, et l'on a pour $D = 252^{cm},43$

$$S = 49\,876 + 171 = 50\,047^{cmq} = 5^{mq},0047.$$

2° *Étant donnée la longueur* C *d'une circonférence ou la surface* S *d'un cercle, calculer le diamètre* D *ou le rayon* R.

1er *exemple*. Soit $C = 7^m,9303$. On exprime C en unités telles, que le nombre qui en résulte soit le plus grand possible, mais inférieur à

3141,59, qui est la limite supérieure de la table pour les circonférences, ce qui donne $C = 793^{cm},03$; on cherche ensuite dans la colonne des circonférences de la table celle 791,68 qui approche le plus de 793,03, et le diamètre $252^{cm} = 2^{m},52$, qui lui correspond, peut être pris pour la valeur cherchée, avec une erreur le plus souvent négligeable dans la pratique.

Si l'on veut une plus grande approximation, D augmentant de 1 pour une différence $794,82 - 791,68 = 3,14$ entre les valeurs de C, pour la différence $793,03 - 791,68 = 1,35$, D augmente de $1 \times \frac{1,35}{3,14} = 0,43$, et l'on a $D = 252^{cm},43 = 2^{m},5243$.

2° *exemple.* Soit $S = 5^{mq},0047$. Opérant comme pour la circonférence, on trouve d'abord pour $S = 49\,876^{cmq}$, $D = 252^{cm} = 2^{m},52$, qui est à moins de 1 centimètre le diamètre correspondant à $S = 5^{mq},0047$.

Pour avoir une plus grande approximation, puisque D augmente de 1 pour une différence $50\,273 - 49\,876 = 397$ entre les valeurs de S, pour la différence $50\,047 - 49\,876 = 171$, l'augmentation est $1 \times \frac{171}{397} = 0,43$, et l'on a $D = 252^{cm},43 = 2^{m},5243$.

731. Les circonférences étant entre elles comme leurs diamètres, et les cercles comme les carrés de leurs diamètres (723), il en résulte qu'ayant calculé, soit avec les formules, soit avec la table, la circonférence C ou le cercle S d'un diamètre D, pour avoir la circonférence c ou le cercle s d'un diamètre d, il suffit de poser

$$c = C\frac{d}{D}, \quad \text{ou} \quad s = S\frac{d^2}{D^2}.$$

Ainsi, selon qu'on a, par exemple :

$$d = 2D,\ 3D,\ 4D\ldots \quad \text{ou} \quad d = \frac{1}{2}D,\ \frac{1}{3}D,\ \frac{1}{4}D\ldots,$$

il vient respectivement :

$$c = 2C,\ 3C,\ 4C\ldots \quad \text{ou} \quad c = \frac{1}{2}C,\ \frac{1}{3}C,\ \frac{1}{4}C\ldots,$$

et $$s = 4S,\ 9S,\ 16S\ldots \quad \text{ou} \quad s = \frac{1}{4}S,\ \frac{1}{9}S,\ \frac{1}{16}S\ldots.$$

Les erreurs commises dans les valeurs de C ou S se trouvent multipliées par le rapport $\frac{d}{D}$ ou $\frac{d^2}{D^2}$ dans les valeurs de c ou s ainsi obtenues.

Comme on a (730), pour $D = 2^{m},52$:

$$C = 7^{m},9168, \quad \text{et} \quad S = 4^{mq},9876,$$

pour $d = 2D = 5^{m},04$, on aura :

$$c = 7,9168 \times 2 = 15^{m},8336, \quad \text{et} \quad s = 4,9876 \times 4 = 19^{mq},9504.$$

Les erreurs, qui ne dépassent pas un demi-*dix-millimètre* pour C et

un demi-*centimètre carré* pour S, sont multipliées par 2 pour c et par 4 pour s.

732. La surface S d'un cercle étant égale au produit de la circonférence C par la moitié du rayon ou le $\frac{1}{4}$ du diamètre D, on pourra parfois, dans le but de simplifier les calculs, profiter de cette relation pour déterminer l'une des quantités C ou S, quand l'autre sera connue :

$$S = C \times \frac{D}{4}, \quad C = \frac{4S}{D}.$$

733. *La longueur* A *d'un arc de cercle* est égale à la longueur C de la circonférence de même rayon, multipliée par le rapport du nombre de degrés ou de minutes ou de secondes contenu dans l'arc au nombre de degrés ou de minutes ou de secondes contenu dans la circonférence.

Ainsi pour avoir la longueur d'un arc de 25°8' dont le rayon est $1^m,30$, on commence par calculer $C = 8^m,168$ pour $1^m,30$ de rayon (729, 730), et l'on a ensuite (681)

$$A = 8,168 \,\frac{25 \times 60 + 8''}{360 \times 60} = 0^m,570.$$

Table de la longueur des arcs de cercle, le rayon étant pris pour unité. Pour avoir les longueurs en mètres, en centimètres ou en millimètres, il suffit de multiplier les longueurs du tableau par la longueur du rayon exprimée en mètres, centimètres ou millimètres.

Soit, par exemple, à déterminer la longueur d'un arc de 126°45'9", dont le rayon est $10^m,40$. Le rayon étant pris pour unité, la longueur de l'arc fournie par la table est :

Pour 100°......	1,745 3293
26°......	0,453 7856
40'......	0,011 6355
5'......	0,001 4544
9"......	0,000 0436
Total pour 126°45'9"......	2,212 2484

La longueur de l'arc en mètres est alors

$$10,40 \times 2,212\,2484 = 23^m,007.$$

arc	longueur	arc	longueur
1°	0,01745 32925 19943 29577	1″	0,00000 48481 36811 09536
1′	0,00029 08882 08665 72160	1‴	0,00000 00808 02280 18492

ARCS.	LONGUEURS.	ARCS.	LONGUEURS.	ARCS.	LONGUEURS.	ARCS	LONGUEURS.
1°	0.017 4533	36°	0,628 3185	71°	1,239 1838	1′	0,000 2909
2	0,034 9066	37	0,645 7718	72	1,256 6371	2	0,000 5818
3	0.052 3599	38	0 663 2251	73	1,274 0904	3	0,000 8727
4	0,069 8132	39	0,680 6784	74	1,291 5436	4	0,001 1636
5	0,087 2665	40	0,698 1317	75	1,308 9969	5	0,001 4544
6	0,104 7198	41	0,715 5850	76	1,326 4502	6	0,001 7453
7	0,122 1730	42	0,733 0383	77	1,343 9035	7	0,002 0362
8	0,139 6263	43	0,750 4916	78	1,361 3568	8	0,002 3271
9	0,157 0796	44	0,767 9449	79	1,378 8101	9	0,002 6180
10	0,174 5329	45	0,785 3982	80	1,396 2634	10	0,002 9089
11	0,191 9862	46	0,802 8515	81	1,413 7167	20	0,005 8178
12	0,209 4395	47	0,820 3047	82	1,431 1700	30	0,008 7266
13	0,226 8928	48	0,837 7580	83	1,448 6233	40	0,011 6355
14	0,244 3461	49	0,855 2113	84	1,466 0766	50	0,014 5444
15	0,261 7994	50	0,872 6646	85	1,483 5299		
16	0,279 2527	51	0,890 1179	86	1,500 9832	1″	0,000 0048
17	0,296 7060	52	0,907 5712	87	1,518 4364	2	0,000 0097
18	0,314 1593	53	0,925 0245	88	1,535 8897	3	0,000 0145
19	0,331 6126	54	0,942 4778	89	1,553 5430	4	0,000 0194
20	0,349 0659	55	0,959 9311	90	1,570 7963	5	0,000 0242
21	0,366 5191	56	0,977 3844	91	1,588 2496	6	0,000 0291
22	0,383 9724	57	0,994 8377	92	1,605 7029	7	0,000 0339
23	0,401 4257	58	1,012 2910	93	1,623 1562	8	0,000 0388
24	0,418 8790	59	1,029 7443	94	1,640 6095	9	0,000 0436
25	0,436 3323	60	1,047 1976	95	1,658 0628	10	0,000 0485
26	0,453 7856	61	1,064 6508	96	1,675 5161	20	0,000 0970
27	0,471 2389	62	1,082 1041	97	1,692 9694	30	0,000 1454
28	0,488 6922	63	1,099 5574	98	1,710 4227	40	0,000 1939
29	0,506 1455	64	1,117 0107	99	1,727 8760	50	0,000 2424
30	0,523 5988	65	1,134 4640	100	1,745 3293		
31	0,541 0521	66	1,151 9173	200	3,490 6585		
32	0,558 5054	67	1,169 3706	300	5,235 9878		
33	0,575 9587	68	1,186 8239				
34	0,593 4119	69	1,204 2772				
35	0,610 8652	70	1,221 7305				

734. *L'aire* s *d'un secteur* (633) est égale au produit de l'arc qui lui sert de base par la moitié du rayon. Ce qui équivaut à l'aire d'un triangle qui aurait une base égale à la longueur de celle du secteur et une hauteur égale au rayon (692).

L'aire s *du secteur* est aussi égale à la surface du cercle de même rayon, multipliée par le rapport du nombre de degrés ou de minutes ou de secondes auquel correspond le secteur, au nombre de degrés ou de minutes ou de secondes auquel correspond le cercle entier.

Ainsi le rayon du secteur étant de $1^m,30$ et l'arc qui lui sert de base de $25°8'$, ayant calculé la longueur $0^m,570$ de la base du secteur (733), on a

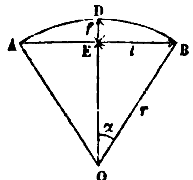
$$s = 0,570 \frac{1,30}{2} = 0^{mq},371.$$

La surface du cercle de $1^m,30$ de rayon étant $5^{mq},309$ (729), on a aussi

$$s = 5,309 \frac{25 \times 60 + 8}{360 \times 60} = 0^{mq},371.$$

735. *L'aire d'un segment circulaire* s'obtient en remarquant que le segment est la différence entre le secteur de même base et le triangle OAB (692, 734).

Fig. 99.



Dans la pratique, pour les voûtes par exemple, on a souvent l'*ouverture* ou corde AB, et la *flèche* ou *montée* DE, desquelles il faut déduire le rayon OB, la longueur de l'arc ADB et la surface du segment.

Désignant le rayon OB par r, la demi-ouverture BE par l, la flèche DE par f, et le demi-angle au centre par α, le triangle rectangle OBE donne (704)

$$r^2 = l^2 + (r - f)^2, \quad \text{d'où} \quad r = \frac{l^2 + f^2}{2f}.$$

On a ensuite $$\sin \alpha = \frac{l}{r}.$$ (Voir *Trigonométrie.*)

Ayant r, l et α, on a tout ce qu'il faut pour calculer la longueur de l'arc ADB, la surface du secteur OADB, la surface du triangle OAB, et par suite celle du segment ADB. On se dispensera de faire ces calculs, qui sont assez longs, en faisant usage de la table suivante.

Table des longueurs des arcs et des surfaces des segments, la longueur de la flèche étant prise pour unité.

Cordes.	Arcs.	Segments.	Cordes.	Arcs.	Segments.	Cordes.	Arcs.	Segments.
2,00	3,1416	1,5708	4,80	5,337	3,3085	8,50	8,810	5,7289
2,01	3,146	1,5764	4,90	5,427	3,3730	8,60	8,903	5,7947
2,02	3,152	1,5821	5,00	5,517	3,4377	8,70	9,003	5,8606
2,03	3,158	1,5879	5,10	5,608	3,5024	8,80	9,100	5,9266
2,04	3,164	1,5936	5,20	5,698	3,5672	8,90	9,196	5,9927
2,05	3.170	1,5993	5,30	5,789	3,6320	9,00	9,293	6,0587
2,06	3,176	1,6051	5,40	5,881	3,6969	9,10	9,390	6,1248
2,07	3,182	1,6108	5,50	5,973	3,7618	9,20	9,487	6,1909
2,08	3,187	1,6166	5,60	6,065	3,8269	9,30	9,584	6,2570
2,09	3,193	1,6224	5,70	6,157	3,8919	9,40	9,681	6,3230
2,10	3,199	1,6282	5,80	6,249	3,9571	9,50	9,778	6,3890
2,20	3,261	1,6863	5,90	6,342	4,0222	9,60	9,875	6,4551
2,30	3,324	1,7449	6,00	6,435	4,0874	9,70	9,972	6,5212
2,40	3,390	1,8041	6,10	6,528	4,1527	9,80	10,069	6,5873
2,50	3,458	1,8637	6,20	6,621	4,2182	9,90	10,167	6,6533
2,60	3,527	1,9238	6,30	6,715	4,2835	10,00	10,264	6,7194
2,70	3,599	1,9843	6,40	6,809	4,3489	10,10	10,362	6,7854
2,80	3,672	2,0452	6,50	6,903	4,4142	10,20	10,459	6,8515
2,90	3.746	2,1064	6,60	6,997	4,4797	10,30	10,557	6.9176
3,00	3,822	2,1679	6,70	7,091	4,5452	10,40	10,654	6,9837
3,10	3,899	2.2297	6,80	7,185	4,6107	10,50	10,752	7,0498
3,20	3,977	2,2917	6,90	7,280	4,6763	10,60	10.849	7,1160
3,30	4,056	2,3540	7,00	7,375	4,7420	10,70	10,947	7,1822
3,40	4,137	2.4165	7,10	7,470	4,8076	10,80	11,045	7,2484
3,50	4,218	2,4793	7.20	7,565	4,8732	10,90	11,143	7,3146
3,60	4,300	2,5422	7,30	7,660	4,9389	11,00	11,240	7,3809
3,70	4,383	2,6053	7,40	7,755	5,0047	11,10	11,338	7,4471
3,80	4,467	2,6686	7,50	7,850	5,0705	11,20	11,436	7,5133
3,90	4,551	2,7320	7,60	7,946	5,1363	11,30	11,534	7,5795
4,00	4,636	2,7956	7,70	8,042	5,2020	11,40	11.632	7,6457
4,10	4,722	2,8593	7,80	8,137	5,2678	11,50	11,730	7,7119
4,20	4.808	2,9231	7,90	8,233	5,3336	11,60	11,828	7,7784
4.30	4,895	2,9871	8,00	8,329	5,3994	11,70	11,926	7,8454
4,40	4,983	3,0512	8,10	8,425	5,4653	11,80	12,024	7,9117
4,50	5,071	3.1154	8,20	8,521	5,5312	11,90	12,122	7,9770
4,60	5,159	3,1796	8,30	8,617	5,5971	12,00	12,220	8,0433
4,70	5,248	3,2440	8,40	8,714	5,6630			

Application. La flèche d'une voûte en arc de cercle est de 2m,60, l'ouverture ou corde est de 20m,00. Quelles sont la longueur de l'a d'intrados et la surface du segment compris entre l'arc et la corde?

Prenant la flèche pour unité, la corde devient $\frac{20,00}{2,60} = 7,692$. Ch chant dans la table la corde 7,70 qui en approche le plus, on trouv sa droite 8,042 pour la longueur de l'arc, et 5,2020 pour la surface segment. Cette longueur et cette surface converties en mètres et mètres carrés deviennent :

$$8,042 \times 2,60 = 20^{m},909 \quad \text{et} \quad 5,2020 \times (2,60)^2 = 35^{mq},1655.$$

Ces résultats sont ceux que l'on cherche, avec une approximat *ordinairement* suffisante dans la pratique. Si l'on veut une plus grar

approximation, on a recours à la méthode des différences proportionnelles (400 et 730). L'arc deviendra ainsi

$$8{,}042 - (8{,}042 - 7{,}946) \times \frac{7{,}70 - 7{,}692}{7{,}70 - 7{,}60} = 8{,}034,$$

et le segment

$$5{,}2020 - (5{,}2020 - 5{,}1363) \times \frac{7{,}70 - 7{,}692}{7{,}70 - 7{,}60} = 5{,}1967.$$

Lesquels étant convertis en mètres et en mètres carrés deviennent :

$$8{,}034 \times 2{,}60 = 20^{m}{,}888, \quad \text{et} \quad 5{,}1967 \times 2{,}60 \times 2{,}60 = 35^{mq}{,}1297.$$

GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE.

LIVRE I.

Le plan (559).

Fig. 100.

736. *Une ligne droite* AB et *un plan* MN *sont perpendiculaires l'un à l'autre* lorsque la droite est perpendiculaire à toutes les droites CD, EF... qui passent par son pied dans le plan. *Ils sont obliques l'un à l'autre* lorsque la droite n'est pas perpendiculaire à toutes celles qui passent par son pied dans le plan.

Il suffit que AB soit perpendiculaire à deux droites CD, EF qui passent par son pied dans le plan pour qu'elle le soit à toutes, c'est-à-dire *pour qu'elle soit perpendiculaire au plan.*

737. Toutes les perpendiculaires CD, EF ... menées à une droite AB, par un même point B, sont situées dans un même plan MN, qui est perpendiculaire à AB.

738. Par un point quelconque A ou B on peut toujours mener une perpendiculaire AB à un plan MN; mais on n'en peut mener qu'une.

739. Le pied B de la perpendiculaire abaissée d'un point A sur un plan est *la projection de ce point sur le plan.*

La ligne formée par les projections des points d'une ligne sur un plan est *la projection de cette ligne sur le plan* (689).

740. Par un point B pris sur une droite ou par un point C pris hors de cette droite, on peut toujours mener un plan MN perpendiculaire à cette droite; mais on n'en peut mener qu'un.

741. *Lorsque d'un point pris hors d'un plan on abaisse une perpendiculaire et différentes obliques :* 1° la perpendiculaire OG est plus courte que toute oblique OA; 2° deux obliques OA, OB qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire (GA = GB) sont égales, et réciproquement; 3° des deux obliques OA, OC qui s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire, celle OC qui s'en écarte le plus est la plus longue, et réciproquement (583).

Fig. 101.

La perpendiculaire OG étant le plus court chemin du point O au plan, elle est la *distance du point* O *au plan.*

Le lieu des pieds des obliques égales menées d'un même point O à un plan est une circonférence qui a pour centre le pied G de la perpendiculaire. De là il résulte que pour mener par un point O pris hors d'un plan une perpendiculaire à ce plan, on marque sur le plan trois points ABA' également distants du point O; on détermine le centre G de la circonférence qui passe par ces trois points, et OG est la perpendiculaire demandée.

742. *L'angle d'une droite* OA *et d'un plan* est le plus petit des angles que forme la droite avec les différentes droites qui passent par son pied dans le plan. Ce plus petit angle est celui OAG que fait la droite avec sa projection AG sur le plan (569, 739).

743. Un plan perpendiculaire à une verticale est dit *horizontal* (574). Comme la verticale, le plan horizontal varie pour chaque point de la surface du globe.

Un plan oblique sur la verticale est dit *incliné à l'horizon.*

744. *La ligne de plus grande pente d'un plan* est celle de toutes les droites que l'on peut tracer dans ce plan qui fait le plus grand angle avec le plan horizontal, et, par suite, le plus petit avec la verticale.

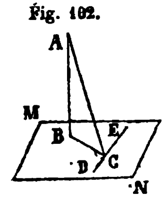
Traçant dans un plan, d'abord une horizontale, puis une perpendiculaire à cette horizontale, la perpendiculaire est la ligne de plus grande pente du plan.

745. La perpendiculaire menée par le centre d'un cercle à son plan est le lieu géométrique des points également distants de la circonférence (566).

746. Le plan perpendiculaire sur le milieu d'une droite est le lieu géométrique des points également distants des extrémités de cette droite (584).

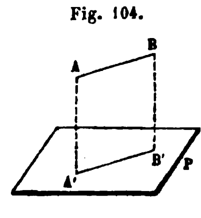
747. Lorsque du pied B d'une perpendiculaire AB à un plan MN on abaisse une perpendiculaire BC sur une droite DE tracée dans ce plan, et qu'on joint le pied de cette perpendiculaire à un point quelconque A de la perpendiculaire au plan, la droite AC qui en résulte est perpendiculaire à la droite DE. (Ce théorème est souvent appelé théorème des trois perpendiculaires).

Fig. 102.



748. Lorsqu'une droite AB est perpendiculaire à un plan, toute parallèle A'B' à AB est aussi perpendiculaire à ce plan.

Fig. 103.



Réciproquement, deux perpendiculaires AB, A'B' à un même plan sont parallèles.

Corollaire. Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles (593).

749. Par un point quelconque de l'espace on peut toujours mener une parallèle à une droite donnée; mais on n'en peut mener qu'une (588).

750. Une droite est parallèle à un plan lorsque sa direction ne rencontre pas le plan (587).

751. Deux plans sont parallèles lorsqu'ils ne se rencontrent pas (559).

752. Toute droite AB parallèle à une droite A'B' tracée dans un plan est parallèle à ce plan.

Fig. 104.

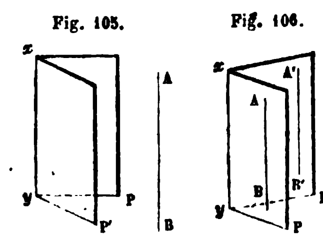
Corollaire 1. Par une droite donnée, on peut mener un plan parallèle à une droite donnée.

Corollaire 2. Par un point donné, on peut mener un plan parallèle à deux droites données.

753. Une droite AB étant parallèle à un plan, tout plan ABA'B' conduit suivant cette droite coupe le premier suivant une droite A'B' parallèle à AB.

Corollaire 1. Lorsqu'une droite AB est parallèle à un plan, si par un point A' de ce plan on mène une parallèle A'B' à AB, elle est contenue tout entière dans le plan.

Fig. 105. Fig. 106.



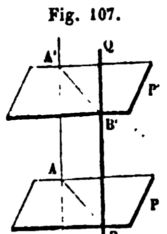
Corollaire 2. Toute droite AB parallèle à deux plans P et P' qui se coupent est parallèle à leur intersection xy (*fig.* 105).

Corollaire 3. Deux plans P, P' passant par deux droites parallèles AB, A'B' ne peuvent se couper que suivant une droite xy parallèle aux deux premières (*fig.* 106).

754. Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

755. Les intersections AB, A'B' des deux plans parallèles P, P' par un troisième Q sont parallèles.

Fig. 107.



756. Si une droite AA' est perpendiculaire au plan P, elle est perpendiculaire à tout plan P' parallèle au premier.

Corollaire 1. Deux plans parallèles à un troisième sont parallèles entre eux.

Corollaire 2. Par un point pris hors d'un plan on peut mener un plan parallèle au premier; mais on n'en peut mener qu'un.

757. Les parallèles comprises entre deux plans ou entre une droite et un plan parallèles sont égales.

Corollaire. Deux plans parallèles ou une droite et un plan parallèles sont partout également distants (592).

758. Deux droites comprises entre trois plans parallèles sont coupées en parties proportionnelles (663).

759. Le plan de deux droites qui se coupent et qui sont parallèles à un même plan est parallèle à ce dernier.

760. Lorsque deux angles ont les côtés parallèles: leurs plans sont parallèles; 2° les deux angles sont égaux si leurs côtés sont tous deux dirigés dans le même sens ou en sens contraires, et supplémentaires si deux côtés sont dirigés dans le même sens et les autres en sens contraires (595).

761. Étant données deux droites non situées dans un même plan: 1° on peut mener une perpendiculaire commune à ces droites; 2° on n'en peut mener qu'une; 3° cette perpendiculaire est la *plus courte distance des deux droites*, c'est-à-dire la plus petite droite que l'on peut mener d'un point quelconque de la première à un point quelconque de la seconde.

762. Lorsque deux plans M et N se rencontrent, la figure que forment ces plans, terminés à leur intersection commune AB, s'appelle *angle dièdre.* Les plans M et N sont les *faces* de l'angle dièdre. L'intersection AB est l'*arête* de l'angle dièdre (569).

Fig. 108.

Ainsi la grandeur d'un angle dièdre est indépendante de celle de ses faces, et l'on se fera une idée très-nette de l'angle dièdre et de sa grandeur en supposant que les faces, d'abord appliquées l'une sur l'autre, s'écartent en tournant autour de l'arête AB comme les deux parties d'un livre que l'on ouvre: l'angle dièdre, d'abord nul, prend une valeur qui augmente avec l'écartement des faces. Ainsi l'angle dièdre est engendré par un plan dans sa rotation autour d'une droite tracée dans ce plan, comme l'angle plan l'est par une droite qui se meut autour d'un de ses points dans un plan. Dans le mouvement du plan, chacun de ses points décrit une circonférence dont le centre est sur l'arête et dont le plan est perpendiculaire à cette arête.

Un angle dièdre se désigne par les lettres AB de son arête, ou, pour éviter la confusion quand il y a plusieurs angles dièdres qui ont même arête, par les quatre lettres MABN de ses faces, en plaçant celles de l'arête au milieu.

763. *Deux angles dièdres coïncident* quand, ayant même arête, leurs faces coïncident (551).

Fig. 109.

Deux angles dièdres susceptibles de coïncider sont *égaux.*

764. *Deux angles dièdres* PABM et PABN sont *adjacents* lorsque, ayant la même arête AB et une face commune PAB, ils sont extérieurs l'un à l'autre (570).

765. Un plan P est perpendiculaire à un autre



MN lorsque le premier fait avec le second, et d'un même côté de celui-ci, deux angles dièdres adjacents PABM, PABN égaux entre eux (573).

Lorsqu'un plan P est perpendiculaire à un autre MN, réciproquement celui-ci est perpendiculaire au premier.

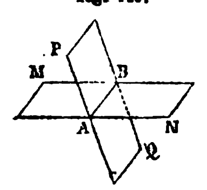
766. Un plan PQ (*fig.* 110) est oblique sur un autre MN quand le premier fait avec le second, et d'un même côté de celui-ci, deux angles dièdres adjacents PABM, PABN inégaux (573).

767. On nomme *angle dièdre droit* chacun des deux angles dièdres adjacents PABM, PABN que forme avec le plan MN le plan P qui lui est perpendiculaire (*fig.* 109).

768. Tous les angles dièdres droits sont égaux entre eux (576).

769. Tout angle dièdre PABM plus petit qu'un angle dièdre droit est un *angle dièdre aigu*, et tout angle dièdre PABN plus grand qu'un angle dièdre droit est un *angle dièdre obtus* (577).

Fig. 110.



770. Deux angles dièdres sont opposés à l'arête, lorsque chacun d'eux est formé par le prolongement des faces de l'autre. Tels sont

PABM et QABN.

771. Deux angles dièdres opposés à l'arête sont égaux (572).

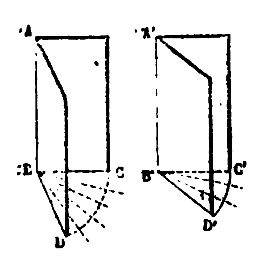
772. Tout plan PQ qui en rencontre un autre MN fait, avec un même côté de celui-ci, deux angles dièdres adjacents PABM, PABN dont la somme est égale à deux angles dièdres droits (580).

773. La somme de tous les angles dièdres consécutifs formés du même côté d'un plan MN autour d'une même arête AB est égale à deux angles dièdres droits, et la somme de tous les angles dièdres consécutifs formés autour d'une même arête AB et embrassant la totalité de l'espace est égale à quatre angles dièdres droits (581).

774. Deux angles dièdres sont *complémentaires* et *supplémentaires* dans les mêmes cas que deux angles plans (578 et 579). Il en est de même des angles *alternes-internes*, *correspondants* ou *alternes-externes*. Définitions qui supposent parallèles entre elles les intersections des deux premiers plans par le troisième (589 et 782).

775. *L'angle plan d'un angle dièdre* AB (*fig.* 111) est l'angle plan CBD formé par les perpendiculaires BC, BD menées en un même point de l'arête dans chacune des faces (894).

Fig. 111.



776. Deux angles dièdres AB, A'B' sont entre eux comme leurs angles plans CBD, C'B'D', et réciproquement.

Comme cas particulier, si les angles dièdres sont égaux, les angles plans sont égaux, et réciproquement.

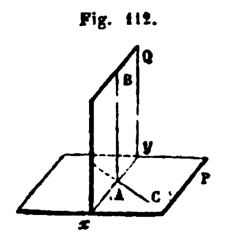
777. Lorsqu'une droite AB est perpendiculaire à un plan P (*fig.* 112), tout plan Q

conduit suivant cette droite est perpendiculaire au premier (765). Tout plan parallèle à AB est aussi perpendiculaire au plan P.

778. Par une droite AC non perpendiculaire à un plan MN (*fig.* 102), on peut toujours faire passer un plan ACB perpendiculaire au premier; mais on n'en peut faire passer qu'un. L'intersection BC du plan perpendiculaire avec le plan proposé est la projection de la droite AC sur ce dernier (739).

779. Lorsque deux plans P et Q sont perpendiculaires, si par un point pris sur l'un d'eux on mène une perpendiculaire AB à leur intersection xy, elle est perpendiculaire à l'autre plan.

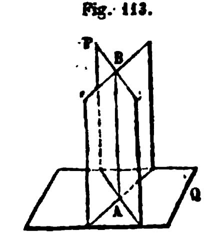
Fig. 112.



780. Lorsque deux plans P et Q sont perpendiculaires entre eux, toute droite AB perpendiculaire à l'un de ces plans est parallèle à l'autre ou y est contenue tout entière.

781. Tout plan Q perpendiculaire à deux autres P et P' qui se coupent est perpendiculaire à leur intersection AB (*fig.* 113).

Fig. 113.



782. Lorsque deux plans parallèles P et P' sont coupés par une troisième Q (*fig.* 107), on a pour les angles dièdres les relations données au n° 590 pour les angles plans. Les réciproques sont également vraies quand, de plus, les intersections des deux premiers plans par le troisième sont parallèles (774).

783. Lorsque le plan sécant est perpendiculaire à l'un des deux plans parallèles, il l'est aussi à l'autre.

784. Deux angles dièdres qui ont les faces parallèles chacune à chacune sont égaux ou supplémentaires (760).

785. Lorsque d'un point, pris comme on voudra, on mène des perpendiculaires aux faces d'un angle dièdre, l'angle de ces perpendiculaires et l'angle plan de l'angle dièdre sont égaux ou supplémentaires (775).

786. Le plan bissecteur d'un angle dièdre est le lieu géométrique des points situés dans l'angle à égale distance de ses faces (566).

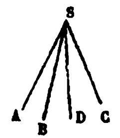
LIVRE II.

Angles polyèdres. Polyèdres. Symétrie.

---

787. On appelle *angle solide* ou *angle polyèdre* la figure limitée à un point S, et formée par au moins trois plans qui passent par ce point et se coupent consécutivement deux à deux.

Fig. 114.



Le point S est le *sommet* de l'angle polyèdre.

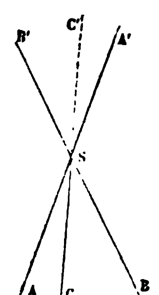
Les intersections consécutives SA, SB... des plans qui forment l'angle polyèdre sont les *arêtes* de cet angle; chaque portion de plan indéfinie ASB comprise entre deux arêtes consécutives en est une *face;* chaque angle ASB formé par deux arêtes consécutives en est un *angle plan*, et chaque angle dièdre SA formé par deux faces consécutives est un de ses *angles dièdres.*

Un angle polyèdre se désigne par la lettre S de son sommet, ou, pour éviter la confusion quand plusieurs angles polyèdres ont même sommet, par les lettres SABCD de ses arêtes, en commençant par celle du sommet.

788. Nous ne considérerons que les *angles polyèdres convexes*, c'est-à-dire situés tout entier d'un même côté de chacun des plans qui les forment (615).

789. Un angle solide prend respectivement le nom d'angle *trièdre*, *tétraèdre*, *pentaèdre*..., suivant qu'il a trois, quatre, cinq... faces (597).

Fig. 115.



790. Un *angle trièdre* est *birectangle* ou *trirectangle* suivant qu'il a deux ou trois angles plans droits.

791. *Deux angles solides coïncident* quand ils ont même sommet et que leurs faces coïncident.

Deux angles solides susceptibles de coïncider *sont égaux.*

792. *Deux angles solides* SABC, SA'B'C' *sont opposés au sommet* lorsque chacun d'eux est formé par les prolongements des faces de l'autre.

793. *Deux angles trièdres* S et S′ *sont égaux :*

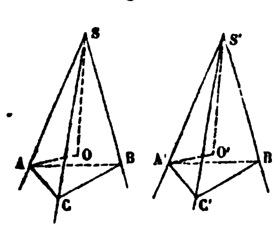


Fig. 116.

1° Quand ils ont un angle dièdre égal compris entre deux angles plans égaux chacun à chacun et situés de la même manière : SA = S′A′, ASB = A′S′B′, ASC = A′S′C′;

2° Lorsqu'ils ont un angle plan égal adjacent à deux angles dièdres égaux chacun à chacun et situés de la même manière : ASB = A′S′B′, SA = S′A′, SB = S′B′;

3° Lorsqu'ils ont les trois angles plans égaux chacun à chacun et situés de la même manière : ASB = A′S′B′, BSC = B′S′C′, CSA = C′S′A′;

4° Lorsqu'ils ont les trois angles dièdres égaux chacun à chacun et situés de la même manière : SA = S′A′, SB = S′B′, SC = S′C′ (620).

794. *Deux angles polyèdres quelconques sont égaux :*

1° Lorsqu'ils ont les angles dièdres et les angles plans égaux chacun à chacun et placés de la même manière.

2° Lorsqu'ils ont leurs arêtes parallèles chacune à chacune et situées de la même manière.

795. Deux angles polyèdres quelconques opposés au sommet ont les angles dièdres et les angles plans égaux chacun à chacun (792), mais situés dans un ordre inverse. Ainsi, ils peuvent ne pas être égaux, c'est-à-dire susceptibles de coïncider.

796. Dans tout angle trièdre, un angle plan quelconque est plus petit que la somme et plus grand que la différence des deux autres (602).

797. La somme des angles plans d'un angle polyèdre quelconque est moindre que quatre angles droits.

798. Les plans bissecteurs des trois angles dièdres d'un trièdre se coupent suivant une même droite, qui est le lieu géométrique des points situés dans l'angle à égale distance de ses faces (566).

799. Si d'un point S′, pris dans l'intérieur d'un angle trièdre SABC, on abaisse des perpendiculaires S′A′, S′B′, S′C′ sur les faces respectives BSC, ASC, ASB de cet angle trièdre, on forme un second angle trièdre S′A′B′C′, sur les faces respectives B′S′C′, A′S′C′, A′S′B′ duquel les arêtes SA, SB, SC du premier sont perpendiculaires.

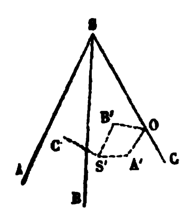


Fig. 117.

De plus, les angles trièdres S et S′ sont *supplémentaires*, c'est-à-dire que les angles plans de chacun d'eux sont les suppléments des angles plans des angles dièdres de l'autre (775). Ainsi, A′S′B′ est le supplément de l'angle plan A′OB′ de l'angle dièdre SC; de même l'angle ASB est le supplément de l'angle plan de l'angle dièdre S′C′.

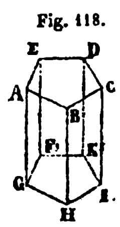
800. Un solide terminé de toutes parts par des polygones (596) se nomme *polyèdre*. Ces polygones sont les *faces* du polyèdre. Une droite suivant laquelle deux faces consécutives se rencontrent s'appelle *arête* ou *côté* du polyèdre. Les *sommets* d'un polyèdre sont les sommets des

angles solides formés par ses faces. Une droite qui joint deux sommets non situés sur la même face est une *diagonale* du polyèdre.

801. Un polyèdre prend respectivement les noms de *tétraèdre*, *pentaèdre*, *hexaèdre*..., selon qu'il a 4, 5, 6... faces (597).

802. Le *prisme* est un polyèdre compris sous plusieurs plans qui se rencontrent consécutivement suivant des droites AG, BH, CI... parallèles entre elles, et qui se terminent de part et d'autre à deux plans parallèles. Ces droites sont les *arêtes latérales du prisme*. Chacune des faces ABHG, BCIH..., comprises entre deux arêtes latérales est une *face latérale* du prisme. Les deux polygones ABCDE, FGHIK auxquels se terminent les arêtes latérales sont les *bases du prisme*. La *hauteur du prisme* est la distance des deux bases (757).

Fig. 118.



803. Dans tout prisme les arêtes latérales sont égales entre elles (757), et les faces latérales sont des parallélogrammes (605).

804. Un *prisme* est *droit* ou *oblique* selon que ses arêtes latérales sont perpendiculaires ou obliques aux plans des bases (736).

805. Un *prisme* est *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonal*..., selon que ses bases sont des triangles, des quadrilatères, des pentagones... (597).

806. Un *prisme* est dit *régulier*, lorsqu'il est droit et que sa base est un polygone régulier (714).

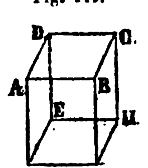
807. Les sections faites dans un prisme par des plans parallèles sont des polygones égaux. Ainsi les deux bases d'un prisme sont égales, et toute section faite par un plan parallèle aux bases est égale à ces bases.

808. La section faite dans un prisme par un plan perpendiculaire aux arêtes latérales est dite *section droite*.

809. Un *tronc de prisme* est la partie d'un prisme comprise entre l'une des bases et la section faite par un plan non parallèle à la base. Cette base et la section sont les *bases du tronc* (910).

810. On donne le nom de *parallélipipède* à un prisme qui a pour base un parallélogramme EFGH (605).

Fig. 119.



Ainsi un parallélipipède est un hexaèdre compris sous six parallélogrammes deux à deux égaux et parallèles.

La *base d'un parallélipipède* est indifféremment une face quelconque. La *hauteur d'un parallélipipède* est la distance de la base à la face opposée.

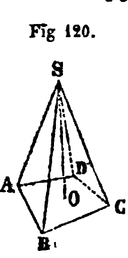
811. Le *parallélipipède rectangle* est celui dont toutes les faces sont des rectangles. Les trois arêtes adjacentes ED, EH, EF, qui aboutissent à un même sommet quelconque E, sont perpendiculaires entre elles.

812. *Les trois dimensions d'un parallélipipède rectangle* sont les deux dimensions de sa base et sa hauteur, c'est-à-dire ses trois arêtes adjacentes (640).

813. Le *cube* est un parallélipipède rectangle dont toutes les faces sont des carrés. Toutes les arètes sont égales.

814. La *pyramide* est un polyèdre compris sous un polygone ABCD, et les triangles qui ont pour bases les différents côtés du polygone et pour sommet commun un point S situé hors du plan de ce polygone. Le polygone ABCD est la *base* de la pyramide. Le sommet S opposé à la base est le *sommet de la pyramide*. La *hauteur de la pyramide* est la perpendiculaire SO abaissée du sommet sur le plan de la base. Les *arêtes latérales d'une pyramide* sont celles SA, SB... qui joignent le sommet à la base. Les *faces latérales d'une pyramide* sont celles SAB, SBC... qui ont pour sommet commun celui de la pyramide.

Fig 120.



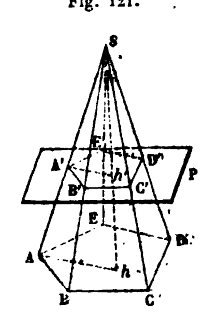
815. Une *pyramide* est *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonale*... selon qu'elle a pour base un triangle, un quadrilatère, un pentagone... (597).

816. Une *pyramide* est dite *régulière*, lorsque sa base est un polygone régulier et que ses arêtes latérales sont égales entre elles. Sa surface latérale est composée de triangles isocèles égaux dont la hauteur est l'apothème de la pyramide (714, 717).

817. Un plan P, parallèle au plan de la base ABCDE d'une pyramide, 1° coupe en parties proportionnelles les arètes latérales SA, SB... et la hauteur Sh. Ainsi l'on a $\frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'} \ldots = \frac{Sh}{Sh'}$; 2° la section A'B'C'D'E' est semblable à la base, et le rapport de ces polygones est égal à celui des carrés des arètes latérales et des hauteurs des deux pyramides : ainsi

$$\frac{ABCDE}{A'B'C'D'E'} = \frac{\overline{SA}^2}{\overline{SA'}^2} = \frac{\overline{Sh}^2}{\overline{Sh'}^2}. \quad (700).$$

Fig. 121.



818. Les sections faites dans deux pyramides de même hauteur par des plans menés à égale distance des bases et parallèlement à ces bases sont entre elles comme ces bases. Si les bases sont égales ou équivalentes, les sections le sont également.

819. Un *tronc de pyramide* est la partie d'une pyramide comprise entre la base et la section faite par un plan quelconque. La base de la pyramide et la section sont les *bases du tronc*. Lorsque le tronc de pyramide est à bases parallèles (*fig.* 121), la hauteur du tronc est la distance hh' des deux bases (911).

820. Un *polyèdre* est *convexe* lorsqu'il est situé entièrement d'un même côté du plan de l'une quelconque de ses faces (615).

821. Deux *polyèdres* sont *de même espèce* lorsque leurs surfaces sont composées d'un même nombre de triangles, de quadrilatères, de pen-

tagones... situés de la même manière. Ainsi deux prismes ou deux pyramides sont de même espèce, lorsque leurs bases ont le même nombre de côtés.

822. *Deux tétraèdres sont égaux* (801): 1° quand ils ont un angle solide égal compris entre trois arêtes égales chacune à chacune et situées de la même manière; 2° quand ils ont un angle dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune et situées de la même manière; 3° lorsqu'ils ont une face égale adjacente à trois angles dièdres égaux chacun à chacun et situés de la même manière; 4° lorsqu'ils ont les arêtes égales chacune à chacune et situées de la même manière (793).

823. *Deux prismes sont égaux* lorsqu'ils ont un angle dièdre à la base égal et compris entre deux faces égales chacune à chacune et situées de la même manière. Deux prismes droits de même base et de même hauteur sont égaux. Tous les cubes qui ont un côté égal sont égaux.

824. Dans tout polyèdre le nombre des sommets augmenté du nombre des faces est égal au nombre des arêtes augmenté de deux unités. Ainsi S étant le nombre des sommets, F celui des faces, et A celui des arêtes, on a

$$S + F = A + 2.$$

825. Le nombre des conditions nécessaires pour l'égalité de deux polyèdres de même espèce (821) est égal au nombre A des arêtes.

826. La somme des angles plans de toutes les faces d'un polyèdre est égal à autant de fois quatre angles droits qu'il y a de sommets moins deux dans le polyèdre. Ainsi, s étant la somme des angles plans exprimée en angles droits, et S le nombre des sommets, on a

$$s = 4(S - 2); \quad \text{pour} \quad S = 8, \; s = 4(8 - 2) = 24 \text{ droits.} \qquad (618)$$

827. *Dans tout parallélipipède* (810): 1° les diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales; 2° la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés. Ainsi, A, B, C, D, étant les diagonales, et a, b, c étant les trois côtés adjacents, on a

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2. \qquad (713)$$

Pour le parallélipipède rectangle, les quatre diagonales sont égales, et l'on a

$$4D^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 \quad \text{ou} \quad D^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

c'est-à-dire que le carré de la diagonale est égal à la somme des carrés des trois côtés.

Si le parallélipipède est un cube, les trois côtés sont égaux, et l'on a

$$D^2 = 3c^2, \quad \text{d'où} \quad \frac{D}{c} = \sqrt{3}. \qquad (705)$$

Ainsi *le rapport de la diagonale au côté du cube est égal à la racine carrée de* 3.

828. *Deux points sont symétriques par rapport à un troisième*, lorsque celui-ci divise en deux parties égales la droite qui joint les deux premiers.

Deux points sont symétriques par rapport à une droite ou à un plan, lorsque cette droite ou ce plan est perpendiculaire au milieu de la droite qui joint les deux points.

829. *Deux droites sont symétriques par rapport à un point, à une droite, à un plan*, lorsque leurs extrémités sont symétriques par rapport à ce point, à cette droite ou à ce plan.

Ce point, cette droite, ce plan s'appellent respectivement *centre de symétrie*, *axe de symétrie*, *plan de symétrie*.

830. *Deux polygones ou deux polyèdres sont symétriques par rapport à un point, à une droite ou à un plan*, lorsque chaque sommet de l'un est symétrique d'un sommet de l'autre par rapport au point, à la droite ou au plan dont il s'agit.

831. Deux droites, deux polygones ou deux polyèdres symétriques par rapport à une droite sont égaux entre eux.

832. Deux droites ou deux polygones symétriques par rapport à un point ou par rapport à un plan sont égaux.

833. Deux angles polyèdres ou deux polyèdres symétriques par rapport à un point ou par rapport à un plan dont les angles dièdres homologues égaux et situés dans un ordre inverse.

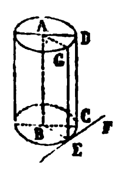
LIVRE III.

Les trois corps ronds.

---

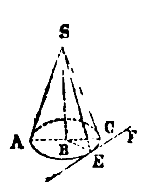
834. Le *cylindre droit à base circulaire* est le solide engendré par un rectangle ABCD qui fait une révolution entière autour d'un de ses côtés. Le côté immobile AB est l'*axe du cylindre*. Les *bases du cylindre* sont les cercles décrits par les côtés AD et BC perpendiculaires à l'axe. La *hauteur du cylindre* est la distance AB des deux bases. La *surface latérale du cylindre* est la surface engendrée par le côté CD parallèle à l'axe. CD prend le nom de *génératrice*.

Fig. 122.



835. Le *cône droit à base circulaire* est un solide engendré par un triangle rectangle ABS qui fait une révolution entière autour d'un des côtés de l'angle droit. Le côté immobile SB est l'*axe* ou la *hauteur du cône*. La *base du cône* est le cercle engendré par le côté AB perpendiculaire à l'axe. Le *côté* ou *l'apothème du cône* est l'hypoténuse AS du triangle générateur. Le *sommet du cône* est le point de rencontre S de la hauteur et du côté du cône. La *surface latérale du cône* est la surface engendrée par l'hypoténuse SA du triangle générateur; SA prend le nom de *génératrice*.

Fig. 123.



836. Tout plan sécant mené dans un cylindre droit à base circulaire parallèlement, 1° à ses bases, 2° à son axe, coupe le cylindre, 1° suivant un cercle égal aux bases, 2° suivant un rectangle ayant deux positions de la génératrice pour côtés opposés.

837. Tout plan sécant mené dans un cône à base circulaire, 1° parallèlement à sa base et par suite perpendiculaire à son axe, 2° par son sommet, coupe le cône, 1° suivant un cercle, 2° suivant un triangle isocèle qui a pour côtés égaux deux positions de la génératrice.

838. Un *tronc de cône* est la partie d'un cône comprise entre la base et la section faite par un plan quelconque. La base du cône et la section sont les *bases du tronc*.

Le *côté d'un tronc de cône droit à bases parallèles* est la partie AB de la génératrice comprise entre les deux bases (*fig.* 133), et la *hauteur du tronc* est la distance CD des deux bases (819).

839. En général, on donne le nom de *surface cylindique* à la surface engendrée par une droite AB, nommée *génératrice*, qui se meut en restant parallèle à elle-même et en s'appuyant sur une courbe quelconque CDE, appelée *directrice*.

Fig. 124.

840. Quand la directrice CDE est une courbe plane fermée, tout plan parallèle au plan de la directrice coupe la surface cylindrique suivant une courbe C'D'E' égale à la directrice, et l'on nomme *cylindre* le solide CDEC'D'E' compris entre les surfaces planes limitées par ces courbes et la surface cylindrique interceptée entre ces mêmes courbes.

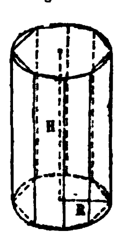
Les deux surfaces planes égales et parallèles CDE, C'D'E' sont les bases du cylindre, et la distance HH' des deux bases en est la hauteur.

Un cylindre est droit ou oblique, selon que la génératrice est ou n'est pas perpendiculaire aux plans des bases.

Dans le cylindre droit à base circulaire, la directrice est une circonférence (834).

841. La *section droite d'un cylindre* est la section faite dans ce cylindre par un plan perpendiculaire à la génératrice (808).

842. *Un prisme est inscrit dans un cylindre* lorsque ses bases sont inscrites dans celles du cylindre (641).


Fig. 125.

843. De même qu'on peut regarder le cercle et en général une surface plane quelconque limitée par une courbe comme étant la limite des polygones inscrits dont on rend les côtés infiniment petits en augmentant indéfiniment le nombre de ces côtés (558), le cylindre peut être considéré comme étant la limite des prismes inscrits qui ont ces polygones pour bases. Ainsi le cylindre droit peut être considéré comme étant un prisme droit, et un cylindre oblique comme étant un prisme oblique. Par suite, toute propriété de la surface ou du volume de ces prismes s'étend à ces cylindres, pourvu que cette propriété soit indépendante du nombre des côtés de la base de ces prismes, et qu'on remplace la base et la hauteur de ces prismes par la base et la hauteur des cylindres.

844. La surface latérale d'un prisme se développe suivant une surface plane. Lorsque le prisme est droit, le développement est un rectangle qui a pour hauteur la hauteur du prisme, et pour base une droite dont la longueur est égale à la somme des longueurs des côtés de la base du prisme.

De même, la surface latérale d'un cylindre se développe suivant une surface plane, et lorsque le cylindre est droit, le développement de la surface latérale est un rectangle qui a pour hauteur celle du cylindre, et pour base le développement du contour de la base du cylindre.

845. On donne en général le nom de *surface conique* à la surface engendrée par une droite SA qui se meut en passant par un point fixe S et en s'appuyant sur une courbe donnée BCD. La droite mobile, le point fixe et la courbe fixe sont respectivement appelés *génératrice*, *sommet* et *directrice*.

Fig. 126.

846. Lorsque la directrice BCD est le contour d'une surface plane, le solide SBCD compris entre cette surface et le sommet prend le nom de cône. Cette surface est la base du cône, et la distance SH du sommet au plan de la base est la hauteur du cône.

Lorsque la directrice est une circonférence, et que le sommet est sur une perpendiculaire menée au plan de la base par le centre, le cône est droit à base circulaire (835).

847. Une pyramide est inscrite dans un cône lorsqu'elle a pour sommet le sommet du cône, et pour base un polygone inscrit dans la base du cône.

848. Le cône peut être considéré comme étant la limite des pyramides inscrites dont on rendrait les côtés de la base infiniment petits en augmentant indéfiniment le nombre de ces côtés (843). Ainsi le cône droit à base circulaire (835) peut être considéré comme étant une pyramide régulière (816) dont l'apothème est le côté du cône, et dont la base est un cercle; et en général on peut considérer un cône quelconque

comme étant une pyramide. Par suite, toute propriété de la surface ou du volume de la pyramide s'étend au cône, pourvu que cette propriété soit indépendante du nombre des côtés de la base de la pyramide.

849. La surface latérale d'une pyramide se développe suivant une surface plane, et il en est de même de la surface latérale d'un cône. Quand le cône est droit à base circulaire, le développement de la surface latérale est un secteur circulaire ayant pour rayon le côté du cône, et pour base un arc d'une longueur égale à celle de la circonférence de la base du cône (734).

850. *Un plan est tangent à un cylindre ou à un cône droit à base circulaire* lorsqu'il rencontre la surface du solide suivant une seule position de la génératrice. Pour cela il suffit qu'il contienne une tangente EF à la base du cylindre ou du cône et la génératrice qui passe par le point de contact E (*fig.* 122 et 123). Cela s'applique encore à un cylindre ou à un cône quelconque dont la directrice est convexe.

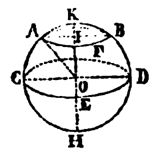
851. Tout plan tangent au cylindre ou au cône droit à base circulaire est perpendiculaire au plan passant par l'axe et la génératrice de contact.

852. *Un fuseau cylindrique* ECDG *ou conique* SEC est la partie de la surface latérale d'un cylindre ou d'un cône droit à base circulaire, comprise entre deux plans conduits suivant l'axe. La *base du fuseau* est la partie EC, de la circonférence de la base du cylindre ou du cône, comprise entre les mêmes plans (*fig.* 122 et 123).

853. *Un onglet cylindrique* ABECDG *ou conique* SBEC est la partie d'un cylindre ou d'un cône droit à base circulaire comprise entre deux plans conduits suivant l'axe. *La base de l'onglet* est la partie BEC, de la base du cylindre ou du cône, comprise entre les mêmes plans (*fig.* 122 et 123).

854. La *sphère* est un solide dans lequel est un point O également distant de tous les points de la surface (628).

Fig. 127.



On peut considérer la sphère comme engendrée par un demi-cercle KCH qui fait une révolution complète autour de son diamètre KH.

Toute droite OA allant du centre à la surface est un *rayon*. Une droite AB qui a ses extrémités sur la surface de la sphère est une *corde*. Une corde CD qui passe par le centre est un *diamètre*. Tous les diamètres sont doubles du rayon, et par suite égaux entre eux.

Toute section CED faite dans la sphère par un plan qui passe par le centre est un *grand cercle*. Le quart CE = ED de la circonférence d'un grand cercle s'appelle *quadrant*.

La section AFB faite dans la sphère par un plan qui ne passe pas par le centre est un *petit cercle*.

855. Dans une même sphère ou dans des sphères égales, deux cercles également distants du centre sont égaux, et de deux cercles inégalement distants du centre de la sphère, le plus petit est le plus éloigné du centre. Les réciproques sont également vraies (636).

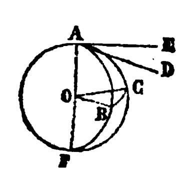
856. La distance d'un point à un autre sur la surface de la sphère est l'arc de grand cercle qui joint ces deux points.

857. Les extrémités H et K du diamètre perpendiculaire au plan d'un cercle AFB sont les *pôles de ce cercle.*

858. Le pôle K d'un cercle AFB est également distant de tous les points de la circonférence de ce cercle, c'est-à-dire que tous les arcs de grand cercle menés du pôle à la circonférence sont égaux. Réciproquement, si une ligne tracée sur la surface de la sphère a tous ses points situés à égale distance d'un même point de cette surface, elle est une circonférence qui a ce point pour pôle.

859. L'*angle de deux arcs* AB, AC qui se rencontrent sur la sphère est l'angle des tangentes AD, AE menées à ces arcs par leur point de rencontre. Ce point est le *sommet* de l'angle. Les arcs en sont les *côtés.*

Fig. 128.



860. On nomme *fuseau sphérique*, la partie ABFCA de la surface de la sphère comprise entre deux demi-circonférences de grand cercle terminées aux extrémités d'un même diamètre AF. L'*angle du fuseau* est l'angle DAE des arcs qui le terminent.

861. On nomme *onglet sphérique*, la partie AOFBC de sphère comprise entre deux plans AFB, AFC qui se rencontrent suivant un diamètre. L'angle dièdre que font ces plans est l'*angle de l'onglet.* Cet angle dièdre a pour angle plan l'angle DAE (775).

862. *Un fuseau ou un onglet sphérique est droit, aigu ou obtus*, selon que son angle est droit, aigu ou obtus (769).

863. Deux grands cercles dont les plans sont perpendiculaires entre eux partagent la sphère en quatre onglets droits égaux entre eux, et sa surface en quatre fuseaux droits, qui sont aussi égaux entre eux.

864. La partie ABC de la surface d'une sphère, terminée par plus de deux arcs de grand cercle, s'appelle *polygone sphérique.* Ces arcs sont les *côtés du polygone;* on les suppose toujours plus petits qu'une demi-circonférence.

865. *Un triangle sphérique* est *rectangle*, *isocèle*, *équilatéral* dans les mêmes cas qu'un triangle rectiligne (598, 600, 601).

Un triangle sphérique est birectangle ou trirectangle selon qu'il a deux ou trois angles droits.

866. *Un triangle sphérique est polaire d'un autre triangle* lorsque les sommets du premier sont les pôles des côtés du second (857). On suppose qu'on prend pour pôle de chaque côté du triangle celui qui est situé dans le même hémisphère que ce triangle, par rapport à la circonférence dont ce côté fait partie.

867. Une *pyramide sphérique* est un solide OABC compris sous un polygone sphérique ABC, et les secteurs circulaires OAB, OAC, OBC qui ont pour bases les différents côtés du polygone et pour sommet commun le centre de la sphère (*fig.* 128). Ce polygone est la *base de la pyramide.* Le centre de la sphère en est le *sommet.*



868. *Une pyramide sphérique* est *birectangle* ou *trirectangle* selon que sa base est un triangle birectangle ou trirectangle (865).

869. Trois grands cercles, tels que le plan de chacun d'eux est perpendiculaire aux plans des deux autres, partagent la sphère en huit pyramides trirectangles égales entre elles, et sa surface en huit triangles trirectangles égaux entre eux.

870. Dans tout triangle sphérique, un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres et plus grand que leur différence (602).

871. La somme des côtés de tout polygone sphérique est moindre que la circonférence d'un grand cercle.

872. L'angle de deux arcs de grands cercles (859) est égal à l'angle plan de l'angle dièdre formé par les plans des deux arcs.

Les angles d'un polygone sphérique sont les angles plans des angles dièdres formés par les plans de ses côtés (775).

873. La somme des angles d'un triangle sphérique est moindre que 6 et plus grande que 2 droits.

874. *Deux triangles sphériques situés sur la même sphère ou sur des sphères égales sont égaux :* 1° quand ils ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun et placés de la même manière; 2° quand ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun et placés de la même manière; 3° lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun et placés de la même manière; 4° quand ils ont les trois angles égaux chacun à chacun et placés de la même manière (620, 793).

875. *On peut construire un triangle sphérique :* 1° étant donnés deux côtés et l'angle qu'ils comprennent; 2° étant donnés un côté et les deux angles adjacents; 3° étant donnés les trois côtés; 4° étant donnés les trois angles (626).

876. On appelle *zone*, la partie de surface d'une sphère comprise entre deux plans parallèles CED, AFB (*fig.* 127). Les *bases de la zone* sont les deux circonférences CED, AFB qui la terminent. Lorsqu'un des deux plans est tangent à la sphère, la zone n'a qu'une base, et elle prend le nom de *calotte sphérique*.

877. On nomme *segment sphérique*, la partie de sphère comprise entre deux plans parallèles CED, AFB (*fig.* 127). Les *bases d'un segment* sont les deux cercles CED, AFB qui le terminent. Lorsqu'un des deux plans parallèles est tangent à la sphère le segment n'a qu'une base.

878. *La hauteur d'une zone ou d'un segment sphérique* est la distance GI des deux plans parallèles qui comprennent la zone ou le segment (*fig.* 127).

879. Une droite est inscrite dans une sphère lorsqu'elle a ses extrémités sur la surface de la sphère; telle est AB (127).

880. Un *polyèdre inscrit* est celui dont tous les côtés sont inscrits dans la sphère. *Une sphère est circonscrite à un polyèdre* quand le polyèdre est inscrit dans la sphère (641).

881. Étant donnés quatre points non situés dans un même plan, on peut toujours trouver un point également distant des quatre premiers;

mais on n'en peut trouver qu'un seul, *qui est le centre de la sphère que l'on peut toujours faire passer par ces quatre points* (650).

882. Les six plans perpendiculaires aux milieux des arêtes d'un tétraèdre se rencontrent au point unique également distant des quatre sommets du tétraèdre. *Ce point est le centre de la sphère qu'on peut toujours circonscrire au tétraèdre.*

883. *Une ligne droite* AE *et une sphère* O *sont tangentes* lorsqu'elles ont un seul point A commun (*fig.* 128).

884. *Un plan* DAE *est tangent à une sphère* O lorsqu'il rencontre sa surface en un seul point A (*fig.* 128).

Tout plan DAE perpendiculaire à l'extrémité du rayon OA est tangent à la sphère (643). Toute droite AD perpendiculaire à l'extrémité du rayon OA est tangente à la sphère, et située dans le plan tangent à la sphère au point A (*fig.* 128).

885. *Un polyèdre est circonscrit à une sphère* lorsque chacune de ses faces est tangente à la sphère.

Une sphère est inscrite dans un polyèdre lorsque le polyèdre est circonscrit à la sphère (646).

886. Les six plans bissecteurs des angles dièdres d'un tétraèdre se rencontrent au point unique également distant des quatre faces du tétraèdre. *Ce point est le centre de la sphère qu'on peut toujours inscrire dans le tétraèdre.*

887. *Deux sphères sont tangentes* lorsqu'elles ont un seul point commun (644).

888. Deux sphères qui ont un point commun sur la ligne des centres, c'est-à-dire sur la droite qui passe par les centres, sont *tangentes extérieurement* ou *intérieurement* selon que ce point est situé entre les centres ou sur un des prolongements de la droite qui les joint.

On a pour les surfaces des sphères des propositions analogues à celles données aux nos 651 et suivants pour les circonférences; seulement les surfaces des sphères se coupent suivant des circonférences.

LIVRE IV.

Les polyèdres semblables et la mesure des angles.

---

889. *Deux polyèdres sont semblables* lorsqu'ils ont les angles dièdres égaux chacun à chacun et situés dans le même ordre, et les faces homologues semblables (665).

890. *Deux tétraèdres sont semblables :* 1° lorsqu'ils ont un angle solide égal compris entre arêtes proportionnelles et situées de la même



manière; 2° lorsqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre deux faces semblables chacune à chacune et situées de la même manière; 3° lorsqu'ils ont une face semblable adjacente à trois angles dièdres égaux chacun à chacun et situés de la même manière; 4° lorsqu'ils ont les arêtes proportionnelles et situées de la même manière (670).

891. *Deux prismes ou deux pyramides sont semblables*, lorsqu'ils ont un angle dièdre à la base égal et compris entre deux faces semblables chacune à chacune et situées de la même manière.

892. *Deux prismes ou deux pyramides régulières* (806, 816) *sont semblables*, lorsque leurs bases sont des polygones semblables, et que leurs hauteurs sont entre elles comme les côtés des bases, ou encore comme les rayons des cercles inscrits ou circonscrits à ces bases.

893. *Deux polyèdres* composés d'un même nombre de tétraèdres semblables chacun à chacun et semblablement disposés *sont semblables; et réciproquement* (672).

894. *Tout angle dièdre a pour mesure son angle plan* (775), c'est-à-dire qu'il contient autant de fois l'angle dièdre droit que son angle plan contient l'angle plan droit.

895. *Un fuseau sphérique a pour mesure le double de son angle* (860), c'est-à-dire qu'il contient autant de fois le triangle trirectangle ou le huitième de la surface de la sphère (869), que le double de son angle contient l'angle plan droit (939).

896. De même, *un onglet sphérique a pour mesure le double de son angle plan.* Ce qui veut dire qu'il contient la pyramide sphérique trirectangle ou le huitième du volume de la sphère, autant de fois que le double de son angle plan contient l'angle droit (861, 951).

897. *Tout triangle sphérique a pour mesure l'excès de la somme de ses angles sur deux angles droits* (872), en prenant toujours pour unités le triangle trirectangle et l'angle plan droit (940).

898. *Toute pyramide triangulaire sphérique a pour mesure l'excès de la somme des angles de sa base sur deux angles droits* (867). Encore en prenant pour unités la pyramide sphérique trirectangle et l'angle plan droit (869).

899. *Tout angle trièdre a pour mesure l'excès de la somme des angles plans de ses angles dièdres sur deux droits* (775). On prend pour unités l'angle trièdre trirectangle et l'angle plan droit.

900. *Tout polygone sphérique a pour mesure l'excès de la somme de ses angles sur autant de fois deux angles droits qu'il a de côtés moins deux* (872). Les unités sont le triangle sphérique trirectangle et l'angle plan droit (869, 941).

Une pyramide sphérique a une mesure analogue (867), les unités étant la pyramide sphérique trirectangle et l'angle plan droit (952).

LIVRE V.

Mesure des polyèdres (800).

---

901. La *mesure du volume* ou simplement le *volume d'un corps* est le rapport de son étendue à celle du corps pris pour unité (214). Ainsi, en supposant qu'on prenne pour unité d'espace le cube dont le côté est un mètre, lorsqu'un solide, de forme quelconque, contient douze fois la dixième partie du mètre cube, le volume de ce solide est égal au nombre 1,2 mètres cubes.

902. *Le produit d'une surface par une ligne* est le produit de l'aire de la surface par la longueur de la ligne. L'aire est exprimée en unités de surface dont le côté est l'unité qui a servi à évaluer la longueur de la ligne.

903. *Le volume d'un parallélipipède rectangle quelconque est égal au produit de sa base par sa hauteur ou au produit de ses trois dimensions* (812). Supposant, par exemple, que les deux dimensions de la base d'un parallélipipède rectangle soient $2^m,04$ et 2 mètres, c'est-à-dire que cette base contienne $2,04 \times 2 = 4^{mq},08$ (690), et que la hauteur du parallélipipède soit 7 mètres 6 décimètres; si l'on prend le mètre cube pour unité d'espace, le volume du parallélipipède proposé sera

$$2,04 \times 2 \times 7,6 = 31,008 \quad \text{ou} \quad 4,08 \times 7,6 = 31,008;$$

c'est-à-dire qu'il contiendra 31 mètres cubes plus 8 millièmes de mètre cube, ou, ce qui revient au même, 31 mètres cubes, plus 8 décimètres cubes.

Nous venons de supposer que le décimètre cube était la millième partie du mètre cube. Cela est vrai en effet; car si l'on conçoit la base du mètre cube divisée en 100 décimètres carrés, et qu'on mène par les lignes de division des plans parallèles à la hauteur, on décomposera ainsi le solide en 100 parallélipipèdes rectangles d'un décimètre carré de base et d'un mètre de hauteur. Ensuite, si l'on divise une arête latérale en dix parties égales, et qu'on mène par tous les points de division des plans parallèles à la base, on décomposera chacun des 100 parallélipipèdes partiels en 10 autres parallélipipèdes rectangles ayant un décimètre carré de base et un décimètre de hauteur; donc le mètre cube sera divisé en 100×10 ou en 1000 décimètres cubes; ce qui montre qu'un décimètre cube est bien la millième partie d'un mètre cube. On verrait de même qu'un centimètre cube est la millième partie d'un décimètre cube et par conséquent la millionième partie d'un mètre cube,

et qu'un millimètre cube en est la billionième partie. Ainsi lorsqu'on prend le mètre cube pour unité, un solide, dont le volume est 1,432 569 83, contient un mètre cube, 432 décimètres cubes, 569 centimètres cubes, 830 millimètres cubes. En prenant le décimètre cube pour unité, le volume du corps serait 1432,569 83; en prenant le centimètre cube, il serait 1432 569,83; et en prenant le millimètre cube, 1432 569 830 (n° 217).

Le volume d'un cube est égal au cube de son arête (813).

904. Deux parallélipipèdes rectangles sont entre eux comme les produits de leurs trois dimensions, ou comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs. S'ils ont une même dimension, c'est-à-dire même hauteur, ils sont entre eux comme les produits des deux autres dimensions ou comme leurs bases. S'ils ont deux mêmes dimensions, c'est-à-dire même base, ils sont entre eux comme leurs troisièmes dimensions ou comme leurs hauteurs (691).

Deux cubes sont entre eux comme les cubes de leurs arêtes (813).

905. *Un prisme quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur* (802). Lorsque le prisme est droit, cette hauteur est égale aux arêtes latérales.

On peut prendre aussi pour mesure du prisme le produit de sa section droite par son arête latérale (808).

906. *La surface latérale d'un prisme quelconque a pour mesure le produit du périmètre de sa base par sa hauteur*, ou encore le produit du périmètre de sa section droite par son arête latérale (808).

907. *Toute pyramide a pour mesure le tiers du produit* B × H *de sa base par sa hauteur.* C'est le tiers du volume d'un prisme de base équivalente et de même hauteur (905).

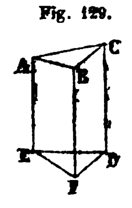
$$\text{Pour } B = 2^{mq},4 \text{ et } H = 1^{m},2, \text{ le volume } V = \frac{2,4 \times 1,2}{3} = 0^{mc},960.$$

908. *La surface latérale d'une pyramide régulière a pour mesure la moitié du produit du périmètre de sa base par la hauteur d'une face latérale* (816).

909. Deux tétraèdres, ou deux prismes triangulaires, ou encore deux parallélipipèdes, qui ont un angle solide égal, sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent l'angle égal (699).

910. *Un tronc de prisme triangulaire* ABCDEF (809) est équivalent à la somme de trois pyramides qui ont pour base commune la base inférieure DEF du tronc, et pour sommets respectifs les sommets A, B, C de la base supérieure. Ainsi B = $2^{mq},25$ étant la base inférieure, et $a = 1^{m},1$, $b = 1^{m},4$ et $c = 1^{m},6$ étant les distances des sommets de la base supérieure au plan de la base inférieure, le volume V du tronc est (907)

Fig. 129.



$$V = \frac{1}{3} B(a + b + c) = \frac{1}{3} 2,25(1,1 + 1,4 + 1,6) = 3^{mc},075.$$

911. Un tronc de pyramide quelconque à bases parallèles ABCDEFGH (819) est équivalent à la somme de trois pyramides ayant pour hauteur commune la hauteur du tronc, et pour bases respectives : la base inférieure EFGH du tronc, la base supérieure ABCD et une moyenne proportionnelle entre ces bases (316). Ainsi $H = 2^{m},5$ étant la hauteur du tronc, et $B = 3^{mq},25$ et $b = 1^{mq},90$ ses deux bases, son volume V est (907).

Fig. 130.

$$V = \frac{1}{3} H \times B + \frac{1}{3} H \times b + \frac{1}{3} H \sqrt{Bb} = \frac{1}{3} H \left(B + b + \sqrt{Bb}\right) =$$

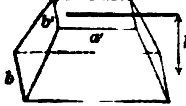
$$= \frac{1}{3}\, 2,5 \left(3,25 + 1,90 + \sqrt{3,25 \times 1,90}\right) = 6^{mc},362.$$

912. Les volumes de deux polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes des arêtes ou des diagonales homologues (889), et leurs surfaces sont entre elles comme les carrés de ces mêmes lignes.

Les volumes de deux prismes ou de deux pyramides semblables sont, de plus, entre eux comme les cubes de leurs hauteurs, et leurs surfaces latérales ou totales comme les carrés de ces dimensions. Quand ces polyèdres sont réguliers et semblables (892), leurs volumes sont encore entre eux comme les cubes des rayons des cercles circonscrits ou inscrits aux bases, et leurs surfaces latérales ou totales comme les carrés de ces rayons (700).

913. *Volume d'un tas de pierres* et *capacité d'un tombereau.* Un amas de pierres concassées destinées à l'entretien d'une route a pour bases inférieure et supérieure des rectangles, et son volume est

Fig. 131.



$$V = \frac{h}{6}\left[b\,(2a + a') + b'\,(2a' + a)\right]$$

h est la hauteur du tas, c'est-à-dire la perpendiculaire abaissée d'un point du plan de sa base supérieure sur le plan de sa base inférieure ; a et b sont les dimensions de la base inférieure, et a' et b' celles de la base supérieure.

A l'aide de la formule précédente on calcule aussi la *capacité d'un tombereau.*

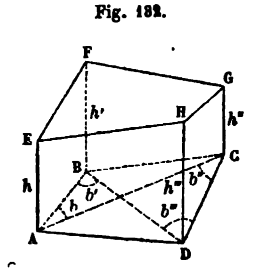
Si b' était nulle, ce qui a quelquefois lieu pour les piles de boulets, on aurait

$$V = \frac{h}{6} \times b\,(2a + a').$$

Lorsque les deux bases sont semblables, le solide est un tronc de pyramide, et son volume peut se calculer à l'aide de la formule du n° 911.

914. *Cubage des terrasses.* Pour le calcul des déblais ou remblais, on divise le volume total en parties limitées latéralement par des plans verticaux, inférieurement par un quadrilatère ABCD, et supérieurement à la surface du sol, qui n'a en général rien de géométrique, mais que l'on suppose être une surface gauche engendrée par une droite qui se meut en s'appuyant sur deux droites opposées EF, HG ou EH, FG, qu'elle divise en parties proportionnelles dans chaque position. Les points E, F, G, H, se trouvent à la surface du sol.

Fig. 182.



Le quadrilatère ABCD étant quelconque, désignant respectivement les surfaces des triangles

	ABC,	ABD,	CDA,	CDB,
par	b,	b',	b'',	b''',

le volume V du solide se calcule par la formule

$$V = \frac{b(h+h'+h'') + b'(h+h'+h''') + b''(h+h''+h''') + b'''(h'+h''+h''')}{6}.$$

Lorsque ABCD est un trapèze, AB étant parallèle à CD, on a $b = b'$ et $b'' = b'''$, et la formule précédente devient

$$V = \frac{b(2h+2h'+h''+h''') + b''(h+h'+2h''+2h''')}{6}.$$

Si ABCD est un parallélogramme, on a $b = b' = b'' = b'''$, et il vient

$$V = \frac{b(h+h'+h''+h''')}{2} = B\,\frac{h+h'+h''+h'''}{4},$$

$B = 2b$ étant la surface de la base totale ABCD.

Si, de plus, la base supérieure EFGH est plane, on a $h + h'' = h' + h'''$, et par suite,

$$V = B\,\frac{h+h''}{2} = B\,\frac{h'+h'''}{2}.$$

Quand la base ABCD se réduit à un triangle ABC, le solide devient un tronc de prisme triangulaire, et l'on a (910), B étant la surface du triangle ABC,

$$V = B\,\frac{h+h'+h''}{3}.$$

Il peut arriver que la base supérieure se réduise à une seule arête EF, les hauteurs h'' et h''' devenant nulles. Dans ce cas, selon que la base ABCD est un quadrilatère quelconque, un trapèze ou un parallélogramme, on a respectivement, en faisant $h'' = h''' = 0$ dans les formules

précédentes :

$$V = \frac{h(b+b'+b'') + h'(b+b'+b'')}{6},$$

$$V = \frac{b(2h+2h') + b''(h+h')}{6} = \frac{(h+h')(2b+b'')}{6},$$

$$V = \frac{b(h+h')}{2} = B\,\frac{h+h'}{4}.$$

Enfin si la base supérieure se réduisait à un seul point, celui E par exemple, le solide serait une pyramide, et l'on aurait (907)

$$V = B\,\frac{h}{3}.$$

LIVRE VI.

Les polyèdres réguliers et la mesure des trois corps ronds.

915. On appelle *angle solide régulier* celui qui a tous ses angles dièdres égaux et tous ses angles plans égaux (787).

916. Un *polyèdre régulier* est celui qui a tous ses angles dièdres égaux et dont toutes les faces sont des polygones réguliers égaux entre eux (714, 800). Ainsi tous les cubes sont des polyèdres réguliers.

Le *centre* et le *rayon d'un polyèdre régulier* sont le centre et le rayon de la sphère circonscrite au polyèdre. L'*apothème d'un polyèdre régulier* est le rayon de la sphère inscrite dans le polyèdre (717, 880, 885).

917. Dans tout polyèdre régulier on peut inscrire une seule sphère, et à tout polyèdre régulier on peut circonscrire une seule sphère (916).

918. Deux polyèdres réguliers de même espèce (821) sont toujours semblables (889).

919. Un polyèdre régulier a pour mesure le produit de sa surface par le tiers de son apothème (717, 916).

Tableau des cinq polyèdres réguliers qu'il est possible de construire, du nombre et de l'espèce de leurs faces, et de leur surface et volume, leur arête ou côté étant pris pour unité (719).

POLYÈDRES.	FACES.	SURFACE.	VOLUME.
Tétraèdre.	4 triangles.	1,732051	0,117851
Cube ou hexaèdre.	6 carrés.	6,000000	1,000000
Octaèdre.	8 triangles.	3,464102	0,471404
Dodécaèdre.	12 pentagones.	20,645779	7,663119
Icosaèdre.	20 triangles.	8,660254	2,181695

D'après ce tableau, l'octaèdre régulier de $0^m,25 = 2^{dm},5$ de côté, par exemple, a par conséquent pour

surface $3,464\,102 \times (2,5)^2 = 21^{dmq},6506$,

et pour volume $0,471\,404 \times (2,5)^3 = 7^{dmc},365\,687$.

920. Deux cylindres ou deux cônes droits à bases circulaires sont semblables, lorsque la hauteur h et le rayon r de la base de l'un sont proportionnels à la hauteur h' et au rayon r' de la base de l'autre, c'est-à-dire quand on a

$$h : h' = r : r'.$$

921. Deux sphères sont toujours semblables.

922. *La surface latérale d'un cylindre quelconque* (834, 840) *a pour mesure* le produit du périmètre de sa base par sa hauteur. Ainsi, pour un cylindre droit à base circulaire dont $R = 0^m,10$ est le rayon de la base et $H = 4^m,25$ la hauteur, la surface latérale est (727)

$$S = 2\pi RH = 2 \times 3,1416 \times 0,1 \times 4,25 = 2^{mq},67.$$

On peut encore prendre pour mesure de la surface latérale d'un cylindre quelconque le produit du contour de la section droite par la longueur de la génératrice (841, 906).

923. *Un fuseau cylindrique a pour mesure* le produit de sa base par sa hauteur (852).

924. Le *volume d'un cylindre quelconque* est, comme celui du prisme (905), égal au produit de sa base par sa hauteur. Ainsi, pour un cylindre droit à base circulaire, les données du nº 922 fournissent (728)

$$V = \pi R^2 H = 3,1416 \times 0,1 \times 0,1 \times 4,25 = 0^{mc},134.$$

925. *Un onglet cylindrique a pour mesure* le produit de sa base par sa hauteur (853).

926. *La surface latérale d'un cône droit à base circulaire a pour mesure* la moitié du produit de la circonférence de sa base par son côté (692).

Ainsi, $R = 0^m,20$ étant le rayon de la base et $C = 0^m,9$ le côté, la surface latérale est (727)

$$S = \pi RC = 3,1416 \times 0,2 \times 0,9 = 0^{mq},5655.$$

927. *Un fuseau conique a pour mesure* la moitié du produit de sa base par son côté (852).

928. *Le volume d'un cône quelconque* est, comme celui de la pyramide (907), égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur. Pour un cône droit à base circulaire dont le rayon R de la base est $0^m,25$, et dont la hauteur $H = 1^m,20$, on a (728)

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\,3,1416 \times 0,25 \times 0,25 \times 1,20 = 0^{mc},078\,54.$$

Ainsi le volume du cône est le tiers de celui d'un cylindre de base équivalente et de même hauteur (924).

929. *Un onglet conique a pour mesure* le tiers du produit de sa base par sa hauteur (853).

930. Deux cylindres ou deux cônes quelconques sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs (924, 928). S'ils ont même hauteur, ils sont entre eux comme leurs bases; si leurs bases sont équivalentes, ils sont entre eux comme leurs hauteurs, et s'ils ont des hauteurs égales et des bases équivalentes, ils sont équivalents.

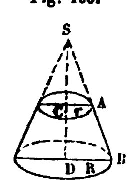
931. Deux cylindres ou deux cônes droits à bases circulaires semblables (920) sont entre eux comme les cubes de leurs hauteurs, de leurs côtés, et encore des rayons et des diamètres de leurs bases:

$$\frac{V}{V'} = \frac{H^3}{H'^3} = \frac{C^3}{C'^3} = \frac{R^3}{R'^3} = \frac{D^3}{D'^3}.$$

Les surfaces latérales et les surfaces totales de ces cylindres ou de ces cônes sont entre elles comme les carrés de ces mêmes lignes.

932. *La surface latérale d'un tronc de cône droit à bases parallèles* (838) *a pour mesure* le produit de son côté par la demi-somme des circonférences de ses bases, ou, autrement, le produit de son côté par la circonférence de la section faite à égale distance des deux bases (697). $C = 0^m,60$ étant le côté du tronc de cône, et $R = 0^m,40$ et $r = 0^m,25$ étant les rayons de ses bases, sa surface latérale est donc (727)

Fig. 133.



$$S = C\,\frac{2\pi R + 2\pi r}{2} = C\pi(R + r) = 0,6 \times 3,1416(0,40 + 0,25) = 1^{mq},225.$$

933. Un tronc de cône quelconque à bases parallèles est équivalent à la somme des trois cônes qui ont pour hauteur commune la hauteur du tronc, et pour bases respectives: la base inférieure du tronc, la base supérieure et une moyenne proportionnelle entre ces deux bases (911). $R = 0^m,40$ et $r = 0^m,25$ étant les rayons des bases, et $H = 0^m,50$ la hauteur, le volume du tronc est (928)

$$V = \frac{1}{3}\,H\pi R^2 + \frac{1}{3}\,H\pi r^2 + \frac{1}{3}\,H\,\sqrt{\pi R^2 \times \pi r^2} = \frac{1}{3}\,\pi H(R^2 + r^2 + Rr) =$$

$$\frac{1}{3}\,3,1416 \times 0,5\left(\overline{0,4}^2 + \overline{0,25}^2 + 0,4 \times 0,25\right) = 0^{mc},169.$$

934. La surface engendrée par la base BC d'un triangle isocèle ABC, qui fait une révolution entière autour d'une droite MN menée par son sommet dans son plan et hors du triangle, a pour mesure la projection $PQ = p$ de la base du triangle sur l'axe, multipliée par la circonférence $2\pi r_1$, qui a pour rayon la hauteur $AD = r_1$ du triangle. Ainsi l'on a (689, 727)

Fig. 134.

$$s = p \times 2\pi r_1.$$

La surface décrite par la base d'un secteur polygonal régulier a la même expression; seulement p est la projection de toute la base du secteur sur l'axe.

935. *Une zone a pour mesure* le produit de sa hauteur H par la circonférence $2\pi R$ d'un grand cercle (854, 876, 878). Ainsi, pour $H = 0^m,30$, le rayon R de la sphère étant $0^m,40$, on a

$$S = 2\pi RH = 2 \times 3,1416 \times 0,4 \times 0,3 = 0^{mq},754.$$

936. Sur une même sphère, deux zones sont entre elles comme leurs hauteurs, et sur des sphères de rayons différents, deux zones de même hauteur sont entre elles comme les rayons ou comme les diamètres des sphères (935).

937. *La surface* S *de la sphère* dont le diamètre est $2R = D = 0^m,80$, considérée comme une zone, *a pour mesure* (935)

$$S = 2\pi R \times 2R = 4\pi R^2 = \pi D^2 = 3,1416 \times 0,8 \times 0,8 = 2^{mq},01.$$

Ce qui fait voir que la surface de la sphère est égale à 4 grands cercles, ou encore à celle d'un cercle qui a pour rayon le diamètre de la sphère (728).

938. *Les surfaces* S *et* s *de deux sphères sont entre elles comme les carrés de leurs rayons* R et r *ou de leurs diamètres* D et d. Ayant (937)

$$S = 4\pi R^2 \quad \text{et} \quad s = 4\pi r^2,$$

on a bien

$$S : s = R^2 : r^2 = D^2 : d^2.$$

939. *Un fuseau sphérique a pour mesure* le produit de l'arc a correspondant à son angle par le diamètre 2R de la sphère (860, 895).

L'angle correspondant étant de 30° et le rayon de la sphère étant $0^m,40$, on a (733)

$$a = 2\pi R \frac{30}{360} = 0^m,21.$$

Par suite, la surface du fuseau est

$$S = 2Ra = 2 \times 0,4 \times 0,21 = 0^{mq},168.$$

940. *Tout triangle sphérique* (864) *a pour mesure* le produit du rayon R de la sphère par l'excès de la somme des arcs a, b, c correspondants à ses angles sur une demi-circonférence (872, 897). Ainsi la surface du triangle est

$$S = R(a + b + c - \pi R).$$

941. *Tout polygone sphérique a pour mesure* le produit du rayon de la sphère par l'excès de la somme des arcs correspondants à ses angles sur autant de fois une demi-circonférence qu'il a de côtés moins deux (900, 940).



942. Le solide engendré par un triangle quelconque ABC, qui fait une révolution entière autour d'une droite MN menée par son sommet dans son plan et hors du triangle, a pour mesure la surface décrite par la base BC, multipliée par le tiers de la hauteur $AD = h$ du triangle.

Fig. 135.

La surface décrite par la base du triangle est la surface latérale d'un tronc de cône dans la figure 135 (932); c'est celle d'un cône lorsque AC ou AB se confond avec MN (926), et celle d'un cylindre quand BC est parallèle à MN (922). Dans tous les cas on sait mesurer cette surface, et si on la désigne par S, le volume engendré par le triangle ABC a pour expression $V = \frac{1}{3} Sh$.

943. *Le solide engendré par un triangle isocèle* ABC (*fig.* 134), qui fait une révolution entière autour d'une droite MN menée par son sommet dans son plan et hors du triangle, *a pour mesure* la projection p de sa base BC sur l'axe MN, multipliée par les deux tiers du cercle qui a pour rayon sa hauteur $AD = r_1$. Ainsi l'on a (728)

$$V = p \times \frac{2}{3} \pi r_1^2.$$

944. *Le solide engendré par un secteur polygonal régulier*, qui fait une révolution entière autour d'une droite menée par son sommet dans son plan et hors du secteur, *a pour mesure* la projection p de sa base sur l'axe, multipliée par les deux tiers du cercle inscrit à cette base. Le secteur peut être un demi-polygone tournant autour de son diamètre. Dans tous les cas, r_1 étant le rayon du cercle inscrit, le volume engendré est

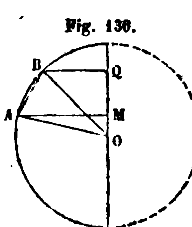
$$V = p \times \frac{2}{3} \pi r_1^2.$$

945. *Expression du volume engendré par un polygone régulier dans une révolution autour d'un de ses côtés comme axe :* 1° en fonction de son rayon R; 2° en fonction de son côté c (719).

Triangle	$\frac{3}{4} \pi R^3 \sqrt{3}$	$\frac{1}{4} \pi c^3$
Carré	$2\pi R^3 \sqrt{2}$	πc^3
Pentagone	$\frac{5}{4} \pi R^3 \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4} \pi c^3 (5 + 2\sqrt{5})$
Hexagone.	$\frac{9}{2} \pi R^3$	$\frac{9}{2} \pi c^3$
Octogone	$2\pi R^3 \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$	$2\pi c^3 (3 + 2\sqrt{2})$
Décagone.	$\frac{5}{2} \pi R^3 \sqrt{5}$	$\frac{5}{2} \pi c^3 (5 + 2\sqrt{5})$
Dodécagone.	$\frac{3}{2} \pi R^3 (\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$3\pi c^3 (7 + 4\sqrt{3})$

946. On nomme *secteur sphérique* le solide engendré par un secteur circulaire OAB qui fait une révolution entière autour d'un diamètre OQ non intérieur au secteur et situé dans son plan. *La base du secteur sphérique* est la zone décrite par la base AB du secteur circulaire générateur (876).

Fig. 130.



Tout secteur sphérique a pour mesure la hauteur H = MQ de la zone qui lui sert de base, multipliée par les deux tiers d'un grand cercle (944). Pour H = $0^m,30$, le rayon du secteur étant R = $0^m,40$, le volume du secteur est (728)

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H = \frac{2}{3}\,3,1416 \times 0,4 \times 0,4 \times 0,3 = 0^{mc},1005.$$

947. Considérant la sphère comme étant un secteur sphérique dont la hauteur de la zone qui lui sert de base est égale au diamètre 2R = D, on conclut du numéro précédent *qu'une sphère a pour mesure* le produit de son diamètre par les deux tiers d'un grand cercle. Ainsi 2R = D = $0^m,80$ étant le diamètre de la sphère, son volume est

$$V = 2R \times \frac{2}{3}\pi R^2 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3 = \frac{1}{6}\,3,1416 \times \overline{0,8}^3 = 0^{mc},268.$$

948. On peut dire aussi que *tout secteur sphérique a pour mesure* le tiers du produit de la zone qui lui sert de base par le rayon. Ainsi (935)

$$V = \frac{1}{3} \times 2\pi RH \times R = \frac{2}{3}\pi R^2 H.$$

Même valeur qu'au n° 946.

949. De même, on peut dire *qu'une sphère a pour mesure* le tiers du produit de sa surface par son rayon. Ainsi (937)

$$V = \frac{1}{3} \times 4\pi R^2 \times R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Même valeur qu'au n° 947.

Remplaçant dans la formule précédente R en fonction de la surface S (937), on en conclut pour la relation entre la surface et le volume de la sphère

$$S^3 = 36\pi V^2.$$

950. *Deux sphères sont entre elles comme les cubes des rayons ou des diamètres.* V et v étant les volumes de deux sphères, on a (947)

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{et} \quad v = \frac{4}{3}\pi r^3;$$

d'où l'on conclut bien

$$V : v = R^3 : r^3 = D^3 : d^3. \qquad (938)$$

951. *Un onglet sphérique a pour mesure* l'arc a correspondant à son angle, multiplié par les deux tiers du carré du rayon R. Ainsi

$$V = \frac{2}{3} aR^2. \qquad (896, 939)$$

952. *Toute pyramide sphérique a pour mesure* le produit $B \times \frac{1}{3} R$, de sa base par le tiers du rayon (867, 900, 941).

953. *Le solide engendré par un segment circulaire* CDm, qui fait une révolution entière autour d'un diamètre AB situé hors du segment, *a pour mesure* la projection $PQ = p$ de sa base $CD = b$ sur l'axe, multipliée par le sixième du cercle dont cette base est le rayon. Ainsi l'on a (728)

Fig. 137.

$$V = p \times \frac{1}{6} \pi b^2.$$

954. *Tout segment sphérique a pour mesure* la demi-somme de ses bases multipliée par sa hauteur, plus le volume de la sphère dont cette hauteur est le diamètre. Ainsi H étant la hauteur, et r et r' les rayons des bases, on a (728, 877, 947)

$$V = \frac{\pi r^2 + \pi r'^2}{2} H + \frac{1}{6} \pi H^3 = \frac{\pi H}{2} (r^2 + r'^2) + \frac{1}{6} \pi H^3.$$

Quand le segment n'a qu'une base, il faut remplacer dans la mesure précédente la demi-somme des bases par la demi-base, et l'on a

$$V = \frac{1}{2} \pi r^2 H + \frac{1}{6} \pi H^3.$$

Considérant la sphère comme étant un segment dont la hauteur H est le diamètre 2R de la sphère, le premier terme de la valeur de V est nul, et le second donne

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Comme au n° 947.

955. *Un cylindre droit est équilatéral* lorsque sa hauteur est égale au diamètre de sa base (834).

956. *Un cône droit est équilatéral* lorsque son côté est égal au diamètre de sa base (835).

957. *Un cylindre droit est inscrit dans une sphère* lorsqu'il a pour bases deux petits cercles de la sphère (854).

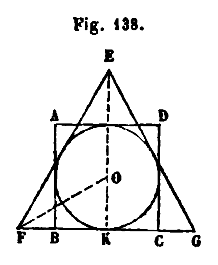
Un cylindre équilatéral ADBC *est circonscrit à une sphère* (*fig.* 138) lorsqu'il a pour axe un diamètre de la sphère.

958. *Un cône est inscrit dans une sphère* lorsque son sommet et la circonférence de sa base sont situés sur la sphère.

Un cône équilatéral EFG *est circonscrit à la sphère* (*fig.* 138) lorsqu'il a pour axe la hauteur d'un triangle équilatéral circonscrit à un grand cercle de la sphère.

959. *Les surfaces totales de la sphère, du cylindre et du cône équilatéraux circonscrits sont entre elles comme les nombres* 4, 6, 9; *et leurs volumes sont entre eux comme ces mêmes nombres* (922, 924, 926, 928, 937, 947).

Fig. 138.



Remarques. 1° La surface latérale du cylindre est équivalente à la surface totale de la sphère; 2° la surface totale du cylindre est moyenne proportionnelle entre celles de la sphère et du cône (316); 3° le volume du cylindre est moyen proportionnel entre ceux de la sphère et du cône.

960. *Les surfaces totales de la sphère, du cylindre et du cône équilatéraux inscrits sont entre elles comme les nombres* 16, 12, 9; *et leurs volumes sont entre eux comme les nombres* 32, $12\sqrt{2}$ et 9.

Ainsi la surface totale du cylindre est encore moyenne proportionnelle entre celles de la sphère et du cône; et son volume est moyen proportionnel entre ceux de ces mêmes corps.

961. On donne le nom de *jauge* à un ruban portant l'une à côté de l'autre, et de manière que les zéros se correspondent, deux échelles, divisées l'une en centimètres pour mesurer les longueurs, et l'autre en parties égales chacune à 3 centimètres et $\frac{1}{7}$ ou $\frac{22}{7}$ de centimètre; d'où il résulte qu'en enroulant la jauge sur une circonférence, la 1re échelle donne la longueur de cette circonférence et la seconde indique directement quel est son diamètre en centimètres (727). Cette jauge permet de déterminer avec la plus grande facilité le diamètre d'une colonne, d'un arbre, d'un tonneau, par exemple, en un point quelconque de leur longueur.

962. *Jaugeage d'un tonneau.* En négligeant le bombement des douves, on peut considérer le tonneau comme composé de deux troncs de cône ayant pour grande base commune la section au centre du tonneau, et pour petite base les fonds du tonneau. On peut alors déterminer sa capacité d'après ce qui a été dit au n° 933. Si l'on voulait une plus grande approximation, on diviserait le tonneau en un plus grand nombre de troncs de cône.

En Angleterre, on évalue la capacité V d'un tonneau à l'aide de la formule d'*Oughtred*, qui consiste à remplacer dans l'expression du volume des deux troncs de cône, le produit Rr par R^2; cette formule est, en appelant H la longueur intérieure du tonneau

$$V = \frac{1}{3}\pi H(2R^2 + r^2).$$

En France, on fait usage de la formule de *Dez*, qui consiste à prendre pour la capacité d'un tonneau la valeur d'un cylindre ayant pour hauteur H la longueur du tonneau, et pour rayon l'excès du rayon intérieur R du tonneau à la bonde sur les $\frac{3}{8}$ de la différence $R - r$; cette

formule, qui donne des résultats un peu moindres que la précédente, est (924)

$$V = \pi H \left[R - \frac{3}{8}(R - r) \right]^2.$$

Dans la pratique, on prend encore pour la capacité V d'un tonneau celle d'un cylindre de même longueur H que le tonneau, et ayant pour base un cercle dont le diamètre est $\delta = \frac{d + 2D}{3}$, d étant le diamètre des fonds du tonneau (ou la moyenne des diamètres des fonds si ces fonds sont différents) et D le *bouje* ou le diamètre au centre du tonneau. On a ainsi

$$V = \frac{1}{4}\pi\delta^2 H = \frac{1}{36}\pi(d + 2D)^2 \times H.$$

Le diamètre D se détermine au moyen de la jauge, en tenant compte de l'épaisseur des douves, qui varie de $0^m,01$ à $0^m,02$ pour les fûts ordinaires, ou en introduisant par la bonde une règle graduée dans le tonneau. H est la longueur totale du tonneau diminuée de l'épaisseur des fonds, qui est à peu près celle des douves, et des *jables* ou quantité dont les douves dépassent les fonds.

La formule précédente donne les dimensions du tableau suivant pour des tonneaux de diverses capacités. Le *tonneau* ordinaire équivaut à 2 hectolitres et 1/5 ou 220 litres.

CAPACITÉS V EN			DIAMÈTRE d	DIAMÈTRE D	LONGUEUR H
tonneaux.	hectolitres.	litres.			
			mèt.	mèt.	mèt.
»	0,5	50	0,30	0,33	0,622
»	1	100	0,40	0,44	0,699
0,5	»	110	0,40	0,44	0,769
»	2	200	0,52	0,62	0,740
1	»	220	0,52	0,62	0,813
»	3	300	0,58	0,68	0,913
1,5	»	330	0,59	0,71	0,936
»	4	400	0,65	0,77	0,956
2	»	440	0,68	0,78	1,005
»	5	500	0,68	0,80	1,102
2,5	»	550	0,69	0,81	1,181
»	10	1000	0,89	1,09	1,217
5	»	1100	0,90	1,10	1,312
»	20	2000	1,10	1,30	1,674
10	»	2200	1,12	1,32	1,788
»	50	5000	1,60	1,86	2,024
25	»	5500	1,62	1,88	2,177
»	100	10000	2,30	2,54	2,104
50	»	11000	2,40	2,64	2,137
»	200	20000	2,80	2,98	2,986
100	»	22000	2,90	3,10	3,047

Jaugeage d'un tonneau en vidange. On introduit par la bonde une règle graduée, qui donne le grand diamètre D du tonneau et la profondeur p du liquide; on détermine le rapport $\frac{p}{D}$; on cherche dans le tableau ci-contre la contenance v qui correspond à ce rapport, et cette contenance multipliée par la capacité totale V du tonneau consignée au tableau précédent, donne la quantité v' du liquide contenue dans le tonneau.

$\frac{p}{D}$	Contenance v celle V étant 1.
1,0	1,000
0,9	0,950
0,8	0,860
0,7	0,750
0,6	0,630
0,5	0,500
0,4	0,370
0,3	0,250
0,2	0,140
0,1	0,050

Pour $D = 0^m,80$ et $p = 0^m,32$, par exemple, on a $\frac{p}{D} = \frac{0,32}{0,80} = 0,4$, et, par suite, si le tonneau est celui du tableau précédent dont $D = 0^m,80$,

$$v' = Vv = 500 \times 0,37 = 185 \text{ litres.}$$

Pour $D = 0^m,80$ et $p = 0^m,27$, on a $\frac{p}{D} = \frac{0,27}{0,80} = 0,3375$. Le tableau ne contient pas la valeur correspondante de v; pour la déterminer, on a recours à la méthode des différences proportionnelles (400, 730), qui donne

$$v = 0,250 + (0,370 - 0,250)\frac{0,0375}{0,1} = 0,250 + 0,045 = 0,295.$$

On a ensuite

$$v' = Vv = 500 \times 0,295 = 147^l,5.$$

Au lieu de déterminer la quantité de liquide restant dans le tonneau, on aurait pu, par la même marche, déterminer le volume du vide, c'est-à-dire du liquide soutiré.

Capacités ordinaires des fûts les plus usités dans le commerce:

FUTS.	CAPACITÉS en litres.
Pièce Renaison, Sancerre.	210
— Mâcon, Charlieu.	212
— Beaujolais, Pouilly-sur-Loire, Marseille.	215
— Gaillac, Riceys, Auvergne, Cahors.	220
— La Chaise, Bordeaux.	225
— Bordeaux, Beaune, Châlon, Chinon.	228
— Orléans, Sologne, Anjou, Gâtinais, Nantais.	230
— Beaugency, Loiret.	236
— Cher, Vouvray, Touraine.	250
Muid de Bourgogne (2 feuillettes).	272
Demi-muid de Languedoc.	380 à 600
Pipe d'Armagnac.	380 à 400
Pièce de rhum.	310 à 440
Sixain de Malaga.	110 à 120
Quartaut de Madère.	110 à 125
Busse d'Anjou.	220 à 230
— de Cognac.	224 à 240
Barrique de Cognac.	310 à 340
— de Bayonne.	315 à 330
Longuette de Jarnac.	200 à 210
Quart de Bière.	75

Les employés de l'octroi de Paris prennent pour δ une valeur qui diffère un peu de la précédente, elle est

$$\delta = d + (D - d) \times 0{,}56\,; \quad \text{d'où} \quad V = \frac{1}{4}\pi\delta^2 H = \frac{1}{4}\pi[d + (D-d)0{,}56]^2 H.$$

Cette formule, qui donne pour V des valeurs un peu plus faibles que la précédente, paraît bien s'accorder avec les résultats fournis par le *dépotage* des fûts les plus usités.

Le dépotage consiste à laisser écouler le contenu d'un fût dans un vase cylindrique métallique, contre la paroi extérieure duquel est fixé un tube en cristal qui communique avec le vase le niveau du liquide se voit dans le tube, et une échelle graduée fixée à côté du tube indique la quantité de liquide versé dans le vase. Le service de l'entrepôt de Paris exige un grand nombre de ces vases à dépoter, dont plusieurs jaugent chacun jusqu'à 800 litres à la fois.

Le facteur constant 0,56 suppose que les douves affectent une courbure parabolique dans le sens de leur longueur, ce qui est la forme la plus habituelle des fûts. Selon que la courbure se rapprocherait de l'ellipse ou de l'hyperbole, ce facteur deviendrait 0,59 ou 0,50.

Si tous les tonneaux étaient semblables, une seule règle ou jauge, convenablement graduée, portée sur une dimension du tonneau, suivant le diamètre d, par exemple, indiquerait directement quel est le contenu du tonneau, sans exiger aucun calcul. Il a été reconnu que les fûts usités pouvaient se diviser en 16 espèces distinctes par leurs

formes, et l'on a établi une jauge pour chaque forme. 10 de ces jauges sont indiquées par des clous implantés dans les quatre faces d'une règle carrée en bois, appelée *petite jauge*, et qu'on emploie pour les plus petits barils jusqu'aux muids de 500 litres et même plus. Les 6 autres jauges sont gravées à l'aide de clous sur les 6 faces d'une règle à 6 pans, dite *grande jauge*.

Les employés des contributions indirectes font encore usage d'une jauge, dite *diagonale*, qui consiste en une simple règle carrée en fer, qu'on introduit diagonalement par la bonde de manière à reposer son extrémité dans l'angle formé par les douves et le fond. On prend la mesure juste au-dessous du bois et au milieu de la bonde; cette mesure est indiquée sur la règle. Il convient de déterminer la mesure pour les deux côtés du tonneau, et de prendre la moyenne des deux résultats obtenus. Cette jauge ne peut donner des résultats à peu près satisfaisants que pour des fûts de formes semblables; elle ne s'emploie aujourd'hui que pour des fûts d'une capacité qui ne dépasse pas 160 litres.

963. *Cubage des bois*. On appelle *bois en grume*, les bois encore revêtus de leur écorce, dont l'épaisseur est moyennement de $0^m,015$ pour le chêne. Comme une pièce de bois en grume a la forme d'un tronc de cône, son volume total se détermine à l'aide de la formule du n° 933.

On se contente, le plus souvent, de prendre pour ce volume total le produit de la section de l'arbre au milieu de sa longueur par cette longueur. La *jauge* (961) permet de déterminer facilement la circonférence et le diamètre de l'arbre en un point quelconque de sa longueur; et du diamètre on déduit la section (728, 730). D étant le diamètre moyen de l'arbre, écorce déduite, et H sa longueur, son volume V est ainsi (924)

$$V = \frac{\pi D^2}{4} H = 0,7854 D^2 H. \qquad (a)$$

La mise en œuvre exige que l'on équarrisse les bois en grume. Si la pièce de bois qu'on tire d'un arbre devait être tout à fait prismatique, sa base serait le carré inscrit dans la plus petite base de l'arbre. Dans la pratique, on équarrit l'arbre d'après le carré inscrit dans la section faite au milieu de la longueur de l'arbre. La surface du carré inscrit dans le cercle de diamètre moyen D étant $\frac{D^2}{2}$ (n° 719), le volume V' de l'arbre équarri est

$$V' = \frac{D^2}{2} H = 0,5 D^2 H. \qquad (b)$$

On a ainsi $\frac{V'}{V} = \frac{2}{\pi} = \frac{100}{157}$; d'où il résulte qu'il ne faudrait que $1^{mc},570$ de bois en grume pour obtenir $1^{mc},000$ de bois équarri; mais on compte généralement sur $1^{mc},660$ à cause de l'irrégularité des bois.

Les employés de l'octroi de Paris suivent la règle précédente, ou la suivante, qui consiste à prendre la circonférence moyenne de l'arbre, à en retrancher le *dixième*, et à adopter 1/4 du reste pour le côté de l'é-

quarrissage. On a ainsi

$$V' = \left(\frac{\pi D(1-0,1)}{4}\right)^2 \times H = 0,5D^2H.$$

La formule usitée dans l'artillerie est, C étant la circonférence de l'arbre au milieu de sa longueur,

$$V' = \frac{C^2}{25} H = \frac{\pi^2 D^2}{25} H = 0,3948\,D^2H.$$

Ce cube, qui est a peu près la moitié du cube réel (*a*) de l'arbre, est sensiblement à celui (*b*) du commerce dans le rapport 4 : 5.

L'épaisseur de l'aubier étant à peu près 1/5 du rayon dans les chênes de grosseur ordinaire, il en résulte que le cercle $\pi \frac{16}{25} R^2$ de bois vif est à peu près les $\frac{2}{3}$ du cercle πR^2 de l'arbre, et que $1^{mc},000$ de bois vif exige environ $1^{mc},500$ de bois avec aubier (214, 217, 223).

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE.

DESSIN DES FIGURES (*).

964. Lorsque les figures ne servent qu'à aider à suivre les raisonnements d'un théorème ou les constructions à faire pour arriver à la solution d'un problème, elles n'ont pas besoin d'être exécutées avec une grande précision, et l'on se contente en général d'en faire un *croquis*, c'est-à-dire de les dessiner à main levée sur le tableau, l'ardoise ou le papier. Mais lorsqu'elles doivent fournir la grandeur exacte ou même relative de leurs parties, données dans l'énoncé ou trouvées comme solution, on est obligé, pour les dessiner, d'avoir recours à des instruments.

965. Les instruments essentiels, et à l'aide desquels on peut tracer toutes les figures de géométrie élémentaire, sont la *règle* et le *compas*. Le premier sert à tracer les lignes droites, le second les arcs de cercle, et par leur usage combiné on trace les angles. Les lignes droites et les

(*) Nous ne pouvons trop engager à dessiner avec soin les constructions que nécessitent ces problèmes; c'est le meilleur moyen pour arriver à se servir des instruments avec habileté et à faire des dessins exacts. (Voir *Notions de dessin.*)

angles ou arcs de cercle sont les éléments qui déterminent les grandeurs ou proportions des figures de géométrie.

966. Pour simplifier les dessins et en rendre l'exécution plus rapide, on a imaginé d'autres instruments, qui sont l'*équerre*, le *rapporteur* et le *compas de réduction*. L'équerre est employée pour tracer les perpendiculaires, les parallèles, et en général toutes les lignes droites.

Le rapporteur sert à mesurer la grandeur d'un angle ou de l'arc qui lui correspond, ou encore à tracer un angle d'une grandeur déterminée, et en général à combiner des angles donnés par voie d'addition et de soustraction.

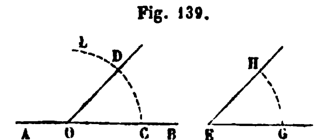
Le compas de réduction est employé pour prendre une longueur qui soit à une longueur donnée dans un rapport déterminé (292), et, par suite, simultanément avec la règle et le compas, pour construire une figure semblable à une figure donnée (665), et dont les côtés soient aux côtés homologues de cette dernière dans un rapport déterminé.

Remarque. Pour qu'un point soit convenablement déterminé par la rencontre de deux lignes, l'angle de ces deux lignes ne doit pas être trop aigu. C'est une considération qu'il ne faut jamais oublier dans le choix des lignes de construction. De plus, si l'on a à raccorder une droite avec une courbe, pour la bonne et facile exécution du dessin, il convient de tracer la courbe avant la ligne droite.

ANGLES. TRIANGLES. PERPENDICULAIRES. PARALLÈLES.

967. *Pour construire un angle égal à un angle donné* E, du point E comme centre, avec un rayon arbitraire, on décrit l'arc correspondant GH ; du sommet O qu'on veut donner à l'angle à construire, avec le même rayon, on décrit l'arc indéfini CL ; on prend CD = GH, on mène OD, et l'angle DOC est égal à l'angle E (636).

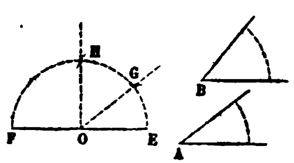
Fig. 139.



Remarque. A l'aide du rapporteur, on construira facilement l'angle O. On peut le construire aussi en menant avec l'équerre, par le point O, des parallèles aux côtés de l'angle E.

968. *Pour construire un angle égal à la somme de deux angles donnés* A, B, on construit (967) GOE = A, puis HOG = B, et l'on a HOE = A + B.

Fig. 140.



En opérant de la même manière, on peut obtenir la somme d'un nombre quelconque d'angles donnés, et en général combiner des angles par voie d'addition ou de soustraction.

Pour avoir le supplément d'un angle GOE, on prolonge le côté EO, et l'angle GOF satisfait à la question (579).

Pour avoir le complément, on mène OH perpendiculaire à OE (973), et GOH est l'angle demandé.

A *et* B *étant deux des angles d'un triangle*, *pour avoir le* 3ᵉ, on construit HOE = A + B, et HOF est l'angle cherché (618).

969. *Étant données deux côtés* a *et* b *d'un triangle, et l'angle* C *qu'ils comprennent*, *pour construire le triangle* (626), on fait un angle égal à l'angle C; sur ses côtés on prend CB = a et CA = b, et menant AB, ABC est le triangle demandé (620).

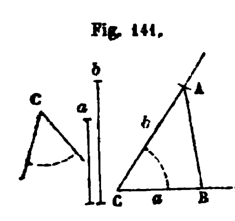


Fig. 141.

On suit la même marche pour construire un parallélogramme dont on a un angle et les deux côtés adjacents.

970. *Pour construire un triangle dont on connaît un côté* a *et les deux angles adjacents* B et C (626), on trace BC = a; puis on fait l'angle ABC = B et ACB = C, et le point A détermine le triangle demandé ABC (620).

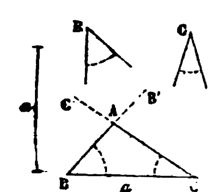


Fig. 142.

Si l'un des angles donnés était opposé au côté a, on déterminerait le troisième angle du triangle (968), et le problème serait ramené au précédent.

971. *Les trois côtés* a, b, c *d'un triangle étant donnés*, *pour construire le triangle* (626), on trace BC = a; des points B et C comme centres, avec c et b pour rayons, on décrit deux arcs de cercle qui se coupent en A, et menant AB, AC, le triangle ABC satisfait à la question (620).

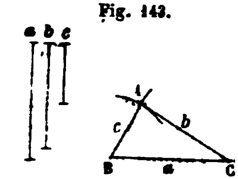


Fig. 143.

972. *Étant donnés deux côtés* a, b *d'un triangle, et l'angle* A *opposé à l'un d'eux, pour construire le triangle*, on construit l'angle donné A (*fig.* 144, 145 et 146); sur l'un des côtés de cet angle on prend AC = b; du point C comme centre, avec a pour rayon, on décrit un arc de cercle qui coupe AB en des points B, B', lesquels étant joints au point C fournissent un ou deux triangles satisfaisant à la question (626).

1° Lorsque A est droit ou obtus, B est aigu (618), et l'on a $a > b$ (603); alors l'arc BB' rencontre AB en deux points; mais le triangle ABC satisfait seul à la question, car dans le triangle AB'C l'angle A est le supplément de l'angle donné.

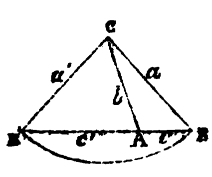


Fig. 144.

2° L'angle A étant aigu (*fig.* 145), si l'on a $a > b$, d'où A > B, il y a encore une seule solution, qui est le triangle ABC. En effet, dans le triangle AB'C, qui a a et b pour côtés, l'angle A est obtus. Dans le cas où A étant aigu, on a $a = b$, B' tombe en

Fig. 145.

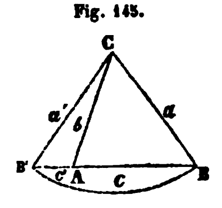
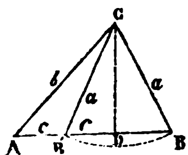


Fig. 146.



A, et l'on obtient pour unique solution le triangle isocèle ABC.

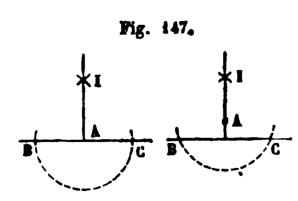
3° Quand A est aigu et que l'on a $a < b$, d'où $A < B$, il en résulte que B peut être aigu et obtus, et il y a deux solutions (*fig.* 146). Dans le triangle ABC, qui satisfait à l'énoncé, l'angle B est aigu; dans celui AB'C, qui satisfait également à l'énoncé, l'angle $B' = 180° - B$ est obtus.

Il y a deux solutions tant que $a < b$ est plus grand que la perpendiculaire CD.

Lorsque $a < b$ est égal à CD, l'arc BB' est tangent à AB au point D, et les deux triangles ABC, AB'C coïncident avec le triangle rectangle ADC, qui est l'unique solution.

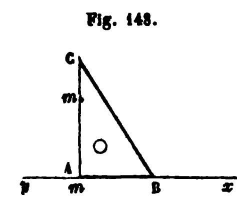
973. *Mener par un point donné* A *une perpendiculaire à une droite donnée* BC. Du point A, situé sur BC ou hors de BC, comme centre, avec un rayon suffisamment grand, on décrit un arc de cercle qui détermine les points B et C également distants de A; puis des points B et C comme centres, avec un rayon suffisamment grand, on décrit deux arcs de cercle qui se coupent au point I, qui est également distant de B et C; alors menant AI, cette droite est la perpendiculaire demandée (584).

Fig. 147.



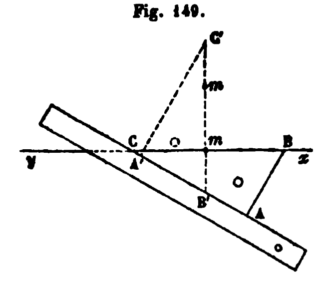
Pour résoudre le même problème en faisant usage de l'équerre, *m* étant le point par lequel on veut mener une perpendiculaire à la droite *xy*, on fait coïncider l'arête d'une règle avec *xy*; puis, appliquant un des côtés de l'angle droit d'une équerre ABC contre la règle, on la fait glisser jusqu'à ce que l'autre côté de l'angle droit passe par le point *m*, et la droite AC tracée le long de ce côté est la perpendiculaire demandée.

Fig. 148.



Il est préférable de faire coïncider l'hypoténuse BC de l'équerre avec *xy*; d'appliquer la règle contre le côté AC de l'angle droit; puis, en tenant fixe la règle, de donner à l'équerre la position A'B'C', dans laquelle l'autre côté A'B' de l'angle droit coïncide avec la règle, et l'hypoténuse passe par le point *m*. Par ce moyen, la perpendiculaire se trace facilement jusqu'à *xy*, et même au-dessous de cette ligne.

Fig. 149.

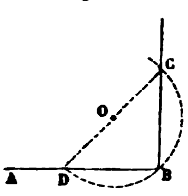


De la construction faite *fig.* 152 résulte

le moyen de mener une perpendiculaire II′ sur le milieu d'une droite AB.

974. *Élever une perpendiculaire à l'extremité* B *d'une droite* AB *qu'on ne peut prolonger.* D'un point O convenablement choisi comme centre, avec OB pour rayon, on décrit un arc de cercle; on mène DO, qu'on prolonge jusqu'en C, et la droite BC est la perpendiculaire demandée (654).

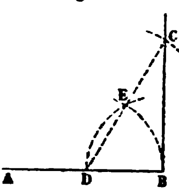
Fig. 150.



La perpendiculaire BC peut être directement menée en faisant usage de l'équerre (973).

Autre construction. De l'extrémité B comme centre, avec un rayon arbitraire, on décrit un arc de cercle; du point D comme centre, avec le même rayon, on décrit un second arc qui coupe le premier au point E; du point E comme centre, toujours avec le même rayon, on décrit un troisième arc de cercle; on mène la droite DE, que l'on prolonge jusqu'à sa rencontre avec le troisième arc en C, et traçant la droite BC, elle est la perpendiculaire demandée. En effet, si du point E comme centre, avec ED pour rayon, on décrivait une demi-circonférence, elle passerait par les trois points DBC, et l'angle B y serait inscrit (654).

Fig. 151.



975. *Diviser en deux parties égales : 1° une droite limitée* AB; *2° un arc de cercle* A*m*B; *3° un angle au centre* ACB *correspondant à l'arc* A*m*B. Des points A et B comme centres, avec un rayon convenable, qui est toujours plus grand que la moitié de AB, on décrit deux arcs de cercle qui se coupent en I et I′, et menant II′, cette droite est perpendiculaire sur le milieu de AB et résout les trois problèmes (584, 635, 636).

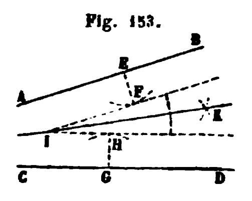
Fig. 152.

Répétant la même construction pour chaque moitié de AB, cette droite sera divisée en 4 parties égales, qui pourront à leur tour être divisées chacune en 2 parties égales, et ainsi de suite; ce qui permet de *diviser une droite en* 2^n *parties égales*, *n* étant un nombre entier (994).

Opérant de même sur chacun des arcs A*m*, *m*B comme sur l'arc AB, chacun de ces arcs ainsi que les angles AC*m*, *m*CB seront divisés en 2 parties égales, et l'on voit qu'en continuant ainsi de suite on pourra encore *diviser un arc ou un angle en* 2^n parties égales.

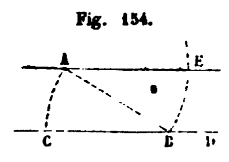
976. *Mener la bissectrice d'un angle dont on ne peut prolonger les côtés* AB, CD *jusqu'à son sommet.* On mène aux distances EF = GH des parallèles à AB et CD; l'angle de ces parallèles est égal à l'angle des deux droites données (595), et, de plus, sa bissectrice IK (975) satisfait à l'énoncé.

Fig. 153.



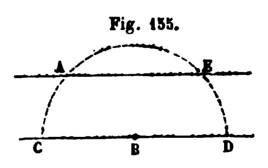
977. *Par un point* A, *pris hors d'une droite* CD, *mener une parallèle à cette droite.* Du point B pris sur CD, comme centre, avec un rayon suffisamment grand, on décrit un arc de cercle AC; du point A comme centre, avec le même rayon, on décrit un second arc de cercle, sur lequel on prend BE = AC, et la droite AE est la parallèle demandée (590, 636).

Fig. 154.



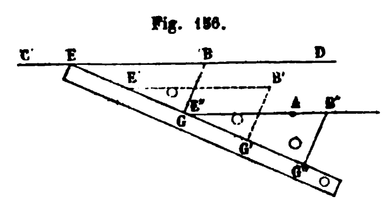
Si CD a une longueur suffisante, on prolonge l'arc CA décrit du point B comme centre jusqu'en D; on prend DE = CA, et menant AE on a la parallèle demandée (645). Cette construction n'exigeant qu'un centre, elle est pratiquement préférable à la précédente, quand elle permet de déterminer les points A et E assez espacés pour qu'on puisse tracer facilement la parallèle.

Fig. 155.



Pour résoudre le même problème au moyen de l'équerre, on fait coïncider l'hypoténuse de l'équerre BGE avec la droite CD; on applique une règle contre le côté EG, et faisant glisser l'équerre le long de la règle jusqu'à ce que l'hypoténuse passe par le point A, la droite E″B″ tracée en suivant cette hypoténuse est la parallèle demandée (590).

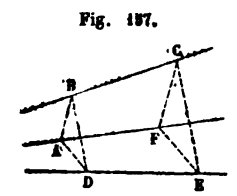
Fig. 156.



Toute autre position E'B' que prend l'hypoténuse pendant le mouvement de l'équerre est aussi parallèle à CD.

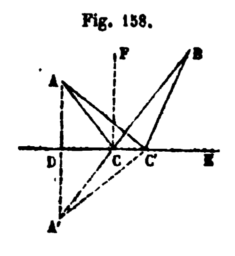
978. *Mener, par un point donné* A, *une droite qui passe par le sommet d'un angle dont on ne peut prolonger les côtés* BC, DE. On joint A à deux points B et D pris sur les côtés de l'angle, et l'on trace BD; puis, en menant CE parallèle à BD, CF à BA et EF à DA, la droite qui joint A à F satisfait à l'énoncé. Cette construction est la même quand le point A, au lieu d'être situé dans l'angle donné, est en dehors.

Fig. 157.



979. *Pour avoir le point* C, *commun à une droite* DE *et au chemin le plus court* ACB *que l'on peut tracer entre* A *et* B *en venant toucher* DE, du point A on abaisse une perpendiculaire à DE, on prend DA' = DA, et la droite A'B détermine le point C. Ainsi l'on a AC + CB < AC' + C'B. En effet, ayant AC = A'C et AC' = A'C' (584), on a AC + CB = A'B et AC' + C'B = A'C' + C'B; or ayant A'B < A'C' + C'B (602), on a donc bien aussi AC + CB < AC' + C'B.

Fig. 158.



Un corps élastique, ou un rayon de chaleur ou de lumière, qui part du point A et vient frapper DE pour aller passer en B, suit le plus court chemin ACB. Il est à remarquer que CA et CB font des angles égaux avec DE, ainsi qu'avec la perpendiculaire CF, ACD = BCE et ACF = BCF; c'est ce que l'on exprime en disant que l'angle d'*incidence* ACF est égal à l'angle de *réflexion* BCF.

Pour aller frapper une bille A avec une autre B, en touchant d'abord la bande DE du billard, le joueur mène par la pensée DA′ = DA, et il vise le point A′.

Si DE est une rivière dans laquelle on veut faire une seule prise d'eau pour alimenter deux usines A et B (*fig.* 158), le point C est celui qui donnera le minimum de longueur de conduite.

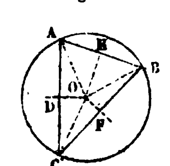
Fig. 159.

Si d'un point B on veut atteindre la bille A en touchant d'abord les deux bandes MN, NP, on prend sur AA′, perpendiculaire à NP, DA′ = DA, et sur A′A″, perpendiculaire à MN, D′A″ = D′A′; visant alors le point A″, la bille se réfléchit en C vers A′, et arrivée en C′ elle se réfléchit vers A.

CIRCONFÉRENCE. TANGENTE.

980. *Décrire une circonférence passant par trois points donnés* ABC, *non en ligne droite* (650). On mène AB, BC, sur les milieux E, F de ces droites on élève des perpendiculaires qui se coupent en O, et la circonférence décrite de ce point comme centre avec AO pour rayon satisfait à l'énoncé (635, 975).

Fig. 160.



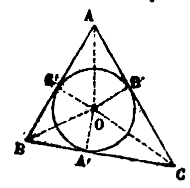
Pour déterminer le centre d'une circonférence, on tracerait deux cordes AB, BC, et les perpendiculaires menées au milieu de ces cordes se rencontreraient au centre O.

On déterminerait de même le centre et par suite le rayon d'un arc de cercle.

La construction précédente fournit le moyen de circonscrire un cercle à un triangle donné ABC (658).



Fig. 161.



981. *Pour inscrire un cercle dans un triangle donné* ABC, on mène les bissectrices AO, BO de deux angles A et B du triangle (975); du point de rencontre O de ces bissectrices on abaisse la perpendiculaire OC′ à l'un des côtés AB du triangle, et OC′ est le rayon du cercle demandé (586, 657).

En menant (*fig.* 62) les bissectrices des an-

gles extérieurs du triangle, on obtient les centres des trois cercles exinscrits au triangle, et les rayons se déterminent comme pour le cercle inscrit.

982. *Mener une tangente à un cercle: 1° par un point pris sur la circonférence; 2° par un point pris hors du cercle.*

Fig. 162

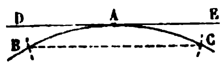
1° On mène le rayon Om passant par le point donné, et la perpendiculaire AB menée à l'extrémité de ce rayon est la tangente demandée (643, 973).

2° On joint le point donné m au centre; sur Om comme diamètre on décrit une circonférence qui coupe la circonférence donnée en T et T′, et les deux droites mT, mT′ satisfont à l'énoncé. En effet, menant OT et OT′, les angles OTm, OT′m sont droits comme inscrits dans un demi-cercle (654), et, par suite, mT et mT′ sont tangentes à la circonférence O (1°).

Fig. 163.

983. *Par un point* A, *pris sur un arc de cercle dont on ne connaît pas le centre, mener une tangente à cet arc.* On détermine deux points B et C également distants du point A, et menant par A la droite DE parallèle à BC, elle est la tangente demandée.

Fig. 164.



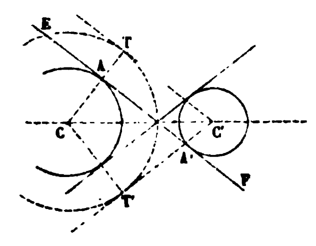
984. *Mener une tangente commune à deux cercles* C *et* C′. A la plus grande circonférence on décrit une circonférence concentrique ayant un rayon égal à la différence des rayons des circonférences données; par le point C′ on trace une tangente C′T à cette circonférence; on mène le rayon CT passant par le point de contact; on le prolonge jusqu'en A, et menant AA′ parallèle à C′T, elle est perpendiculaire aux extrémités des rayons CA, C′A′ et satisfait à la question.

Fig. 165.

La même construction reproduite au-dessous de la ligne CC′ fournit une seconde solution BB′.

Si l'on prend CT = CA + C′A′, et que l'on construise la fig. 166 en suivant la même marche que dans le cas précédent, on obtient deux tangentes intérieures qui satisfont encore à la question (666).

Fig. 166.



Remarque. Lorsque les deux circonférences données sont tangentes extérieurement, les deux tangentes intérieures se

réduisent à une seule, et alors il n'y a plus que trois solutions.

Si les circonférences sont tangentes intérieurement, il n'y a plus qu'une seule solution, qui est la tangente extérieure commune menée par le point de contact des circonférences.

Lorsque les circonférences se coupent, il n'y a pas de tangentes intérieures, mais les deux tangentes extérieures subsistent.

Autre construction pour mener une tangente commune à 2 circonférences. On mène deux rayons quelconques parallèles et de même sens CE, C'E'; on trace EE', qui détermine le point O sur la ligne des centres, et les tangentes OA', OB' menées à l'une des circonférences sont tangentes à l'autre. Le rayon C'E'' ayant un sens contraire de celui de son parallèle CE, joignant EE'', les deux tangentes menées par le point O' à l'une des circonférences sont également tangentes à l'autre.

Fig. 167.

Les circonférences décrites sur OC', OC, O'C', O'C, comme diamètres, déterminent chacune deux points de contact des quatre tangentes.

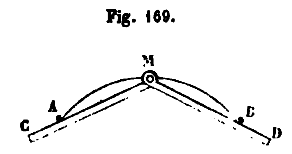
Les rayons tels que CA, C'A' menés aux points de contact d'une même tangente sont parallèles entre eux et perpendiculaires à cette tangente.

985. *Sur une droite donnée* AB, *décrire un segment capable d'un angle donné.* Au point A, on forme l'angle BAC égal à l'angle donné (967); on mène AO perpendiculaire à AC et DO perpendiculaire au milieu de AB (975); du point O comme centre, avec OA pour rayon, on décrit une circonférence, et le segment AMB est le segment demandé. En effet, tout angle M inscrit dans ce segment est bien égal à BAC (654), et par suite à l'angle donné.

Fig. 168.

Dans la pratique, *pour décrire un segment capable d'un angle donné* AMB, *ou pour décrire un arc de cercle passant par trois points donnés* A, M, B (980), on fait usage d'une espèce de compas composé de deux règles MC, MD. Le centre de l'axe d'articulation M étant situé à la rencontre des arêtes extérieures MC, MD, et cet axe étant percé d'un trou longitudinal dans lequel on a fixé un crayon, on conçoit qu'ayant ouvert le compas jusqu'à ce que son angle soit égal à AMB, ou que son sommet étant placé en M les arêtes MC, MD passent par les points A et B, si l'on implante une pointe en chacun des points A et B, et que l'on promène le compas de manière que les arêtes MC, MD glissent contre ces pointes, le crayon placé en M décrira l'arc de cercle AMB.

Fig. 169.



986. *Décrire un cercle tangent à un cercle donné* O *et à une droite* XY *en un point* P. Au point P on mène une perpendiculaire PC à XY, on prend PI égale au rayon du cercle O, et l'on trace IO, à laquelle on élève en son milieu M une perpendiculaire, qui rencontre PC au centre C du cercle cherché. Le cercle C est bien en effet tangent à XY en P, et de plus au cercle O, puisque la distance CO = CI des centres est égale à la somme CP + PI des rayons (651).

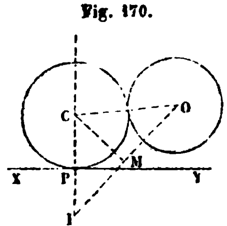


Fig. 170.

987. *Mener une circonférence tangente à une droite* xy *et passant par deux points donnés* A *et* B. On mène AB, on détermine la moyenne proportionnelle PM entre PA et PB (996), on prend PI = PM, et traçant une circonférence passant par les trois points A, B, I, elle satisfait à l'énoncé. En effet, ayant $\overline{PI}^2 = PA \times PB$, c'est que xy est tangente en I (679).

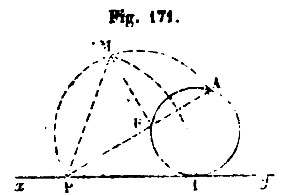


Fig. 171.

988. *Tracer une circonférence tangente à deux droites données et passant par un point donné* A. Le centre de la circonférence cherchée devant se trouver sur la bissectrice de l'angle S des deux droites données, cette circonférence passera aussi par le point A', symétrique de A. Le problème se trouve ainsi ramené au précédent, et en achevant la construction, on obtient deux solutions O et O'.

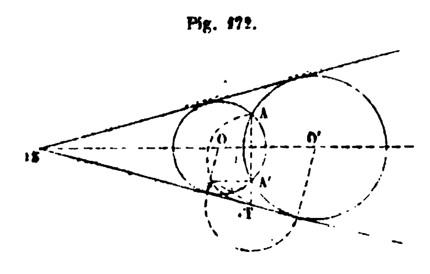


Fig. 172.

989. *Tracer une circonférence tangente à deux droites données* CD, EF *et à une circonférence donnée* O. Menant à une distance T'T'' égale au rayon de la circonférence O des parallèles à CD, EF, et déterminant le centre I de la circonférence tangente à C'D', E'F' et passant par le point O (988), I est aussi le centre de la circonférence cherchée, et IT son rayon.

Comme le précédent, ce problème admet deux solutions.

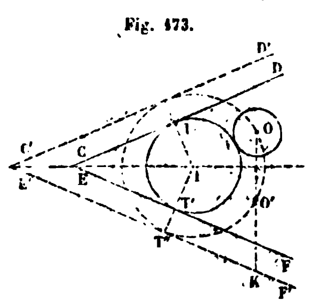


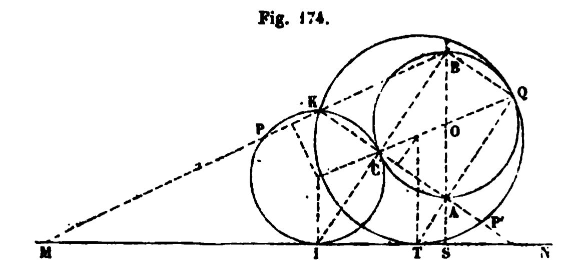
Fig. 173.

990. *Par un point* K, *faire passer une circonférence qui soit tangente à une circonférence donnée* O *et à une droite donnée* MN.

1re *Solution*. Supposant le problème résolu on a (678)

$$BP : BI = BC : BK.$$

Fig. 174.



De plus, les triangles rectangles semblables BCA, BSI donnent

$$BA : BI = BC : BS.$$

Ces deux proportions ayant les mêmes moyens, les extrêmes donnent

$$BP \times BK = BA \times BS, \quad \text{d'où} \quad BP = \frac{BA \times BS}{BK}.$$

Ainsi en menant par le centre O une perpendiculaire à MN et en traçant BK, on détermine BA, BS et BK, et la 4ᵉ proportionnelle BP à ces 3 lignes (995) donne un second point P de la circonférence cherchée. Le problème est alors ramené à celui du nº 987.

2ᵉ *solution.* Supposant le problème résolu, et joignant A au point K et au point de contact Q, on a (677)

$$AP' : AT = AQ : AK,$$

et les deux triangles rectangles semblables AST, AQB donnent

$$AB : AT = AQ : AS.$$

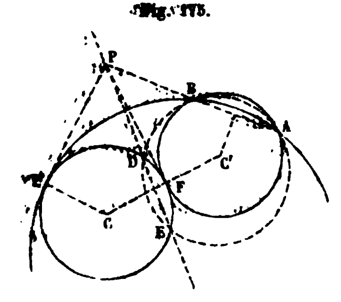
De ces deux proportions on conclut

$$AP' \times AK = AB \times AS, \quad \text{d'où} \quad AP' = \frac{AB \times AS}{AK}.$$

Relation qui détermine un second point P' de la circonférence cherchée, et ramène le problème à celui du nº 987.

991. *Décrire une circonférence qui passe par deux points donnés* A, B, *et qui soit tangente à une circonférence donnée* C.

Fig. 175.



On décrit une circonférence passant par A et B et coupant la circonférence C en deux points quelconques D et E. On mène les cordes AB, ED, et on les prolonge jusqu'à leur rencontre P. De ce point P on mène une tangente PF au cercle C (982), et le point F est le point de contact de C avec la circonférence cherchée C', qu'on trace en la faisant passer par les 3 points A, B, F (980).

Ayant (678, 679)

$$\overline{PF}^2 = PE \times PD \quad \text{et} \quad PE \times PD = PA \times PB,$$

d'où

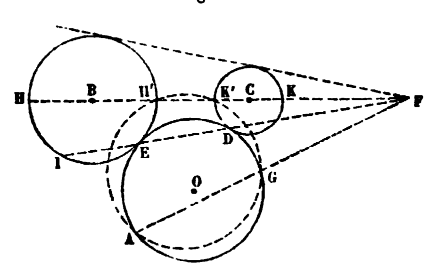
$$\overline{PF}^2 = PA \times PB,$$

il en résulte que PF est aussi tangente en F à C′, et que par suite les circonférences C et C′ sont tangentes entre elles en ce même point F.

La tangente PF′ fournit une 2ᵉ solution en faisant passer une circonférence par les points A, B, F′.

992. *Décrire une circonférence passant par un point donné* A, *et qui soit tangente à deux circonférences* B *et* C.

Fig. 176.

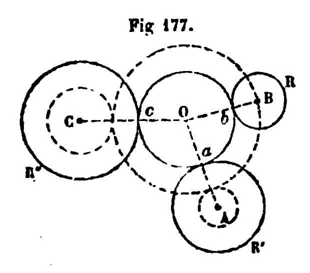


On détermine le centre de similitude F des deux circonférences B et C, et l'on joint A, F; par les points H′, K′ et A on fait passer une circonférence (980), qui coupe AF en un second point G, et traçant une circonférence O passant par A et G et qui soit tangente à l'une des circonférences B, C (991), elle l'est à l'autre et satisfait à l'énoncé. Le point F et les points de contact E et D sont en ligne droite comme étant trois centres de similitude (668).

Le centre de similitude externe F conduirait à une 2ᵉ solution en faisant passer une circonférence auxiliaire par A et les points H, K. Le centre de similitude interne conduirait à deux autres solutions en faisant passer successivement la circonférence auxiliaire par A, H, K′ et A, H′, K.

993. *Décrire une circonférence tangente à* 3 *circonférences données.*

Fig 177.



Des points A et C comme centres, avec R′ — R et R″ — R pour rayons, on décrit deux circonférences; on décrit une troisième circonférence passant par B et qui soit tangente aux deux premières circonférences auxiliaires (992). Le centre O de cette troisième circonférence est celui de la circonférence demandée, qu'on décrit avec le rayon

$$Oa = Ob = Oc.$$

LIGNES PROPORTIONNELLES. POLYGONES SEMBLABLES.

994. *Diviser une droite* AB : 1° *en parties proportionnelles à des lignes données* E, F, G; 2° *à des nombres donnés;* 3° *en parties égales* (298).

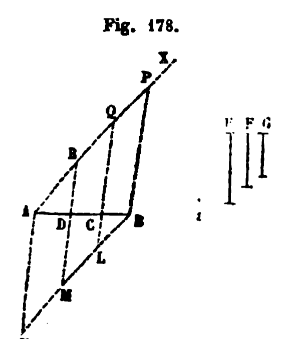


Fig. 178.

1° Par l'une des extrémités de AB on mène la droite indéfinïe AX faisant avec AB un angle convenable; sur AX on prend AR = E, RQ = F, QP = G; on joint PB, et par les points R, Q menant des parallèles à PB, elles divisent AB de manière que l'on a

$$\frac{AD}{AR} = \frac{DC}{RQ} = \frac{CB}{QP}$$

ou $$\frac{AD}{E} = \frac{DC}{F} = \frac{CB}{G}. \qquad (663)$$

On arrive au même résultat en menant BY parallèle à AX, en prenant BL = PQ = G, LM = QR = F, MN = RA = E, et en menant PB, QL, RM, AN.

2° Ayant choisi une longueur pour représenter l'unité, et ayant pris les longueurs AR, RQ... proportionnelles aux nombres donnés, par chacune des constructions du 1° on aurait divisé AB en parties proportionnelles à ces nombres.

3° Si les longueurs portées sur AX sont égales entre elles, AB se trouve divisée en parties égales (975).

Dans la pratique, pour diviser une droite AB en un certain nombre de parties égales, 7 par exemple, on opère le plus souvent par tâtonnement. On ouvre le compas d'une quantité que l'on pense approcher de $\frac{1}{7}$ de AB, et on la porte sur AB. C étant le dernier point de division, on augmente l'ouverture du compas d'une quantité approchant le plus possible de $\frac{1}{7}$ de CB, et l'on porte la nouvelle ouverture de compas sur AB. Si la 7° partie aboutit en B, c'est que la nouvelle ouverture est $\frac{1}{7}$ de AB, et en la portant sur AB on divise cette droite en 7 parties égales. Si la pointe du compas au lieu de tomber en B arrivait en C', on diminuerait la seconde ouverture de $\frac{1}{7}$ approché de BC'; on vérifierait si la

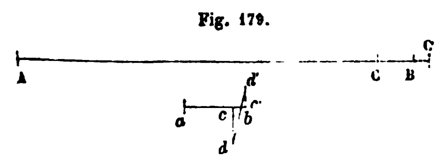


Fig. 179.

nouvelle ouverture est égale à $\frac{1}{7}$ de AB, et en continuant ainsi de suite, on finirait par arriver à ce résultat.

Avec un peu d'habitude, le troisième ou le quatrième essai donne un résultat que l'on peut considérer comme étant pratiquement exact.

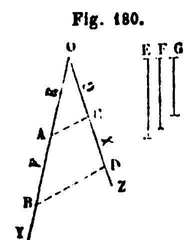
En prenant ac égale à la première ouverture du compas, et ac' égale à la seconde; puis prenant, sur des perpendiculaires à ac, $cd = BC$ et $c'd' = BC'$, joignant dd', la longueur ab pourra être considérée comme étant $\frac{1}{7}$ de AB.

Remarque 1. Cette méthode par tâtonnement est surtout employée pour diviser un arc ou une circonférence en un nombre quelconque de parties égales.

Remarque 2. Quand le nombre des divisions est décomposable en plusieurs facteurs, tel que $28 = 4 \times 7$, on commence par opérer la division en 4 parties égales; puis on divise chacune de ces parties en 7 autres égales entre elles.

995. *Trouver une quatrième proportionnelle* X *à trois lignes données* E, F, G (300). Sur deux droites OY, OZ, faisant entre elles un certain angle, on prend OA = E, AB = F, OC = G; on joint AC, et menant BD parallèle à AC, on a OD = X. En effet on a bien (663)

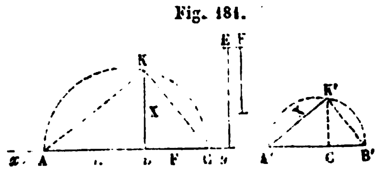
Fig. 180.



$$\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD} \quad \text{ou} \quad \frac{E}{F} = \frac{G}{X}.$$

996. *Trouver une moyenne proportionnelle* X *à deux droites données* E, F (302). Sur une droite xy, on prend AB = E et BC = F; sur AC comme diamètre on décrit une demi-circonférence, et la perpendiculaire KB = X. On a en effet (676)

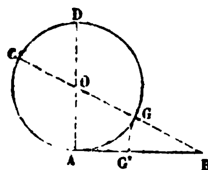
Fig. 181.



$$AB : KB = KB : BC \quad \text{ou} \quad E : X = X : F, \quad \text{d'où} \quad X^2 = E \times F.$$

En prenant A'B' = E et A'C' = F, puis décrivant une demi-circonférence sur A'B' comme diamètre, et élevant la perpendiculaire C'K', on a encore A'K' = X (676).

Fig. 182.



997. *Diviser une droite* AB *en moyenne et extrême raison* (662). A l'une des extrémités A de la droite on élève une perpendiculaire $AO = \frac{AB}{2}$; du point O comme centre, avec OA pour rayon on décrit une circonférence; on

joint BO, et prenant BC' = BO, le point C' satisfait à l'énoncé. En effet, on a (679)

$$BC : AB = AB : BC;$$

d'où $$(BC - AB) : AB = (AB - BC) : BC, \quad (321)$$

c'est-à-dire $$BC' : AB = AC' : BC',$$

ou $$AB : BC' = BC' : AC'. \quad (317)$$

Ce qu'il fallait démontrer.

998. *Sur une droite* A'B', *donnée comme côté homologue du côté* AB *du polygone* ABCDE, *construire un second polygone semblable au premier* (665).

Fig. 183.

1re *construction.* On fait l'angle $B' = B$ (967); On prend B'C' égal à une quatrième proportionnelle aux trois côtés AB, A'B', BC (995); on fait l'angle $B'C'D' = BCD$; on prend C'D' égal à une quatrième proportionnelle aux côtés AB, A'B', CD, et l'on continue ainsi de suite.

Ces quatrièmes proportionnelles pourront s'obtenir très-rapidement au moyen du compas de réduction. Ayant disposé l'axe de ce compas de manière que l'une des ouvertures étant égale à AB, l'autre soit égale à A'B', suivant qu'on fera la première ouverture égale à BC, CD..., la seconde sera égale à B'C', C'D'....

En disposant A'B' parallèlement à AB, les angles B', C'..., égaux respectivement à B, C..., se construisent très-rapidement en menant avec l'équerre B'C', C'D'... respectivement parallèles à BC, CD... (977).

2e *construction.* On peut éviter la construction des angles égaux et des quatrièmes proportionnelles. Pour cela, après avoir décomposé le polygone ABCDE en triangles, on dispose A'B' parallèlement à AB; on mène avec l'équerre B'C' et A'C' parallèles respectivement à BC et AC; ce qui détermine le triangle A'B'C' semblable au triangle ABC. Menant ensuite C'D' et A'D' parallèlement à CD et AD, on a le deuxième triangle A'C'D' semblable à ACD. Continuant ainsi de suite, on obtient le polygone A'B'C'D'E' semblable à celui ABCDE (672).

3e *construction.* Prenant sur AB, à partir de A, une longueur égale à A'B'; menant par le point obtenu une parallèle à BC; puis par le point de rencontre de cette parallèle avec la diagonale AC, une parallèle à CD, et continuant ainsi de suite, on obtient, intérieurement au polygone donné, un polygone qui lui est semblable.

4e *construction.* Quelquefois, surtout quand on veut tracer sur le papier un polygone semblable à un polygone figuré par un terrain, on détermine les sommets C', D', E', en les considérant comme les sommets de triangles ayant tous A'B' pour base, et qui sont semblables aux triangles homologues du polygone donné.

Remarque. Supposant $A'B' = AB$, les constructions précédentes fournissent un polygone égal au polygone donné.

999. *Trouver la plus grande commune mesure de deux droites commensurables données* AB *et* CD (211). On applique la règle du n° 99 pour déterminer le plus grand commun diviseur de deux nombres. Ainsi l'on porte la plus petite ligne CD sur la plus grande autant de fois que cela est possible; on trouve une fois plus un reste EB < CD; on porte ensuite EB sur CD, deux fois plus FD < EB; puis le reste FD sur EB, et comme il y est contenu trois fois exactement, c'est que FD est la plus grande commune mesure cherchée.

Fig. 184.

On a :

$$\text{EB} = 3\text{FD},$$
$$\text{CD} = 2\text{EB} + \text{FD} = 6\text{FD} + \text{FD} = 7\text{FD},$$
$$\text{AB} = \text{CD} + \text{EB} = 7\text{FD} + 3\text{FD} = 10\text{FD}.$$

Par suite, le rapport

$$\frac{\text{AB}}{\text{CD}} = \frac{10}{7}.$$

On trouverait de même le rapport de deux arcs commensurables de même rayon.

Pour avoir le rapport de deux angles commensurables, on tracerait les arcs correspondants de même rayon, et le rapport de ces arcs serait celui des angles.

1000. *Trouver une valeur approchée, à moins de $\frac{1}{7}$ par exemple, du rapport $\frac{\text{AB}'}{\text{CD}}$* de deux droites AB′, CD (*fig.* 184). On divise CD en 7 parties égales (994), et portant son septième FD sur AB′, on trouve qu'il y est contenu 10 fois, plus un reste BB′ < FD; par conséquent on a

$$\frac{\text{AB}'}{\text{CD}} > \frac{10}{7} \quad \text{et} \quad \frac{\text{AB}'}{\text{CD}} < \frac{11}{7}.$$

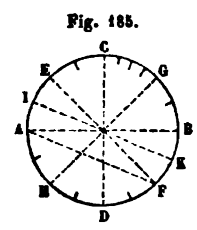
Donc ces deux rapports satisfont à la question, l'un par défaut et l'autre par excès.

On trouverait par la même marche une valeur approchée du rapport de deux arcs ou de deux angles (999).

DIVISION DE LA CIRCONFÉRENCE EN PARTIES ÉGALES. — POLYGONES RÉGULIERS.

1001. *Diviser une circonférence en 2, 4, 8... 2^n parties égales.* On peut employer le moyen du n° 975, en menant d'abord un diamètre, qui divise la circonférence en deux parties égales; mais le suivant, dans lequel on fait usage de l'équerre, est beaucoup plus expéditif.

Fig. 185.



On trace avec une équerre un diamètre AB; on fait glisser l'équerre le long d'une règle ou d'une seconde équerre jusqu'au-dessous de la circonférence; à l'aide de la seconde équerre, dont on applique un côté de l'angle droit contre la première, on trace le diamètre CD perpendiculaire à AB, et la circonférence est divisée en 4 parties égales. Ayant choisi la seconde équerre à 45°, on repose son hypoténuse contre la première équerre, et amenant successivement ses côtés de l'angle droit à passer par le centre, on trace les diamètres EF, GH inclinés à 45° sur les premiers, et la circonférence est divisée en 8 parties égales.

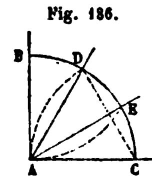
Menant avec la première équerre un diamètre IK parallèle à la corde AF, qu'il n'est pas nécessaire de tracer, et opérant par rapport à IK comme on vient de le faire par rapport au premier diamètre AB, la circonférence sera divisée en 16 parties égales.

Répétant deux fois la même construction, d'abord en partant de la corde AK, puis de la corde IF, qui laissent chacune 9 divisions de la circonférence d'un côté et 7 de l'autre, la circonférence sera divisée en 32 parties égales; cette division est indiquée sur l'arc CG seulement. Par la même marche on peut pousser la division aussi loin que l'on veut.

Dans la pratique, après avoir divisé à l'aide de l'équerre la circonférence en 4 ou en 8 parties égales, il convient de faire les subdivisions, quel qu'en soit le nombre, par tâtonnement au moyen du compas (994); on vérifie ainsi les premières divisions et l'on arrive plus sûrement au degré d'exactitude nécessaire.

1002. *Diviser un angle droit* A, *ou son arc correspondant* BC *en trois parties égales.* Des points B et C comme centres, avec AB = AC pour rayon, on décrit des arcs de cercle, qui coupent BC aux points de division cherchés, et menant AD, AE, ces droites partagent l'angle A en trois parties égales.

Fig. 186.



Le triangle ACD étant équilatéral, l'angle DAC est égal à 2/3 de droit; par suite BAD est égal à 1/3 de droit. Par la même raison CAE est aussi égal à 1/3 de droit; donc l'angle BAC est bien divisé en 3 parties égales, ainsi que l'arc BC.

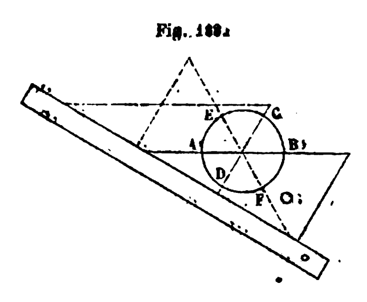
1003. *Diviser une circonférence en 12 parties égales.* On mène deux diamètres AB, CD perpendiculaires entre eux (1001), et des extrémités de ces diamètres, avec le rayon de la circonférence, on décrit des arcs de cercle, qui divisent chaque quart de la circonférence en 3 parties égales (1002), et par conséquent la circonférence en 12 parties égales.

Fig. 187.

1004. *Pour diviser une circonférence en 6 parties égales*, il suffit d'y inscrire le rayon 6 fois, l'une à la suite de l'autre; les points obtenus satisfont à l'énoncé (719). La circonférence étant divisée en 6 parties égales, les points de division pris de 2 en 2 divisent la circonférence en 3 parties égales.

Diviser une circonférence en 6 parties égales à l'aide de l'équerre à 60°. On trace un premier diamètre AB avec l'hypoténuse de l'équerre; on trace ensuite le diamètre CD, après avoir donné à l'équerre la position indiquée en points longs; retournant l'équerre face pour face, et lui donnant la position figurée en petits points, on trace le diamètre EF, et la circonférence est divisée en 6 parties égales.

Fig. 188.

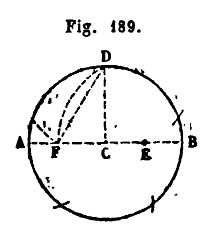


Traçant deux diamètres perpendiculaires entre eux, et opérant pour chacun d'eux comme on vient de le faire pour celui AB, la circonférence serait divisée en 12 parties égales.

Dans la pratique, pour diviser une circonférence en parties égales dont le nombre est un multiple de 3 ou de 6, il convient, après l'avoir divisée en 3 ou en 6 parties égales, de faire les subdivisions par tâtonnement, au moyen du compas (994).

1005. *Diviser une circonférence en 5 parties égales.* On trace un diamètre AB et un rayon CD qui lui soit perpendiculaire (973); du point E, milieu de CB, comme centre, avec la distance ED pour rayon, on décrit un arc de cercle, et inscrivant la droite DF cinq fois l'une à la suite de l'autre, la circonférence est divisée en cinq parties égales.

Fig. 189.



Dans la pratique, il est préférable de procéder par tâtonnement à l'aide du compas (994). Le cinquième de la circonférence étant exactement de 72°, on peut aussi employer très avantageusement le rapporteur (1012).

1006. La méthode par tâtonnement à l'aide du compas peut être employée pour diviser la circonférence en un nombre quelconque de parties

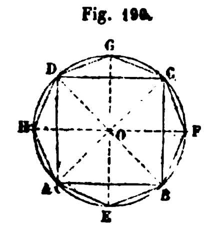
égales (994); mais si ce nombre est un multiple de 3, de 4 ou de 6, cette méthode peut n'être employée que pour les subdivisions.

Lorsque le nombre des parties divise exactement 360, et si même la partie décimale du quotient est égale à 1/2, 1/3, 1/4 ou 1/5 de degré, on emploie très-avantageusement le rapporteur. On fait coïncider son centre avec celui de la circonférence, et à son pourtour, sur le dessin, on marque des divisions espacées entre elles d'un nombre de degrés égal au quotient de 360 par le nombre des divisions de la circonférence; puis, à l'aide d'une règle qu'on fait passer par le centre et successivement par les divisions marquées, on reporte ces divisions sur la circonférence. Ce procédé est surtout avantageux quand le nombre des divisions est très-grand.

Le rapporteur permet aussi de prendre approximativement la première ouverture de compas quand on opère par tâtonnement.

1007. *Inscrire un carré dans un cercle donné.* On mène deux diamètres AC, BD perpendiculaires entre eux, et joignant les extrémités de ces diamètres, on obtient le carré inscrit ABCD (714, 933).

Fig. 198.



L'usage de l'équerre à 45° (1001) permet de résoudre très-rapidement ce problème. En effet, plaçant une équerre au-dessous de la circonférence, une équerre à 45° appuyée par un côté de l'angle droit contre la première permettra de tracer avec son hypoténuse les diamètres AC, BD (il suffit, après avoir tracé l'un de ces diamètres, de retourner l'équerre pour pouvoir tracer l'autre); avec le second côté de l'angle droit on mènera AD et BC; puis, appuyant l'équerre à 45° en dessous de la première, on fera monter celle-ci pour tracer AB et DC.

On opère d'une manière analogue quand les sommets du carré sont E, F, G, H; seulement l'hypoténuse de l'équerre à 45° sert à tracer les côtés du carré au lieu des diagonales.

1008. *Construire un carré dont le côté est donné.* Avec une première équerre on trace une droite AB égale au côté donné; on fait, pour la facilité de la construction, descendre un peu cette équerre parallèlement à elle-même, en la faisant glisser contre une équerre placée dessous; puis, avec l'équerre à 45°, on termine la figure en opérant comme au numéro précédent. Comme vérification, la circonférence décrite du point O comme centre, avec OA pour rayon, doit passer par les trois autres sommets B, C, D.

1009. *Inscrire un octogone régulier dans un cercle donné.* Ayant inscrit un carré ABCD dans le cercle (1007), on divise en deux parties égales chacun des arcs sous-tendus par ses côtés (975), et joignant les points de division aux sommets voisins, on obtient l'octogone AEBFCGDH.

Si l'on avait eu l'octogone régulier inscrit, en joignant ses sommets de deux en deux, on aurait obtenu le carré.

Remarque. La marche précédente, par laquelle on inscrit un octogone

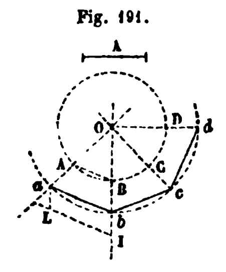
régulier ayant un carré inscrit, permet, en général, *étant donné un polygone régulier inscrit dans un cercle, d'inscrire un polygone régulier de deux fois plus de côtés.*

La marche par laquelle on a passé de l'octogone au carré permet aussi de *passer d'un polygone régulier inscrit d'un nombre pair de côtés plus grand que quatre, à un polygone régulier inscrit de deux fois moins de côtés.* Ainsi, du carré inscrit on passera successivement aux polygones réguliers inscrits de 8, 16, 32... côtés, et réciproquement.

On peut inscrire un octogone régulier dans un cercle sans passer par le carré. A l'aide de l'équerre à 45°, et en opérant comme au n° 1007, on divise la circonférence en 8 parties égales, ce qu'indiquent les 4 diamètres HF, EG, AC, BD, qu'on peut se dispenser de tracer entièrement; puis on joint les points de division obtenus, ce qu'il convient de faire encore avec l'équerre; ainsi, remarquant que le côté AE est parallèle à la corde HB, en partant de cette corde, on trace d'abord les 4 côtés AE, GC, HD, BF; puis, en partant de la corde AF, on trace les 4 autres côtés EB, DG, AH, FC, qui lui sont parallèles ou perpendiculaires.

1010. *Tracer un octogone régulier dont le côté soit égal à une droite donnée.* On décrit une circonférence d'un rayon quelconque OA; dans cette circonférence on inscrit un octogone régulier (1009), ou simplement un côté AB de cet octogone; par un point I, pris sur l'un des rayons OA, OB ou sur son prolongement, on mène IL parallèle à AB; on prend IL = A; on mène La parallèle à OB; du point O comme centre, avec Oa pour rayon, on décrit une circonférence, et l'octogone *abcd....* inscrit dans cette circonférence satisfait à l'énoncé.

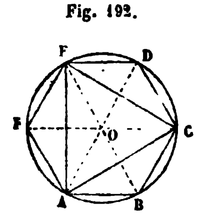
Fig. 191.



Cette construction est applicable à tous les polygones réguliers que l'on peut géométriquement inscrire dans un cercle donné; mais elle se simplifie pour beaucoup de polygones. Ainsi, pour l'octogone, après avoir mené les droites OA, OB faisant entre elles un angle de 45°, on prendra OA = OB; par un point I on mènera IL parallèle à AB, et on terminera la construction comme ci-dessus.

1011. *Inscrire un hexagone régulier dans un cercle donné.* En portant comme corde sur la circonférence une ouverture de compas égale au rayon, et joignant les 6 points de division, on obtient l'hexagone demandé ABCDEF (1004).

Fig. 192.



En faisant usage de l'équerre à 60°, on peut inscrire un hexagone en opérant comme pour inscrire un octogone avec l'équerre à 45° (1009). Ainsi, avec une équerre, on mène le diamètre FC; on fait glisser cette équerre parallèlement à elle-même jusqu'au bas de la figure; avec l'équerre à hexagones, dont on applique le petit côté de l'angle droit contre la première équerre, on trace deux diamètres AD, BE. On peut alors joindre les extrémités des

trois diamètres pour avoir l'hexagone; mais, remarquant que chaque diamètre est parallèle à deux côtés de l'hexagone, on trace ces côtés en faisant glisser d'une quantité convenable l'équerre qui a servi à tracer le diamètre. C'est par ce moyen très-expéditif qu'on trace les écrous dans les dessins de machines.

1012. *Construire un hexagone régulier ayant pour côté une droite donnée.* On décrit un cercle avec cette droite pour rayon, et l'hexagone inscrit dans ce cercle satisfait à l'énoncé (1011).

1013. *Inscrire un triangle équilatéral dans un cercle donné.* On inscrit d'abord un hexagone, et joignant les sommets de deux en deux, on obtient le triangle demandé ACE (*fig.* 192).

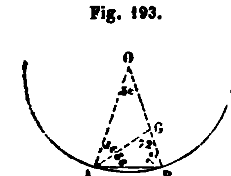
1014. *Construire un triangle équilatéral dont le côté soit égal à une droite donnée.* On opère comme au n° 971, en faisant chaque côté égal à la droite donnée.

On peut aussi faire usage de l'équerre à hexagones pour tracer le triangle équilatéral, l'angle de ce triangle étant égal au plus grand angle aigu de cette équerre.

Ayant inscrit un hexagone ou un triangle équilatéral, on pourra inscrire successivement des polygones réguliers de 12, 24, 48... côtés, et réciproquement, en opérant comme il a été indiqué au n° 1009.

1015 *Inscrire dans un cercle donné: 1° un décagone régulier; 2° un pentagone régulier; 3° un pentédécagone régulier; 4° un polygone régulier de* 30 *côtés* (597).

Fig. 193.



1° AB étant le côté du décagone, l'angle au centre $O = \frac{360}{10} = 36°$. Menant la bissectrice AG de l'angle A, on a (674):

$$OA : OG = AB : GB.$$

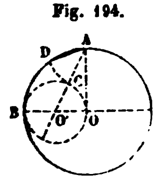
Comme $OA = OB$ et $AB = AG = OG$, on a donc

$$OB : OG = OG : GB.$$

Ce qui montre que le côté AB est égal au grand segment OG du rayon OB divisé en moyenne et extrême raison (997).

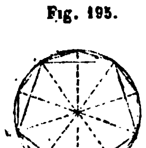
Pour déterminer le côté du décagone, on mène deux rayons OA, OB perpendiculaires entre eux, sur OB comme diamètre on décrit une circonférence, on joint AO', et AD = AC est le côté du décagone. En portant AD comme corde sur la circonférence, et joignant les points qu'on obtiendra, on aura le décagone demandé.

Fig. 194.



2° En joignant de deux en deux les sommets du décagone régulier inscrit, on aura le pentagone régulier (*fig.* 195).

3° La différence des arcs sous-tendus par les côtés de l'hexagone et du décagone réguliers étant $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ de la circonférence, la corde


Fig. 195.

qui sous-tend cette différence est le côté du pentédécagone. Ayant le côté, en le portant comme corde sur la circonférence, on construira le polygone.

4° Ayant $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$, on voit que le côté du polygone régulier inscrit de 30 côtés est la corde qui sous-tend l'arc qui est la différence des arcs sous-tendus par les côtés du pentagone et de l'hexagone réguliers inscrits.

1016. *Pour inscrire dans un cercle un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés*, on divise la circonférence en autant de parties égales que le polygone doit avoir de côtés (994, 1001), et joignant les points de division on a le polygone demandé.

Remarque. Pour construire un polygone régulier quelconque dont le côté est donné, on suit une marche analogue à celle indiquée au n° 1010 pour l'octogone régulier.

1017. *Circonscrire un polygone régulier à un cercle donné.* Ayant inscrit dans le cercle un polygone régulier ABC... d'un même nombre de côtés, par les milieux des arcs sous-tendus menant des tangentes, qui sont des parallèles aux côtés du polygone inscrit, elles forment le polygone demandé A'B'C'... En général on trace le polygone circonscrit sans tracer le polygone inscrit, en suivant la même marche que pour ce dernier, dont tout au plus on ne fait qu'indiquer les sommets.

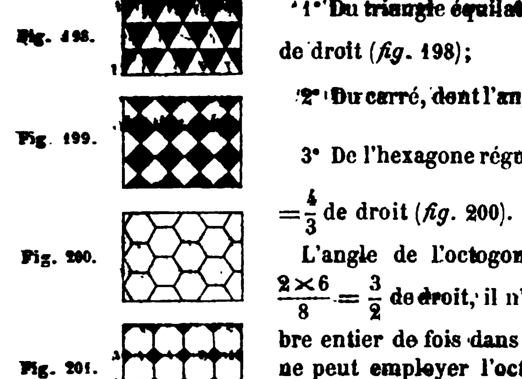
Fig. 196.

1018. *Inscrire un octogone régulier dans un carré donné* ABCD. On trace les diagonales du carré, et des sommets A, B, C, D, comme centres, avec un rayon égal au rayon AO du carré, décrivant des arcs de cercle, ces arcs déterminent sur les côtés du carré 8 points qui sont les sommets de l'octogone demandé.

Fig. 197.

1019. *Couvrir une surface plane avec des polygones réguliers.* La somme des angles que l'on peut former autour du même point dans un plan étant égal à 4 droits ou 360° (581), tout polygone régulier dont l'angle sera contenu un nombre entier de fois dans 4 droits peut être employé pour couvrir une surface plane (618).

On peut donc à cet effet faire usage :


Fig. 198. Fig. 199. Fig. 200. Fig. 201.

1° Du triangle équilatéral, dont l'angle $= \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ de droit (*fig.* 198) ;

2° Du carré, dont l'angle $= \frac{4}{4}$ de droit (*fig.* 199) ;

3° De l'hexagone régulier, dont l'angle $= \frac{2 \times 4}{6} = \frac{4}{3}$ de droit (*fig.* 200).

L'angle de l'octogone régulier étant égal à $\frac{2 \times 6}{8} = \frac{3}{2}$ de droit, il n'est pas contenu un nombre entier de fois dans 4 droits, et par suite on ne peut employer l'octogone ; mais en combinant ce polygone avec le carré, de manière que deux angles de l'octogone et un angle du carré aient le même sommet, ce qui donne $\frac{3}{2} \times 2 + 1 = 4$ droits, on parvient à couvrir la surface (*fig.* 201).

Ces dispositions sont employées journellement par les carreleurs.

PROBLÈMES SUR LES AIRES DES POLYGONES.

1020. *Trouver l'aire d'un polygone quelconque.* On décompose ce polygone en triangles, en menant toutes les diagonales par le même sommet, ou en joignant un point intérieur à tous les sommets du polygone ; on mesure l'aire de chaque triangle (692), et la somme de tous les résultats trouvés est l'aire cherchée. On préfère ordinairement, surtout quand on opère sur le terrain (6e partie), joindre deux sommets du polygone et abaisser des autres sommets des perpendiculaires sur la diagonale qui en résulte. Le polygone se trouve ainsi décomposé en triangles rectangles et en trapèzes rectangles faciles à évaluer (Voir *Courbes quelconques*, à la fin de la cinquième partie).

1021. *Transformer un polygone quelconque* ABCDE *en un polygone équivalent qui ait un côté de moins.*

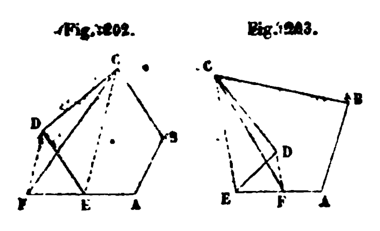


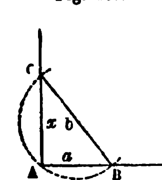
Fig. 202. Fig. 203.

Que le polygone soit convexe (*fig.* 202), ou qu'il ait un angle rentrant (*fig.* 203), on joint C, E ; on mène DF parallèle à CE, et traçant CF, les deux triangles CED, CEF sont équivalents (694) et par suite aussi le pentagone ABCDE et le quadrilatère ABCF.

Remarque. Par cette marche on peut transformer un polygone quelconque en un triangle équivalent.

1022. *Construire un carré équivalent à la différence de deux carrés donnés.* a et b étant les côtés des carrés donnés, on trace deux droites AB, AC perpendiculaires entre elles; sur l'une on prend $AB = a < b$, et du point B comme centre, avec b pour rayon, décrivant un arc de cercle, il détermine AC, qui est le côté cherché. En effet, le triangle rectangle ABC donne bien (704)

Fig. 204.



$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 = b^2 - a^2.$$

On serait arrivé à la même solution en décrivant une demi-circonférence sur une droite $BC = b$ comme diamètre; en inscrivant, à partir de B, une corde $BA = a$, et en menant AC (654).

Ayant le côté AC, on construira le carré comme au n° 1008.

1023. *Construire un carré équivalent au résultat de la combinaison par voie d'addition et de soustraction de tant de carrés qu'on voudra.* a, b, c, d étant les côtés des carrés donnés, pour déterminer le côté k d'un carré tel que l'on ait

Fig. 205.

$$k^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d^2,$$

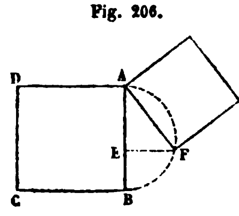
on trace deux perpendiculaires AB, AC égales à a, b, et l'on joint CB; au point C on mène $CD = c$ perpendiculaire à CB, et l'on joint DB; sur BD comme diamètre on décrit une demi-circonférence, et portant $DE = d$ comme corde, puis menant BE, cette droite est la valeur de k. En effet, les triangles rectangles successifs qu'on a construits donnent (704, 1022)

$$\overline{BC}^2 = a^2 + b^2,$$
$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$
$$\overline{BE}^2 = \overline{BD}^2 - d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d^2.$$

Ayant le côté BE, on tracera le carré comme au n° 1008.

1024 *Construire un carré qui soit une fraction quelconque d'un carré donné* ABCD, les 3/5 par exemple. On décrit une demi-circonférence sur AB comme diamètre; on prend $AE = \frac{3}{5}AB$ (994); au point E on élève la perpendiculaire EF à AB, et la corde AF est le côté du carré cherché. En effet, ayant (676) $\overline{AF}^2 = AB \times AE$, on en conclut

Fig. 206.



$$AF^2 = AB^2 \times \frac{AE}{AB}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\overline{AF}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{AE}{AB} = \frac{3}{5}.$$

1025. *Étant donnés deux polygones semblables* p *et* p', *construire un*

troisième polygone P *qui leur soit semblable, et équivalent : 1° à leur somme ; 2° à leur différence :*

1° On construit un triangle rectangle ABC (*fig.* 205) ayant pour côtés de l'angle droit deux côtés homologues a et b des polygones p et p', et construisant sur l'hypoténuse $BC = x$, comme côté homologue de a et b, un polygone P semblable à p et p' (998), on aura $P = p + p'$. En effet, ayant (700)

$$p : p' = a^2 : b^2, \quad \text{d'où} \quad (p + p') : (a^2 + b^2) = p : a^2, \qquad (321)$$

comme on a de plus $\qquad P : x^2 = p : a^2,$

ces deux proportions ayant trois termes égaux, puisque $x^2 = a^2 + b^2$, on a donc bien $P = p + p'$;

2° En prenant le plus grand côté b pour l'hypoténuse du triangle rectangle (*fig.* 204), et construisant P sur le second côté $AC = x$ de l'angle droit, par les mêmes raisons que dans le cas précédent, on aurait $P = p' - p$.

1026. *Construire un carré équivalent à un parallélogramme ou à un triangle donné.* x étant le côté du carré, et b et h la base et la hauteur de la figure donnée, selon qu'il s'agira du parallélogramme ou du triangle, on aura (692, 695)

$$x^2 = b \times h \quad \text{ou} \quad x^2 = b \times \frac{h}{2}.$$

Ce qui montre que x sera une moyenne proportionnelle entre b et h dans le premier cas, et entre b et $\frac{h}{2}$ dans le second (996).

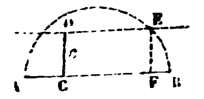
Remarque. De ce n° et de celui 1021 résulte le moyen de *construire un carré équivalent à un polygone donné quelconque.* Puis le n° 1023 permét d'obtenir le carré équivalent à tant de polygones donnés qu'on voudra, combinés par voie d'addition ou de soustraction.

1027. *Construire sur une droite donnée* c *un rectangle équivalent à un rectangle donné qui a* a *et* b *pour dimensions.* La 4° proportionnelle x aux trois lignes c, a, b est la seconde dimension du rectangle demandé (995). En effet, de

$$c : a = b : x, \quad \text{on tire bien} \quad c \times x = a \times b. \qquad (311)$$

1028. *Construire un rectangle équivalent à un carre donné, et dont les deux dimensions fassent une somme donnée* AB. Sur AB comme diamètre on décrit une demi-circonférence ; on prend la perpendiculaire CD égale au côté c du carré donné, et menant DE parallèle et EF perpendiculaire à AB, les deux segments AF et BF sont les dimensions du rectangle cherché. On a en effet (676)

Fig .207.



$$\overline{EF}^2 \text{ ou } c^2 = AF \times BF.$$

Le problème n'est possible qu'autant qu'on a $c < \frac{AB}{2}$, et l'on voit de plus que *parmi tous les rectangles de même périmètre, le carré est un maximum* (538).

1029. *Construire un rectangle équivalent à un carré donné, et dont les dimensions aient entre elles une différence donnée* AB. Sur AB comme diamètre on décrit une circonférence; à l'extrémité A on élève une perpendiculaire AC égale au côté c du carré donné, et joignant CO, les dimensions du rectangle cherché sont CD et CE. En effet, on a bien (679)

Fig. 208.

$$CD : c = c : CE,$$

d'où

$$CD \times CE = c^2.$$

Voir *Arpentage* pour la division des surfaces.

PROBLÈMES SUR LES POLYÈDRES RÉGULIERS ET SUR LA SPHÈRE.

1030. Les figures suivantes sont les développements des surfaces des cinq polyèdres réguliers, et elles indiquent assez comment on tracera ces développements, le côté des polyèdres étant donné.

Pour les *fig.* 209, 211 et 213 on fera usage de l'équerre à 60°. Quant au dodécaèdre, après avoir construit le pentagone P sur la longueur donnée pour côté, on prolongera les côtés de ce polygone, on décrira une circonférence passant par les points de rencontre, et à l'aide de parallèles aux côtés du pentagone P on terminera le tracé de la moitié du développement. Pour la seconde moitié, on prolongera ab, on prendra $cd = ab$, sur cd comme corde on décrira une circonférence de même rayon que la première, et dans cette circonférence, à l'aide de parallèles aux côtés de la première moitié du développement, on terminera la construction.

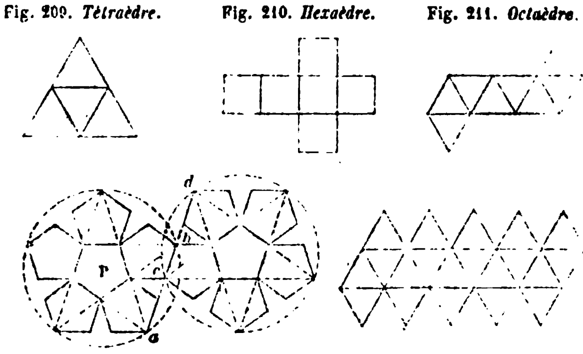
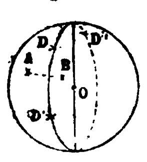


Fig. 209. *Tétraèdre.* Fig. 210. *Hexaèdre.* Fig. 211. *Octaèdre.*

Fig. 212. *Dodécaèdre.* Fig. 213. *Icosaèdre.*

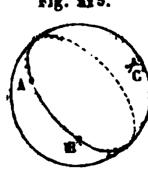
1031. *Étant donnée une sphère, trouver son rayon.* On prend deux points A et B sur la surface de la sphère; de ces points comme centres, ou mieux comme pôles, avec un rayon convenable, on décrit deux arcs de cercle qui se coupent en deux points D, D'; avec une autre ouverture de compas on détermine de même un troisième point D''. D, D', D'' étant également distants des points A et B, ils appartiennent à la circonférence du grand cercle dont le plan est perpendiculaire au milieu de AB, et il en résulte que si l'on construit sur un plan un triangle ayant pour côtés les distances rectilignes des trois points D, D', D'' (971), la circonférence circonscrite à ce triangle sera égale à celle d'un grand cercle, et son rayon sera celui de la sphère (980).

Fig. 214.



1032. *Étant donnés deux points* A *et* B *sur la surface de la sphère, décrire une circonférence de grand cercle qui passe par ces deux points.* Des points A et B comme pôles, avec une ouverture de compas égale à la corde d'un quadrant (854, 1031), on décrit deux arcs de cercle qui se coupent au point C, et de ce point comme pôle, avec la même ouverture de compas, décrivant une circonférence, elle répond à la question.

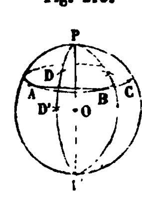
Fig. 215.



On voit que la même construction peut servir à trouver les pôles d'une circonférence ou d'un arc de grand cercle.

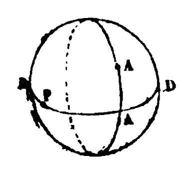
1033. *Décrire la circonférence de petit cercle passant par trois points* A, B, C *situés sur la surface de la sphère.* On détermine, toujours en opérant comme au n° 1031, deux points D, D' également distants de A et B, et par D, D' on fait passer une circonférence de grand cercle, dont le plan est perpendiculaire sur le milieu de AB, comme contenant les points D, D' et le centre O également distants de A et de B (746). On trace de même la circonférence de grand cercle dont le plan est perpendiculaire au milieu de BC; cette circonférence rencontre la première aux points P et P', qui sont les pôles de la circonférence demandée, et permettent l'un et l'autre de la tracer.

Fig. 216.



1034. *Par un point* A, *pris sur la surface de la sphère, mener une circonférence de grand cercle perpendiculaire à une circonférence ou à un arc de grand cercle donné* BD. Du point A, situé sur BD ou hors de BD, comme pôle, avec la corde d'un quadrant (1031), on décrit un arc de grand cercle qui coupe la circonférence donnée au point P; du point P comme pôle, avec la même ouverture de compas, décrivant une circonférence de grand cercle, elle passe par le point A et satisfait à l'énoncé.

Fig. 217.



Lorsque le point A est le pôle de BD, toute circonférence de grand cercle qui le contient satisfait à l'énoncé ; mais dans tout autre cas il n'y a qu'une solution.

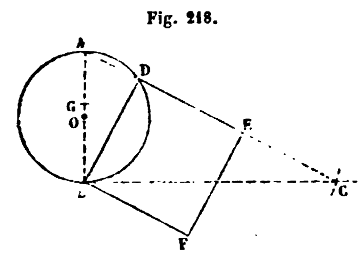
1035. Il y a trois problèmes qui paraissent appartenir à la géométrie élémentaire, et qui ne peuvent être résolus au moyen de la règle et du compas (965). Ce sont :

1° *La trisection de l'angle*, c'est-à-dire la division d'un angle ou d'un arc en trois parties égales ;

2° *La quadrature du cercle*, qui consiste à construire un carré ayant la même surface qu'un cercle donné.

Le tracé graphique suivant résout cependant ce problème avec une approximation moindre qu'une unité décimale du cinquième ordre. On trace un diamètre AB et une tangente BC ; on prend OG égal au sixième du rayon OA ; du point G comme centre, avec un rayon double du diamètre AB, on décrit un arc de cercle qui coupe la tangente en C. On joint AC, et la corde BD est le côté du carré cherché BDEF.

Fig. 218.



3° *La duplication du cube*, qui consiste à trouver le côté d'un cube double d'un cube donné.

NOTIONS DE DESSIN (964).

INSTRUMENTS ET OBJETS DE DESSIN.

1036. *Les instruments et objets dont on fait usage pour l'exécution du dessin linéaire et du lavis sont :* la règle, l'équerre, le té, le pistolet, le compas, le compas de réduction, le compas de proportion, le double décimètre, le rapporteur, le tire-ligne, la plume, le crayon de mine de plomb, l'encre de Chine, quelques couleurs à l'eau, le godet, le pinceau à laver, le caoutchouc ou gomme élastique, l'éponge, la colle à bouche, la petite pointe, dite punaise, servant à fixer le papier sur la planche quand on se dispense de le coller, le papier, la planche sur laquelle on colle le papier.

Nous allons passer en revue les principaux de ces instruments et objets de dessin.

1037. Une *règle* doit être en bois (ordinairement de poirier ou de pommier bien sec), afin que sa légèreté permette de la faire glisser facilement sur le papier, et que sa rigidité s'oppose à toute flexion sous la pression de la pointe qui trace. Elle doit de plus être mince ($0^m,003$ au

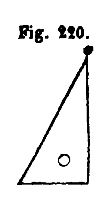
plus), afin qu'il soit facile de toujours tenir la pointe du crayon ou du tire-ligne à la même distance de son arête en traçant la ligne; c'est pour obtenir le même résultat que le dessinateur doit promener le crayon ou le tire-ligne le long de la règle en le tenant toujours parallèle à lui-même.

Pour pouvoir tracer les lignes droites, il est nécessaire que l'arête de la règle soit bien dressée; ce dont on s'assure en vérifiant si cette arête peut coïncider avec une droite AB, ou mieux, la règle étant placée dans la position ABCD, en traçant une ligne dans toute la longueur de l'arête AB, et, la règle étant retournée dans la position ABC'D', en traçant une seconde ligne suivant AB. Si les deux lignes coïncident, c'est que l'arête AB est droite. Ce deuxième moyen de vérification a l'avantage de doubler les quantités dont l'arête AB s'écarte de la ligne droite et, par suite, de les rendre plus visibles.

Fig. 219.

1038. L'*équerre* a la forme d'un triangle rectangle. Comme pour la règle, elle doit être en bois mince, et elle est percée d'un trou, appelé *œil* de l'équerre, qui permet de la faire glisser plus facilement sur le papier, et à l'aide duquel le dessinateur peut la suspendre quand il n'en fait pas usage. Comme le bois mince est sujet à se contourner, il faut éviter de placer l'équerre sur des objets mouillés ou chauds et de l'exposer au soleil. Dans l'industrie, les règles et les équerres sont ordinairement en métal, afin qu'elles ne se déforment pas quand elles sont choquées par des corps durs, et le plus souvent les équerres se composent de deux règles formant seulement les deux côtés de l'angle droit, afin qu'elles puissent servir à vérifier si un angle dièdre saillant d'une pièce est droit, aussi bien que si cet angle était rentrant.

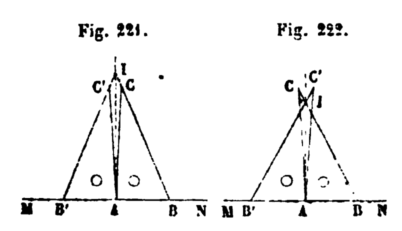
Fig. 220.



Le plus ordinairement les angles aigus de l'équerre sont de 31°,5 et 58°,5. Il y a des équerres dites à 45°, parce que les deux angles aigus valent chacun 45°; d'où il résulte que les deux côtés de l'angle droit sont égaux entre eux. Il y a aussi des équerres dont l'un des angles aigus a 30° et l'autre 60°, et que l'on nomme *équerre à hexagones*, à cause de l'usage facile qu'en font les dessinateurs pour tracer les hexagones (1009, 1011).

On s'assure que les arêtes d'un équerre sont droites en opérant comme pour la règle (1037), et l'on reconnaît que son angle est droit, en appliquant dans deux positions, comme l'indiquent les *fig.* 221 et 222, un des côtés de cet angle contre l'arête MN d'une règle; si les lignes AC, AC' tracées le long de l'autre côté de l'angle se confondent en

Fig. 221. Fig. 222.



une même droite AI, c'est que l'angle est droit; la *fig.* 221 indique qu'il est moindre qu'un droit, et la *fig.* 222 montre qu'il est obtus.

1039. Le *compas* est un instrument formé de deux branches AB, AC, ordinairement en cuivre, réunies par une extrémité au moyen d'un axe autour duquel elles peuvent tourner à frottement ni trop fort ni trop faible, et armées à l'extrémité libre d'une pointe fine en acier, dite *pointe sèche*. Quand le compas est employé pour tracer des arcs de cercle sur le papier, une des pointes sèches est remplacée par un porte-crayon ou par un tire-ligne, dont on augmente au besoin la longueur par une *rallonge* mobile si le cercle à tracer est grand.



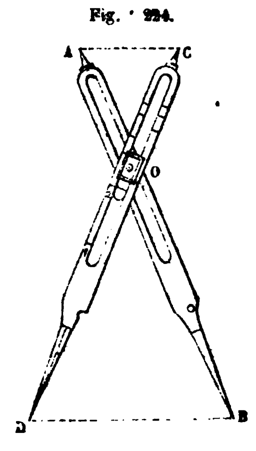
Lorsque le frottement de la tête du compas est trop considérable, les branches fléchissent quand on ouvre ou ferme le compas, et il est difficile de prendre exactement une longueur donnée; quand au contraire il est trop faible, les pointes peuvent se rapprocher ou s'écarter pendant qu'on trace un arc de cercle. On obtient un frottement convenable en serrant plus ou moins un écrou dont est armé l'axe du compas. On reconnaît que la charnière d'un compas est bien ajustée, en ouvrant et fermant lentement le compas; si l'on n'observe aucune secousse, c'est que l'ajustement est bon. Dans les meilleurs compas, l'une des branches est à tête d'acier; comme c'est la tête qui pénètre dans l'autre, et qu'elle est simple, on dit pour cette raison que le compas est à *simple d'acier*.

Pour conserver en bon état un compas, et en général tout instrument métallique, il faut, immédiatement après s'en être servi, l'essuyer avec un morceau de peau de gant; sans cette précaution, l'acier et même le cuivre peuvent s'oxyder en quelques jours.

Lorsque les cercles sont trop grands pour qu'on puisse les tracer avec le compas ordinaire à rallonge, on a recours au *compas à verge*, qui se compose de deux embrasses ou coulisses mobiles le long d'une règle graduée, en un point quelconque de laquelle on peut les fixer par une vis de pression. L'une des embrasses, qui est le plus souvent fixe, porte une pointe sèche qui se place au centre du cercle à tracer, et l'autre, qu'on peut fixer en un point quelconque de la longueur de la règle, peut recevoir une seconde pointe sèche, ou un porte-crayon, ou un tire-ligne.

1040. Le *compas de réduction* se compose de deux branches d'égale longueur AB, CD, mobiles autour d'un axe O placé en un point intermédiaire aux extrémités, de manière que ces branches forment un compas à pointes sèches de chaque côté de l'axe. Une rainure pratiquée suivant l'axe de chaque branche permet d'y faire glisser l'axe de rotation, et par suite de faire varier le rapport entre les longueurs des branches des deux compas. Comme les ouvertures des compas sont proportionnelles aux longueurs des branches (les deux triangles semblables OAC et OBD donnent en effet AC : BD = OA : OD), l'on conçoit qu'on peut obtenir des ouvertures qui soient entre elles dans un rapport quelconque. Une échelle gravée sur l'une des branches indique le point où l'on doit fixer l'axe d'articulation pour obtenir le rapport voulu de réduction.

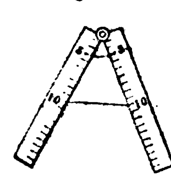
Fig. 224.



Si les longueurs des branches n'étaient pas dans le rapport qui a été gravé, ce qui peut arriver par suite d'une mauvaise graduation ou d'un accident qui a obligé de raccourcir les pointes, pour obtenir des ouvertures qui soient dans un rapport donné, 1 : 3 par exemple, on tracerait, par les moyens ordinaires (994), deux droites dont les longueurs fussent dans le rapport 1 : 3; puis on ferait par tâtonnement glisser l'axe du compas jusqu'à ce que l'une des ouvertures étant prise égale à la longueur de l'une des lignes, l'autre ouverture fût égale à la seconde ligne, et dans cette position de l'axe, une ouverture quelconque serait à l'ouverture correspondante dans le rapport 1 : 3 des longueurs des lignes.

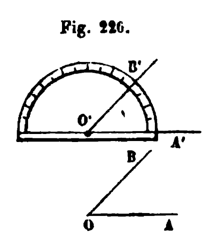
1041. Le *compas de proportion*, fondé sur le même principe que le précédent, se compose de deux règles d'égale longueur, réunies à une extrémité par une charnière dont l'axe est au point de concours des bords intérieurs des deux règles. Les deux règles ayant été divisées en parties d'égale longueur à partir de l'articulation, si l'on veut, par exemple, avoir les 3/10 d'une longueur donnée, on ouvre le compas jusqu'à ce que la distance des divisions marquées 10 sur les deux règles soit égale à la longueur donnée, et la distance des divisions marquées 3 est la longueur cherchée.


Fig. 225.



1042. Le *rapporteur* consiste en un demi-cercle, ordinairement en corne transparente ou en métal évidé, afin qu'on puisse voir le dessin qui se trouve dessous. Le bord ou *limbe* est divisé en 180 parties égales ou degrés, divsisés en demi-degrés. Le diamètre, base de l'instrument, qu'on appelle *ligne de foi*, correspond aux divisions 0° et 180°. Le centre est indiqué par un point qui permet de le faire coïncider avec le sommet de l'angle à mesurer ou à rapporter. Une graduation commence à chaque extrémité de la ligne de foi, afin de n'avoir jamais à retourner l'instrument, et de pouvoir lire immédiatement la valeur de l'angle et celle de son supplément.

Fig. 226.



La description de l'instrument suffit pour faire comprendre comment on en fera usage, soit pour mesurer un angle A'O'B', soit pour tracer un angle A'O'B' égal à un angle donné AOB (967, 1006).

1043. Un bon *tire-ligne* a ses lames ou palettes en acier, parfaitement égales, minces, sans cependant qu'elles fléchissent sous la pression que le dessinateur peut exercer contre la règle, ce qui ferait varier leur écartement, et par suite la largeur de la ligne qu'on trace.

L'encre de Chine s'introduit le plus souvent dans le tire-ligne en trempant celui-ci dans le godet, en ayant soin ensuite d'enlever avec le doigt l'encre qui est à l'extérieur des lames, laquelle s'attacherait à la règle et souillerait le papier. Mais il est préférable de se servir d'une plume dont le bout a été plongé dans l'encre; on ne risque pas ainsi d'émousser les extrémités des lames en les posant sur le fond du godet, et les faces extérieures ne se couvrent pas d'encre.

Le tire-ligne se tient de manière que les deux lames reposent bien uniformément sur le papier, et qu'il soit vertical ou très-légèrement penché du côté vers lequel on trace la ligne, et on le promène lentement parallèlement à la règle en n'appuyant que légèrement sur le papier et contre la règle. Après s'en être servi, on le suce pour enlever l'encre qu'il contient, on l'essuie avec soin, et, les lames écartées, on le renferme dans la boîte. Chaque fois qu'on veut recommencer à se servir d'un tire-ligne, on en suce la pointe, ou au moins on la trempe légèrement dans l'eau; l'encre de Chine monte mieux entre les lames ainsi décapées et humectées.

Comme l'encre de Chine sèche très-vite, il faut la renouveler souvent dans le tire-ligne et il est bon de la couvrir dans le godet pour éviter son épaississement trop rapide.

Quand les pointes du tire-ligne sont émoussées par suite de l'usure ou d'un accident, on n'en obtient plus que des lignes très-irrégulières. Pour rajuster l'instrument, les lames étant rapprochées à l'aide de la vis, on égalise leur longueur en frottant le bout sur une ardoise ou mieux sur une feuille de papier d'émeri à la marque 00 du commerce; puis on arrondit le bout en faisant décrire une demi-circonférence au manche du tire-ligne.

Si la vis devenait difficile à tourner, on la lubrifierait avec une très-légère goutte d'huile non siccative, telle que l'huile de pied de bœuf.

1044. Les *crayons* de mine de plomb sont les seuls employés pour le dessin linéaire; ils doivent être d'un grain fin et homogène, et tracer des lignes également noires; on doit pouvoir les tailler fin sans les casser. Ceux du n° 3 *lignes* sont les plus convenables; pour les croquis et le dessin pittoresque ou d'ornement on emploie ceux des n°s 1 et 2 *dessin*, qui sont moins fermes. On donne ordinairement la préférence aux crayons *Conté;* mais les crayons *Gilbert*, *Faber* et *Walter* sont très-employés.

Le classement des crayons se fait d'après leur dureté, les tendres portent le n° 1; mais il varie quelquefois notablement d'un fabricant à l'autre; voici celui des crayons Gilbert:

N° 1	(BB)	très-noir et tendre pour ombrer.
N° 0	(HB)	dur et noir pour écrire et dessiner.
N° 2	(F)	pour ombrer moins noir.
N° 3	(H)	dur pour les bureaux.
N° 4	(HH)	plus dur pour les ingénieurs.
N° 5	(HHH)	très-dur *id.*

Le n° 4 (HH) nous fait un très-bon usage.

1045. L'*encre de Chine* n'est autre chose que du noir de fumée agglutiné avec une colle de gomme et de gélatine. Sa qualité dépend surtout du dégraissage complet du noir, auquel on peut suppléer en partie en versant la teinte d'encre dans une petite cuve en papier à gros grains, et en la faisant rouler sur les parties encore sèches du fond. La plus grande partie du noir gras qui forme une couche terne à la surface de la teinte reste adhérente au papier.

L'encre de Chine, qui est la plus importante des couleurs employées pour le dessin, doit être choisie de la meilleure qualité possible. Elle doit être très-dure et à cassure luisante et d'un éclat métallique.

En frottant l'extrémité d'un bâton d'encre de Chine sur l'ongle humecté, elle doit s'y étendre sans le rayer, c'est-à-dire qu'elle doit être unie et sans gravier, et la tache noire qui en résulte doit sécher rapidement, et être luisante avec reflet bronzé. Si au contraire l'encre est raboteuse et d'un noir mat, elle est de très-médiocre qualité.

Quand on délaye de l'encre de Chine, il faut frotter légèrement le bout du bâton sur le fond du godet en porcelaine, qui doit être bien lisse, et éviter tout mouvement brusque ou choc qui pourrait détacher du bâton de l'encre mal délayée.

Si l'encre délayée est trop épaisse, elle ne coule pas assez vite pour le mouvement du tire-ligne; si elle est trop claire, les traits ne sont pas assez apparents; dans les deux cas les lignes manquent de netteté.

Il faut essuyer le bâton d'encre de Chine après s'en être servi; sans quoi son extrémité se gerce en séchant, et quand on s'en sert de nouveau, il s'en détache des parcelles et le délayage se fait mal. Le linge employé ne doit pas laisser de duvet adhérent à l'extrémité du bâton.

L'encre qui a séché dans le godet ne doit pas être employée une seconde fois; elle se délaye mal, coule difficilement dans le tire-ligne, et de plus elle a perdu sa qualité indélébile; ainsi en lavant par dessus les lignes qui en sont tracées, elles déteignent et salissent le dessin.

L'encre ordinaire à écrire attaque les palettes du tire-ligne, coule trop fort et ne peut donner des traits fins et purs.

1046. Les *pinceaux* dont on fait ordinairement usage pour le lavis sont montés dans une plume de cygne qui a de 0m,005 à 0m,007 de diamètre intérieur près du pinceau. Les meilleurs sont en poil de martre; ils sont plus fermes et plus élastiques que ceux en *petit gris;* un de ces derniers du prix de 1 fr. 50 vaut environ 5 fr. en poil de martre.

Prenant un pinceau par l'extrémité supérieure de la plume, le trempant dans un verre d'eau, puis le secouant en frappant l'autre extrémité de la plume sur le doigt, il doit faire parfaitement la pointe. De plus, si après l'avoir trempé dans l'eau on le courbe en l'appuyant sur le bord du verre, et qu'on le fasse glisser, en quittant le verre il doit reprendre subitement sa forme primitive. Si à ces deux épreuves le pinceau se déforme, et si au lieu de faire la pointe il fait la fourche, c'est qu'il a été mal fabriqué ou qu'il manque d'élasticité.

Pour se servir d'un pinceau, on le garnit d'une *hampe*, petit manche en bois, en ivoire ou en pointe de porc-épic, et pour exécuter un lavis, il est nécessaire d'avoir deux pinceaux montés sur la même hampe; l'un, celui qui fait le mieux la pointe, pour poser les teintes, et l'autre pour y ajouter l'eau nécessaire pour les fondre et les adoucir. Ce dernier ne doit jamais servir à prendre une teinte, il doit toujours rester propre et trempé d'eau, afin qu'il soit tout prêt quand on en veut faire usage. Il faut éviter de se servir d'un bon pinceau pour délayer des couleurs.

Après s'être servi d'un pinceau, il faut le laver avec soin dans de l'eau claire, et le secouer légèrement pour chasser l'eau qu'il contient et lui faire reprendre sa pointe; sans cela, il se déforme en séchant, il est difficile à nettoyer quand on veut s'en servir de nouveau, et bientôt on ne peut plus l'employer pour des dessins soignés.

1047. Le *papier* employé pour le dessin linéaire doit avoir le plus d'épaisseur possible, être d'un grain fin et être bien collé. Le *papier à la forme*, qui est fait feuille par feuille, est préférable à celui fabriqué *à la mécanique*, qui ne résiste pas assez au frottement de la gomme élastique. Les feuilles de papier à la forme se distinguent par leurs bords minces et inégaux appelés *ébarbures*. Celles de papier à la mécanique sont coupées nettement sur tout leur contour.

Le papier à la forme qui porte des filagrammes transparents parallèles et espacés de 0m,03 environ est dit *vergé*.

C'est surtout quand il s'agit d'exécuter un lavis soigné qu'il faut apporter une grande attention dans le choix et la conservation du papier. Le *grand-aigle* vergé convient pour les études simples, et le grand-aigle vélin, à grain, est préférable pour les dessins plus compliqués. Il doit être sans taches ni grattures, d'une épaisseur uniforme, d'un

grain fin et régulier, et de plus être bien et uniformément collé. Le papier à la marque Whatman est très-employé, mais il coûte moitié en sus du papier vergé.

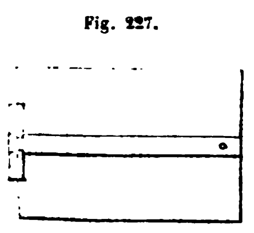
Dimensions des feuilles de papier employées pour le dessin :

Grand-monde.	1^m,22	sur	0^m,90	Jésus.	0^m,70	sur	0^m,55
Grand-aigle. .	1 ,05		0 ,75	Grand-raisin. .	0 ,64		0 ,49
Colombier. . .	0 ,85		0 ,65	Petit-raisin. . .	0 ,58		0 ,45
Chapelet. . . .	0 ,80		0 ,58	Carré.	0 ,53		0 ,42

Ces papiers, comme le papier ordinaire à écrire, dit *papier écolier*, se livrent au commerce en mains de 25 feuilles et en rames de 20 mains.

1048. La *planche à dessiner* doit être en bois tendre et homogène, tel que le peuplier et le tilleul ; elle est emboîtée en hêtre ou en chêne, et elle doit être parfaitement plane. De plus, ses côtés doivent être bien dressés et perpendiculaires entre eux si l'on veut faire usage du té.

Fig. 227.



Le *té* est composé d'une règle bien ajustée à angle droit sur une tête plus épaisse formant une joue qui s'appuie constamment contre les bords de la planche. Le té, en remplaçant la règle et l'équerre, permet de tracer très-rapidement des droites parallèles et perpendiculaires entre elles. C'est surtout en architecture qu'il est très-employé.

DESSIN LINÉAIRE.

1049. Dès que le dessin exige quelque précision, et surtout s'il doit recevoir des teintes de quelque étendue posées avec le pinceau, le papier doit être collé sur la planche à l'aide de la *colle à bouche*.

Pour coller une feuille de papier, on l'étale sur la planche ; avec une éponge fine imbibée d'eau, on en mouille toute la surface, à l'exception d'une bande de 0^m,03 environ tout autour ; quand le papier est bien pénétré par l'eau et qu'il n'est plus mouillé, on passe l'éponge exprimée sur la bande de 0^m,03, en évitant de trop humecter celle-ci, car mouillée encore par la colle à bouche, elle sécherait plus lentement que le centre de la feuille, et le papier se décollerait.

La feuille étant convenablement humide, on la retourne de manière que la face mouillée soit appliquée sur la planche ; alors, à l'aide du bâton de colle à bouche humecté d'eau ou mieux de salive, on commence par coller la feuille sur une étendue de 0^m,03 à 0^m,04 vers le milieu d'un de ses petits côtés ; on en fait autant au milieu du côté opposé ; puis successivement, en tendant toujours convenablement la feuille, aux milieux des grands côtés et aux quatre angles, et enfin on

colle les parties intermédiaires. La surface du bâton de colle étant rendue convenablement gluante en le trempant dans l'eau ou en l'agitant entre les lèvres, on en frotte le dessous du papier sur une largeur de $0^m,006$ environ; on applique sur la planche la partie de papier lubrifiée, et dessus on pose un morceau de papier un peu fort, sur lequel on frotte vivement avec l'ongle ou avec tout autre corps dur, tel qu'un couteau à papier ou un manche de canif.

Plus l'opération du collage est faite rapidement, moins le papier est sujet à goder. Une fois la feuille collée, on la laisse bien sécher, et lentement; une trop forte chaleur pourrait la faire décoller, en la tendant trop brusquement avant que la colle fût sèche.

1050. *Tracé des directrices.* Quand la feuille de papier est sèche, de ses quatre sommets A, B C, D comme centres, avec un même rayon un peu plus grand que la moitié de AD, on décrit quatre arcs de cercle qui se coupent deux à deux en E, F; de ces points obtenus comme centres, avec un même rayon plus grand que la moitié de EF, on décrit quatre autres arcs de cercle qui se coupent en G et H. Menant EF, GH, ces droites, appelées *directrices*, sont perpendiculaires entre elles (973), elles divisent la feuille de papier en 4 parties à peu près égales, et elles sont d'un grand secours, tant pour disposer convenablement les différentes parties du dessin sur la feuille, que pour donner de l'exactitude au dessin lui-même. Les directrices se tracent au crayon seulement, et on les efface quand le dessin est passé à l'encre.

Fig. 228.

A B G E F I K L M H D C

Les lignes d'un dessin de machine, et surtout d'architecture, étant pour la plupart parallèles et perpendiculaires entre elles, on les dispose sur la feuille de manière qu'elles soient parallèles aux axes EF, GH, et pour tracer l'une quelconque IK de ces lignes, on mène toujours une parallèle à l'axe EF, et non à une droite LM tracée précédemment, afin de ne pas ajouter à l'erreur qui a pu être commise en menant la parallèle LM, celle que l'on peut commettre en traçant IK (977). Sans cette précaution, on s'expose, après avoir mené quelques lignes, à avoir des droites qui s'écartent sensiblement du parallélisme, et le dessin est très inexact.

Quand on a plusieurs parallèles à mener, il convient de fixer la position de chacune d'elles par un point, puis de les tracer toutes sans que l'équerre mobile cesse d'être en contact avec la règle ou l'équerre fixe; on n'a ainsi qu'une seule fois à faire coïncider l'arête de l'équerre avec l'axe EF ou GH.

Quand on fait usage du té (1048), les directrices n'ont plus la même importance, puisqu'elles ne servent alors qu'à diviser la feuille de papier en 4 parties à peu près égales; aussi se dispense-t-on souvent de les tracer, et dans le cas contraire on les trace directement avec le té,

sans les déterminer par des arcs de cercle, on les place seulement le mieux possible au milieu de la feuille de papier.

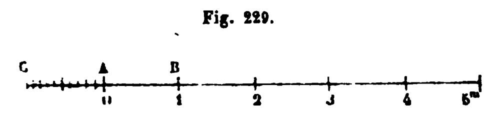
1081. *Échelle du dessin.* Lorsque l'objet qu'on représente est de petite dimension, chacune de ses parties est représentée en vraie grandeur par le dessin, et l'on dit que le dessin est de *grandeur naturelle* ou de *grandeur d'exécution;* cette dernière expression est surtout usitée dans les ateliers.

Lorsque les objets qu'on représente sont de grandes dimensions, on ne peut plus les représenter en vraie grandeur sur la feuille de papier; alors le dessin n'est qu'une figure *semblable* à l'objet, c'est-à-dire que le rapport de chaque dimension du dessin à la dimension correspondante de l'objet est constant (998). Selon que ce rapport est $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}...$, on dit que le dessin est à l'*échelle* de $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}...$. Dans la pratique, selon qu'un mètre de longueur est représenté sur le dessin par 1 décimètre, 1 centimètre, 25 centimètres, 1 millimètre, etc., au lieu de dire que l'échelle est de $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{4}, \frac{1}{1000}$, etc., on dit le plus souvent qu'elle est de 1 *décimètre*, 1 *centimètre*, 25 *centimètres*, 1 *millimètre*, etc., *pour mètre.*

Quand l'objet qu'on représente est très-petit et très-détaillé, pour la clarté du dessin, on adopte un rapport d'échelle plus grand que 1, et selon que ce rapport est égal à 2, 3, 4..., on dit que le dessin est au *double*, *triple*, *quadruple*... de grandeur naturelle ou de grandeur d'exécution.

L'échelle d'un dessin se trace au bas de la feuille, et on la représente par une ligne droite sur laquelle on porte des longueurs égales représentant chacune un décimètre, un mètre, 100 mètres, etc., selon les dimensions de l'objet représenté. L'échelle étant de $\frac{1}{100}$ (*fig* 229), chacune de ses divisions est égale à un centimètre et représente un mètre.

Fig. 229.



Le 0 de l'échelle se place au premier point de division A, et l'on divise l'intervalle AC en 10 parties égales, représentant chacune $\frac{1}{10}$ de l'unité figurée par AB; c'est un décimètre dans la figure.

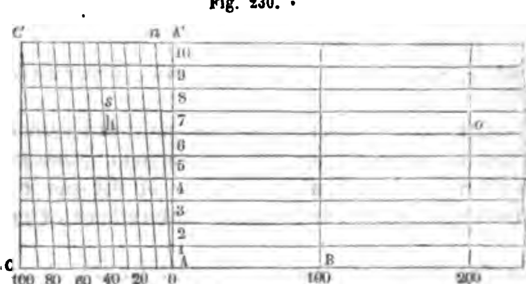
Pendant l'exécution du dessin, l'échelle sert à donner à toutes ses parties les dimensions convenables, et après elle permet de retrouver les dimensions de chacune des parties du dessin ou mieux de l'objet représenté. Ainsi, ouvrant les branches d'un compas d'une quantité égale à l'une des dimensions du dessin, et faisant glisser l'une des pointes jusqu'à ce qu'étant placé en un point de division de l'échelle, l'autre

pointe tombe entre A et C, le nombre de mètres indiqué par la première pointe, plus le nombre de décimètres et parties de décimètre indiqué par la seconde pointe, est la dimension de l'objet figuré sur le dessin par l'ouverture du compas; par exemple, cette dimension est de $4^m,35$, si la première pointe étant placée au nombre 4 de l'échelle, la seconde tombe au milieu de l'intervalle des divisions 3 et 4 de AC à partir du point A.

Les fractions des intervalles des divisions de AC ne peuvent être qu'approximatives, et l'on conçoit qu'on peut commettre de graves erreurs quand le rapport de l'échelle est très-petit, comme pour les tracés de routes, chemins de fer ou canaux, et en général pour tous les plans topographiques. Afin d'obtenir plus d'exactitude, on adopte la disposition de la *fig.* 230, qui représente une échelle de $\frac{1}{5000}$, soit 2 centimètres pour 100 mètres.

Aux points C, A, B... on élève des perpendiculaires à CB; sur AA' on

Fig. 230.



porte 10 longueurs égales, et par les points de division on mène des parallèles à CB; on prend A'*a* égal au dixième de A'C' ou de AC; on joint A*a*, et par tous les points de division de AC on mène des parallèles à A*a*. Une oblique quelconque A*a* s'écartant de la perpendiculaire AA' menée par son pied de quantités qui augmentent de $\frac{1}{10}$ de A'*a* (de 1 mètre dans la figure) en passant d'une parallèle à CB à la voisine, cette échelle, bien exécutée, donne exactement les dixièmes de A'*a*, et approximativement une fraction de ces dixièmes.

Ayant ouvert les branches du compas d'une quantité égale à une dimension du dessin, on place une des pointes sur un point de division de AB, de manière que l'autre pointe tombe en A et C; puis, en tenant toujours la première pointe sur la perpendiculaire à AB, on fait monter le compas parallèlement à lui-même jusqu'à ce que la seconde pointe rencontre une oblique à AC. Supposant qu'après ce mouvement l'une des pointes soit en *o* et l'autre en *h*, la dimension cherchée est de $200 + 40 + 6 = 246$ mètres; les 200 mètres sont indiqués par la perpendiculaire *o*, les 40 mètres par l'oblique *h*, et les 6 mètres par la parallèle à AB. Si la seconde pointe avait rencontré l'oblique *h* entre *h* et *s*,

par la distance du point de rencontre au point *h*, on aurait jugé approximativement le nombre de décimètres qu'il faut ajouter à 246 mètres pour avoir la dimension cherchée.

Il convient que les échelles soient tracées sur la feuille même du dessin, afin que les retraits ou allongements du papier se fassent indistinctement sentir sur le dessin et sur les échelles. La plus grande variation du papier se produit quand on coupe la feuille, qu'on avait eu la précaution de coller sur une planche, afin de la bien tendre pour faciliter l'exécution du dessin.

Cependant les *échelles topographiques* (*fig.* 230) sont généralement gravées avec le plus grand soin sur des règles en cuivre ou en ivoire.

1052. Quoique l'échelle permette de trouver les dimensions des différentes parties d'un dessin, en mécanique et en architecture on écrit ces dimensions sur les objets représentés; elles prennent le nom de *cotes*, et un dessin doit en général être *coté* avec le plus grand soin avant d'être remis au constructeur, pour lui faciliter son travail et éviter les erreurs.

1053. Quand les directrices et l'échelle sont tracées, on fait le *dessin au crayon*, complètement et avec exactitude; sans quoi on s'expose à faire des erreurs en passant à l'encre, et en somme on ne gagne rien comme temps. Il faut éviter de trop se servir de la gomme, qui graisse le papier et empêche l'encre de Chine de marquer.

Dans l'exécution d'un dessin, il est important de commencer par établir avec soin dans les proportions voulues les lignes principales, telles que celles de plus grande hauteur et de plus grande largeur. Elles déterminent les points extrêmes et principaux, qui servent avec elles de guide pour tous les détails du dessin.

1054. *En passant un dessin à l'encre*, on suit le même ordre d'exécution que pour l'esquisse au crayon; on répète ainsi les mêmes constructions, et l'on s'aperçoit plus facilement d'une erreur qu'on a pu commettre dans le travail au crayon. On doit s'attacher à faire les lignes égales dans toute leur étendue, convenablement fines, et d'une teinte d'encre uniforme pour tout le dessin.

Le raccord des courbes entre elles ou des courbes avec des droites doit être sans pli ou *jarret*. Aussi, quand on a à raccorder une courbe avec une droite, doit-on tracer la courbe avant la droite.

C'est toujours un inconvénient que de gratter sur un dessin, et quand il y a nécessité de le faire, il convient d'attendre que le dessin soit complètement passé à l'encre; car aux endroits grattés le papier boirait, et les lignes qu'on y tracerait ne seraient pas nettes.

C'est surtout quand le dessin doit être lavé qu'il faut éviter de gratter ou de se servir de la gomme-ponce; le papier absorberait la teinte aux endroits grattés ou effacés, et il en résulterait des taches qu'on ne pourrait réparer. Dans ce cas, avec une éponge douce imbibée d'eau très-claire, on forme une goutte recouvrant totalement la partie à effacer, et quand celle-ci est convenablement détrempée, c'est-à-dire après 2 ou 3 minutes, on passe l'éponge dessus, légèrement et à plusieurs reprises.

jusqu'à ce qu'elle ait disparu; alors on lave la place avec de l'eau très-claire, et on laisse sécher le papier.

Comme cette opération altère le papier, il est bon d'encoller la partie épongée, au moyen d'une légère eau d'alun, qu'on passe dessus à l'aide d'un pinceau. Cette dissolution se prépare en mettant dans un verre un morceau d alun avec une petite quantité d'eau, et en remuant jusqu'à ce que celle-ci prenne une saveur saline assez prononcée. Une dissolution trop chargée donne un dessin sec et dur, et trop faible elle n'empêche pas le papier d'absorber les teintes.

1055. La forme et les dimensions des corps se représentent en général par les projections de leurs lignes de contour sur deux ou un plus grand nombre de plans, en ayant recours à des *traits de force* ou à des *ombres*, qui permettent de distinguer facilement les pleins, les creux, les saillies, en un mot tout le relief des corps.

Le *plan* d'une machine, d'un bâtiment, d'un terrain, etc., est la projection, sur un plan horizontal, de la machine, du bâtiment, du terrain, etc.

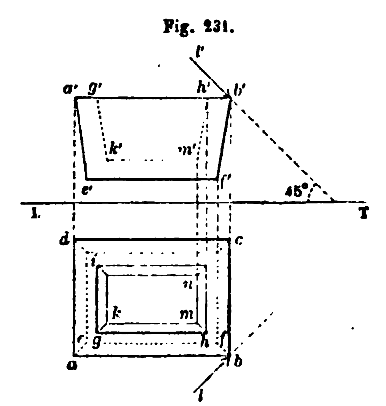
La projection sur un plan vertical, d'une machine, d'un bâtiment, etc., est appelée *élévation*, que l'on désigne souvent sous le nom de *vue;* l'élévation ou la vue est dite de *face* quand elle est la projection de la face principale; elle est au contraire dite de *côté* ou *latérale*, quand elle est la projection d'une face latérale.

La *section* faite par un plan est dite *horizontale* ou *verticale*, selon que ce plan est horizontal ou vertical. Une *coupe* verticale est encore dite *longitudinale* ou *transversale*, selon le sens suivant lequel elle est faite dans l'objet qu'on représente.

La coupe verticale d'un terrain se nomme *profil*. Le profil fait suivant l'axe d'une route, par exemple, se nomme *profil en long;* ceux faits transversalement sont des *profils en travers*.

1056. En dessin géométral, on suppose que la source lumineuse est le soleil, et qu'elle est située à l'infini, c'est-à-dire que ses rayons sont parallèles entre eux. On suppose de plus que les rayons lumineux arrivent inclinés de haut en bas, de gauche à droite et de l'arrière à l'avant du spectateur, et que de plus si *lb* et *l'b'* sont les projections d'un rayon, ces droites font des angles de 45° avec la ligne de terre LT. Ainsi les rayons lumineux sont parallèles à la diagonale d'un cube dont une face est parallèle au plan horizontal et une autre au plan vertical.

Fig. 231.



D'après ces conventions, ayant les projections d'un corps, il est toujours facile de déterminer quelles sont celles de ses faces qui sont éclai-

rées, et par suite de tracer les traits de force, que l'on place sur les arêtes saillantes qui séparent une face éclairée d'une face qui est dans l'ombre. Ainsi l'auge représentée par la *fig.* 231 a en projection horizontale des traits de force sur les arêtes *bc*, *cd*, *gh*, *gi*, et en projection verticale sur les arêtes *b'f'*, *f'e'*; toutes les autres arêtes sont en traits fins. Les arêtes en creux, telles que *km*, *mn*, *kg*... sont toujours en traits fins. Les arêtes cachées, telles que *ef*, *k'm'*... sont en lignes pointées.

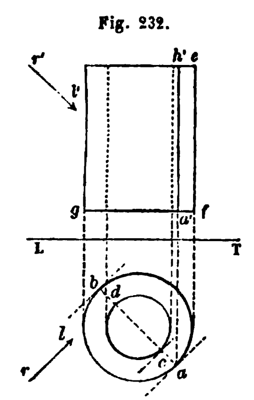
Les traits de force sont motivés par la considération que l'on admet qu'il n'y a pas d'arêtes vives dans la nature, qu'elles sont toutes plus ou moins arrondies, et que par suite quand elles séparent deux faces, l'une éclairée et l'autre dans l'ombre, elles sont privées de lumière et se projettent suivant de petites bandes noires.

Comme on le voit dans la *fig.* 231, les traits de force montrent bien si une partie du corps représenté est en creux ou en relief.

Lorsque deux faces adjacentes d'un corps sont parallèles au rayon lumineux, on met un trait de force sur leur arête commune, afin que le dessin rende mieux le relief, quoique cette arête ne soit réellement pas dans l'ombre.

La *fig.* 232 représente un cylindre creux avec l'application des traits de force. En menant à la base des tangentes parallèles à la projection horizontale *rl* du rayon lumineux, on a les limites *a*, *b*, *c*, *d*, des traits de force; quand la base est circulaire, ces limites sont mieux et plus facilement déterminées en menant par le centre une droite *ab* perpendiculaire à *rl*, et par suite faisant un angle de 45° avec LT. Les traits de force se terminent en s'amincissant, et se raccordent avec les traits fins en arrivant à la ligne *ab*.

Fig. 232.



La ligne *ef* qui limite la projection d'une partie arrondie, sans être la projection d'une arête saillante séparant une surface éclairée d'une surface dans l'ombre, ne doit pas recevoir de trait de force; cela permet de distinguer de suite, à la simple inspection d'une projection, si la section de la pièce est polygonale ou courbe.

gf est un trait de force, qu'il convient d'amincir aux extrémités, afin de faire sentir le relief qu'a le corps vers son milieu. C'est également pour faire sentir le relief des pièces ou des parties de pièces l'une sur l'autre, que dans l'ensemble d'un dessin les traits de force devraient être d'autant plus faibles qu'ils représentent des arêtes plus éloignées pour la projection verticale et situées plus bas pour la projection horizontale. C'est ce qu'on néglige le plus souvent de faire dans la pratique.

1057. Ordinairement les *écritures d'un dessin* sont en « CAPITALE » pour le titre général du dessin, en « Romaine » pour le titre particulier de chaque dessin, et en « *Italique* » pour les écritures à l'intérieur, telles que légendes ou notes. La position et la hauteur des écritures se

déterminent par deux lignes parallèles tracées au crayon, et un dessinateur qui n'est pas habile écrivain doit les esquisser au crayon avant de les faire à l'encre.

1058. *Copie des dessins.* Si le dessin doit être reproduit à la même échelle, à l'aide du compas on rapporte successivement sur la feuille de papier, les axes, les points principaux, puis les détails. Quand le dessin est terminé au crayon, on le passe à l'encre.

Quand dans un dessin à reproduire il y a un contour sinueux qui n'a rien de géométrique, on a recours à une droite du dessin ou, si cela est utile, à une droite auxiliaire, sur laquelle on abaisse des perpendiculaires d'autant de points du contour qu'il est nécessaire. Ayant reproduit la droite et les perpendiculaires, on a des points qui permettent de tracer le contour.

Au lieu d'avoir recours à des perpendiculaires, on peut reporter sur la copie un point quelconque du contour en le considérant comme étant le sommet d'un triangle qui a pour base la droite auxiliaire. Avec deux compas, un dans chaque main, on prend à la fois les distances du point considéré aux extrémités de la base du triangle, et l'on reporte simultanément ces distances sur la copie, ce qui donne sans tracé le point considéré, qu'on ne fait d'abord que marquer légèrement avec la pointe de l'un des compas.

La reproduction des dessins à la même échelle se fait le plus souvent sur un papier rendu transparent à l'aide d'un vernis gras ou gommeux, ou sur un calicot très-fin, imprégné d'un vernis gras, séché et laminé. Le dessin obtenu se nomme *calque*, il est fait sur du *papier à calquer* ou de la *toile à calquer*. Ayant étendu une feuille de papier à calquer ou de papier-toile sur le dessin, on reproduit directement celui-ci en en suivant les contours avec le tire-ligne ou la plume.

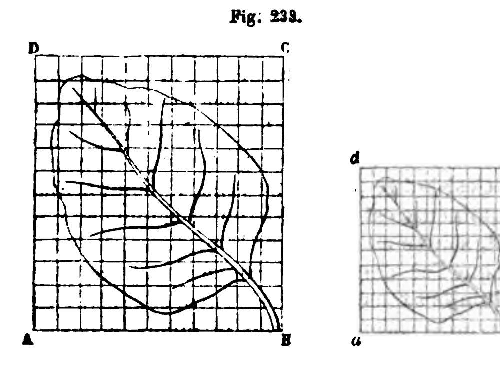
Quand il n'y a pas d'inconvénient, on peut obtenir promptement la copie d'un dessin, en appliquant le modèle sur une feuille de papier, et en piquant avec une aiguille les points principaux en nombre suffisant pour pouvoir faire ensuite tout le tracé avec facilité.

Si le dessin doit être reproduit à une autre échelle, après avoir dessiné cette nouvelle échelle sur la feuille de papier, comme au nº 1051, on lui rapporte les différentes parties du modèle, et on les dessine au fur et à mesure qu'on les obtient à la nouvelle échelle. Le compas de réduction (1040) permet d'obtenir très-rapidement à une autre échelle la reproduction d'un dessin. Ayant pris une dimension du modèle avec un côté du compas, il suffit de la reporter sur la copie avec l'autre côté. Le compas de proportion (1041) peut aussi être employé à cet effet; mais moins avantageusement que le précédent.

La reproduction à la même échelle ou à une échelle plus grande ou plus petite, d'un dessin très-chargé de détails ou de contours qui n'ont rien de géométrique, se fait avantageusement par la *méthode des carreaux.* On renferme le dessin à reproduire dans un rectangle qu'on divise en carrés égaux, et l'on reproduit le rectangle divisé en carreaux à la nouvelle échelle; dans la *fig.* 233 la reproduction se faisant dans

le rapport 3 : 5, on a pris $ab = 3/5AB$, et $ad = 3/5AD$ (995). Cela fait, on

Fig. 233.



dessine de proche en proche dans les carrés successifs du second cadre tous les détails qui se trouvent dans les carrés correspondants de l'original.

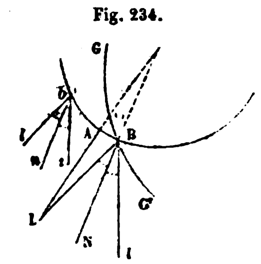
Si l'on veut conserver intact le modèle, il suffit de le recouvrir de papier à calquer, sur lequel on établit le système de carreaux.

LAVIS.

1059. Le *lavis* consiste à teinter un dessin au trait, soit pour donner aux objets leur couleur naturelle, soit surtout pour figurer les ombres que l'on observerait sur les corps naturels, afin d'en rendre les formes sensibles. Le lavis se fait au moyen d'encre de Chine et de couleurs délayées dans l'eau, qu'on applique avec le pinceau (1046). Souvent on ne fait usage que d'encre de Chine.

1060. *Rayon lumineux incident. Rayon réfléchi. Point brillant. Ligne brillante.* Un rayon LB qui émane d'une source lumineuse est appelé *rayon incident;* ce rayon venant rencontrer la surface d'un corps, il est renvoyé dans l'espace suivant BI, et il prend le nom de *rayon réfléchi*. Les rayons incident et réfléchi sont situés dans un même plan, qui contient la normale BN à la surface réfléchissante au point B; de plus ces rayons font des angles égaux avec la normale, ce qu'on exprime en disant que l'*angle d'incidence* LBN *est égal à l'angle de réflexion* NBI. Le point de la surface le mieux éclairé est celui A pour lequel le rayon LA est normal à la surface; mais pour un observateur placé en I, celui qui paraît le mieux éclairé est le point B, que pour cette raison on nomme *point brillant*. Les points autres que B ne paraissent même éclairés pour l'observateur placé en I que parce que la surface n'est jamais parfaitement

Fig. 234.



unie, et que ses aspérités ou cavités présentent toujours des petites surfaces qui réfléchissent la lumière vers I.

La droite BN étant normale à la surface, elle est normale à toute les courbes tracées par le point B sur la surface; ainsi la surface étant de révolution, BN est non-seulement normale à la courbe AB déterminée par le plan LBI, mais aussi à la génératrice GG′ passant par B, et l'on peut dire que réciproquement elle est normale à la surface, dès qu'elle est normale à AB et à GG′; c'est sur cette réciproque qu'on se fonde pour tracer BN, c'est-à-dire pour déterminer le point brillant B.

Si la source lumineuse est située à l'infini, comme on peut le supposer pour le soleil, source adoptée dans la pratique du dessin, et si de plus on suppose que l'observateur se trouve aussi à une distance infinie, tous les rayons lumineux sont parallèles entre eux; celui qui est normal à la surface détermine encore le point le mieux éclairé, et le point brillant est celui pour lequel le rayon réfléchi est parallèle à la direction constante allant à l'observateur. En dessin, ce rayon réfléchi est perpendiculaire au plan vertical ou au plan horizontal, selon qu'il s'agit de la projection verticale ou de la projection horizontale du corps éclairé.

Cela établi, il en résulte que menant un rayon lumineux quelconque *lb*, et par un point *b* de ce rayon une droite *bi* parallèle à la direction que doit avoir un rayon réfléchi pour qu'il aille à l'observateur, la bissectrice *bn* de l'angle *lbi* sera parallèle à la normale BN qui détermine le point brillant B. Le problème de la détermination du point brillant revient, comme l'on voit, à mener à la surface une normale BN qui soit parallèle à une droite donnée *bn*.

Quand la surface est de révolution, menant par l'axe un plan parallèle à *bn*, il coupe la surface suivant une génératrice ou méridienne, et le problème revient à mener à cette génératrice une normale parallèle à *bn*; c'est ce que l'on fait après avoir obtenu cette génératrice en vraie grandeur, soit par rabattement sur l'un des plans de projection, soit par projection sur un plan auxiliaire.

La source lumineuse et l'observateur étant supposé être à l'infini, si la surface est courbe en tous sens, comme celles de la sphère et de l'ellipsoïde, il n'y a qu'un seul point mieux éclairé que tous les autres, et également qu'un seul point brillant; mais si la surface est engendrée par une droite, comme celles du cylindre et du cône, il y a toute une génératrice dont les points sont mieux éclairés que les autres, et le point brillant devient une ligne brillante, qui est aussi une génératrice de la surface.

Il y a lieu de remarquer que quand la génératrice est une droite, il peut arriver qu'aucun rayon lumineux ne soit normal à la surface; c'est ce qui arrive, par exemple, pour un cylindre vertical; alors la génératrice la mieux éclairée est encore déterminée par les rayons lumineux passant par l'axe; mais cette génératrice n'est mieux éclairée que relativement à toutes les autres, qui en définitive se trouvent dans des plans tangents plus inclinés par rapport aux rayons lumineux. L'on conçoit

de même que dans ce cas la ligne brillante peut ne l'être que relativement; ainsi, pour le cylindre vertical, un rayon réfléchi par la ligne brillante devant être horizontal, comme la normale au cylindre est aussi horizontale, il faudrait que le rayon lumineux le fût également, ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur sa direction.

1061. La *lumière directe* est celle qui est transmise sans intermédiaire, du corps lumineux à l'objet éclairé. La *lumière réfléchie* est la lumière que les corps éclairés renvoient aux corps environnants (1060).

Le *reflet* est la lumière renvoyée sur la partie dans l'ombre d'un corps par les corps voisins, le sol et l'atmosphère. C'est à la réflexion de la lumière par l'atmosphère que sont dus l'*aurore* et le *crépuscule;* autrement on passerait subitement de la nuit au jour et du jour à la nuit.

Du sens de la lumière réfléchie, que l'on peut supposer être contraire à celui de la lumière directe, il résulte que les surfaces reçoivent d'autant mieux la lumière réfléchie qu'elles sont plus opposées à la lumière directe; ainsi une surface privée de lumière directe doit être d'autant moins foncée qu'elle se rapprochera davantage de la position normale au rayon lumineux.

1062. L'*ombre* est l'obscurité plus ou moins grande que produit sur la surface d'un corps la privation de lumière directe.

L'*ombre propre* d'un corps est celle produite sur la portion de sa surface privée de lumière directe.

La *ligne de séparation d'ombre et de lumière* est la ligne, droite ou courbe, qui sépare la partie éclairée de la surface d'un corps de l'ombre propre. Elle est la directrice d'une surface cylindrique dont la génératrice reste parallèle au rayon lumineux et constamment tangente à la surface du corps. Dans la figure de la page 348, la génératrice *aa'* fait partie de la ligne de séparation d'ombre et de lumière.

L'*ombre portée* est celle que produit un corps sur la surface d'un autre corps, en interceptant une partie ou la totalité des rayons de lumière directe qui seraient venus frapper cette surface. L'*ombre* peut aussi être *portée* par une partie saillante d'un corps sur une partie de la surface du même corps.

1063. *Ombres à l'encre de Chine destinées à faire sentir les formes planes ou arrondies, les parties fuyantes et les positions relatives des objets.*

1° Une surface plane éclairée parallèle à l'un des plans de projection reçoit sur toute son étendue une teinte claire et uniforme; c'est qu'en effet tous ses points se trouvent dans les mêmes conditions de lumière.

2° L'intensité de la lumière reçue par un corps éclairé directement étant en raison inverse du carré de sa distance à la source lumineuse, il en résulte que de deux surfaces parallèles, celle qui est la plus éloignée du spectateur placé en avant du plan vertical ou au-dessus du plan horizontal reçoit la teinte la plus forte.

3° Par la même raison, sur une surface plane et éclairée, oblique par rapport au plan de projection, l'intensité de la teinte n'est pas uniforme,

elle va en augmentant à mesure que les éléments de la surface s'éloignent, et sur une ligne tracée sur la surface, parallèlement au plan de projection, la teinte est uniforme.

4° La quantité de lumière qui arrive sur une même surface étant proportionnelle à la projection de la surface sur un plan normal à la direction de la lumière, et par conséquent proportionnelle au sinus de l'angle formé par la surface avec la direction de la lumière, il en résulte qu'une surface plane éclairée doit recevoir une teinte d'autant plus claire, qu'elle s'approche davantage de la position normale à la direction du rayon lumineux.

5° Une surface arrondie pouvant être considérée comme composée de surfaces planes infiniment petites, ce qui précède s'applique à ces surfaces élémentaires, et il en résulte que pour une surface courbe éclairée les teintes doivent augmenter graduellement depuis l'élément de surface qui est normal à la direction du rayon lumineux, jusqu'à la ligne de séparation d'ombre et de lumière.

La considération du point brillant ou de la ligne brillante fait qu'ordinairement on déplace un peu la partie la moins teintée de la surface (1060).

1064. Le sens de la lumière réfléchie pouvant d'une manière générale être supposé contraire à celui de la lumière directe (1061), il en résulte que sur les surfaces dans l'ombre la dégradation des teintes suit un ordre inverse de celui des surfaces éclairées; ainsi une surface dans l'ombre est d'autant plus foncée, qu'elle serait plus claire si la lumière directe pouvait venir la frapper, ou autrement, une surface dans l'ombre doit être d'autant plus foncée, qu'elle est plus rapprochée du spectateur ou moins opposée à la lumière directe.

1065. Les ombres portées suivent la même loi de dégradation que les ombres propres. Ainsi pour l'ombre portée sur une surface cylindrique éclairée, la teinte la plus noire correspond à la partie la plus claire de la partie éclairée; puis elle va en diminuant progressivement d'intensité, de manière à se confondre avec l'ombre propre au delà de la ligne de séparation d'ombre et de lumière. Si la surface cylindrique est complétement dans l'ombre, les teintes se placent sur toute la surface comme elles le seraient sur l'ombre portée, si une partie de la surface était éclairée.

L'ombre portée sur une surface quelconque décroît graduellement à mesure que la distance de la surface au corps qui porte ombre augmente, et si le corps qui porte ombre a une très-grande hauteur, comme un clocher, par exemple, les contours de l'ombre ne doivent plus se distinguer que faiblement vers les limites éloignées de la base.

Outre la diminution d'intensité d'une ombre portée à mesure que la distance du corps qui porte ombre augmente, on la termine sur tout son pourtour par un liseré moins foncé, appelé *pénombre*. La pénombre est d'autant plus large, et ses limites plus incertaines que le corps qui porte ombre est plus éloigné.

1066. Sur les arêtes saillantes formées par les surfaces éclairées, on

ménage un filet clair, appelé *filet de lumière*, à peu près de la largeur d'un trait de force (1056), dont l'effet est inverse. Un filet de lumière reçoit une légère teinte quand les surfaces qu'il sépare ont reçu une teinte d'une certaine intensité.

Par suite de l'effet de la lumière réfléchie, on ménage aussi des filets, appelés *reflets*, sur les arêtes saillantes séparant deux surfaces dans l'ombre ; ils sont un peu moins foncés que les surfaces qu'ils séparent.

Quand les deux surfaces formant une arête saillante sont visibles, comme l'une d'elles est toujours moins teintée que l'autre, il n'y a pas lieu de réserver ni filet lumineux ni reflet.

1067. Toute teinte appliquée sur une surface, dans l'ombre, propre ou portée, prend le nom de *teinte d'ombre*, et toute teinte, quelle que soit son intensité, appliquée sur une surface éclairée, se nomme *demi-teinte*.

Une *teinte plate* est une teinte uniforme placée sur toute une surface. Les teintes plates noires sont appelées *pochées*, et les teintes grises, *demi-teintes*.

1068. Pour *préparer une teinte*, on frotte légèrement le bout du bâton d'encre de Chine dans un godet bien lavé et contenant un peu d'eau pure; puis avec le pinceau on mêle bien l'encre et l'eau. La teinte ainsi obtenue est en général trop foncée; on la ramène au ton voulu en y ajoutant avec le pinceau la quantité d'eau nécessaire et en agitant de nouveau; ordinairement cette seconde opération se fait dans un second godet, afin de réserver la teinte primitive pour préparer toutes les autres.

1069. Pour *poser une teinte*, on incline la planche sur laquelle est le dessin, et on la maintient dans cet état en la calant de manière à l'empêcher de vaciller. Alors on trempe le pinceau dans la teinte, en l'enfonçant assez pour qu'il en soit imbibé suffisamment, ce qui a lieu quand il n'en pourrait plus prendre sans cesser de faire la pointe et sans la laisser échapper. S'il en avait pris en excès, on l'en débarrasserait en le faisant glisser légèrement appuyé sur le bord du godet. Puis, en commençant par l'angle gauche supérieur de l'espace que doit couvrir la teinte, on fait exactement suivre au pinceau une petite étendue de la limite supérieure, puis de la limite de gauche, et on couvre la partie ainsi bordée sur deux côtés en lui donnant à peu près la forme rectangulaire; on fait suivre au pinceau une autre petite étendue de la limite supérieure, puis de la limite de gauche, on fait le remplissage intérieur en lui donnant toujours à peu près la forme rectangulaire, et l'on continue ainsi de suite jusqu'à l'angle droit inférieur de la teinte.

Pendant ce travail, on trempe de temps en temps le pinceau dans le godet, afin qu'il reste toujours bien imprégné, et que le bord de droite et celui du bas de la partie de teinte posée soit constamment une espèce de petit réservoir, qu'on avance peu à peu et assez souvent pour que ses bords n'aient pas le temps de sécher. Comme ce petit réservoir ne doit plus exister quand on arrive à la fin de la teinte, on a soin pour terminer la teinte d'essuyer le pinceau à plusieurs reprises sur le bord du godet. S'il restait malgré cela un excès de liquide, on essuyerait de

nouveau le pinceau, en le passant au besoin entre les lèvres, et on en promènerait la pointe en effleurant le liquide.

Pour qu'une teinte soit uniforme, on ne doit jamais laisser en arrière un excès de liquide, qu'on a toujours soin de ramener dans le petit réservoir dont il vient d'être question; il faut surtout que les mouvements imprimés au pinceau soient de même sens, parallèles entre eux et de même étendue. On ne doit jamais revenir sur la partie de teinte qui commence à sécher; on s'exposerait à faire une tache beaucoup plus grande que celle qu'on veut faire disparaître. S'il est nécessaire de poser une seconde teinte pour colorer d'avantage la première, il faut attendre que celle-ci soit suffisamment sèche.

Les teintes grises sont les plus difficiles à poser; il y a presque toujours tache à l'endroit où l'on pose le pinceau pour commencer la teinte, et à l'endroit abandonné momentanément soit pour prendre de la couleur, soit pour continuer une autre partie qui menace de sécher. Pour conserver à la teinte la même nuance, le pinceau doit constamment prendre la même quantité de couleur.

1070. *Les taches sont blanches ou noires.* Les premières sont produites par un papier gras en quelques endroits ou mal nettoyé, et par un grain de poussière ou un corps étranger pris dans la teinte. Les taches noires sont dues à un papier de mauvaise qualité ou qui a été trop fatigué, à ce que le pinceau n'a pas été parfaitement lavé, ou encore à ce qu'on a laissé sécher une teinte en la posant.

Pour faire disparaître une tache blanche, on passe dessus, légèrement et à plusieurs reprises, la pointe du pinceau, seulement humide de couleur afin que le raccord sèche sans cerner à son contour. Si la tache est noire, pour la faire disparaître, il faut éponger la teinte tout entière pour l'affaiblir, en insistant d'avantage sur la tache; laisser sécher le papier; puis appliquer une ou plusieurs teintes faibles sur toute la surface. On peut encore raccorder une tache noire avec la teinte en l'étendant par des raccords successifs de plus en plus adoucis au pourtour.

Quand une teinte plate à appliquer sur une surface plane doit être un peu foncée, on met d'abord une teinte très-faible sur la surface, puis une seconde, et parfois une troisième, qui arrive au ton voulu. Avant de poser une nouvelle teinte, on a soin de laisser convenablement sécher la précédente.

1071. Les *bavoches* sont les petites franges inégales qui dépassent les limites de la teinte. Pour ne pas bavocher, il faut tenir le pinceau presque perpendiculairement au papier, et n'aborder le contour de la teinte qu'avec la pointe. Si en posant une teinte grise on fait une bavoche, on la repousse vivement vers la teinte avec le bout du doigt, qui l'efface et sèche le papier; puis on continue de suite la teinte et on la passe sur la partie effacée.

1072. *Fondre une teinte*, c'est étendre fort loin, avec le pinceau à l'eau, une teinte que l'on vient de poser.

Adoucir une teinte, c'est l'étendre sur les bords, avec le pinceau à l'eau, immédiatement après l'avoir posée, pour l'amener subitement de

son ton naturel à celui du papier. Comme l'on voit, ces deux opérations ne diffèrent entre elles que par l'étendue sur laquelle on dégrade la teinte.

1073. La *dégradation d'une teinte* peut s'obtenir à l'aide d'une série de teintes plates superposées et mises en retraite l'une sur l'autre, ou à l'aide de teintes fondues. Dans un lavis fait avec goût, on applique ordinairement ces deux modes de dégradation. Mais l'on peut dire que, d'une manière générale, avec les teintes plates, on fait mieux et surtout plus géométriquement sentir la forme des corps.

Les teintes plates composant une grande teinte dégradée se posent comme il a été indiqué au n° 1069; mais comme d'un côté, au moins, elles n'ont pas de limite dessinée à l'avance, même au crayon, il y a un peu plus de difficulté. Cependant, avec un peu d'attention, on acquiert promptement une sûreté de main et de coup d'œil qui permet de les limiter avec la même netteté que si elles l'avaient été à l'avance par une ligne. Il faut éviter de poser une teinte plate avec une trop grande abondance de liquide, son contour, qui se dessine toujours par une ligne plus foncée, serait alors trop vivement accentué. Si l'on s'aperçoit que la teinte en séchant tend à former une limite trop dure, on en éponge le bord par des applications légères successives du doigt, sans frotter.

Pour fondre une teinte claire, tenant la planche inclinée de manière que la partie de teinte qui doit être la plus foncée soit en haut, on commence à poser la teinte comme s'il s'agissait d'une teinte plate (1069), c'est-à-dire par la partie supérieure, mais en la menant de gauche à droite dans toute la longueur, et de haut en bas jusqu'à la limite où l'on veut commencer à la fondre. Alors, avec le pinceau à l'eau, on continue la teinte, en le passant d'abord un peu au-dessus de la limite où l'on a laissé la teinte, puis successivement au-dessous tant que cela est nécessaire, en donnant toujours les coups de pinceau dans le sens du contour à fondre et non dans le sens perpendiculaire. Il convient de procéder par teintes faibles, qu'on pose successivement en les fondant à partir de limites différentes.

Le pinceau à fondre doit être peu chargé d'eau, et on a soin de le laver plusieurs fois pendant l'opération pour le débarrasser de la teinte dont il s'est chargé en l'entraînant. On parvient ainsi à fondre la teinte jusqu'à ce qu'elle arrive au ton du papier.

Quand la teinte est trop grande pour être fondue d'un seul coup, dans toute sa longueur, on opère par parties, en ayant soin de ne pas fondre d'abord une petite étendue à la fin de chaque partie, afin de faciliter la reprise de la teinte pour la continuer.

Si la teinte devait être fondue des deux côtés, on tiendrait la planche horizontale, et l'on fondrait chaque côté comme ci-dessus, en commençant, s'il y a lieu, par le côté où le papier est blanc, le côté situé sur une teinte déjà posée séchant beaucoup moins vite.

Lorsque la teinte à fondre est très-foncée et se répète un grand nombre de fois, comme dans les pochés des fenêtres d'une façade, on prépare dans des godets une série de teintes d'intensités décroissantes,

qui servent, la plus foncée à commencer la teinte, et les suivantes successivement à la fondre, jusqu'à la dernière qu'on fond avec le pinceau à l'eau.

Si la teinte très-forte est seule et d'une grande étendue, au lieu de la poser par le procédé précédent, on peut, après l'avoir posée à sa partie supérieure, la fondre jusqu'à une certaine distance après avoir ajouté avec le pinceau une certaine quantité d'eau dans le godet; puis continuer successivement à la fondre après avoir toujours ajouté de nouvelle eau dans le godet. La quantité d'eau ajoutée chaque fois dans le godet doit aller en augmentant; si elle est, par exemple, de 2 charges du pinceau la première fois, elle est successivement de 4, 6... charges les fois suivantes.

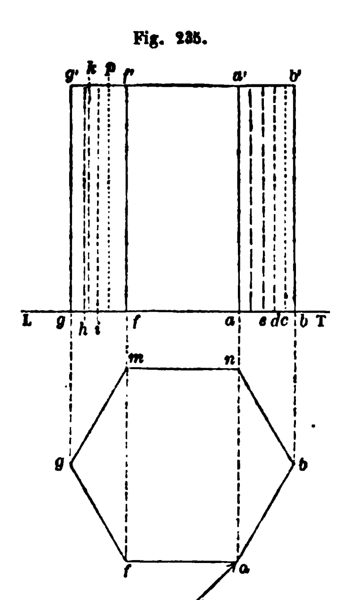
S'il est nécessaire de répéter plusieurs fois cette opération, on a soin de changer chaque fois les endroits où l'on fait des reprises de teintes, et l'on change également la progression de l'eau ajoutée dans le godet.

Si la température est un peu élevée, il convient, pour humecter le papier, de poser une couche avec le pinceau à eau, avant d'étendre une grande teinte plate ou de fondre une teinte d'une grande étendue.

1074. On nomme *garde-main*, la feuille de papier blanc qu'il est nécessaire d'avoir constamment sous la main qui manœuvre le pinceau, pour garantir le dessin du frottement de la main et des vêtements. Il sert de plus à essayer chaque teinte avant de la poser, pour s'assurer que son intensité est convenable.

1075. *Lavis d'un prisme.* Pour exécuter un lavis quelconque, on commence par déterminer les contours des ombres propres et des ombres portées, que l'on se contente de tracer légèrement au crayon s'ils ne sont pas des lignes du dessin; puis on pose une teinte plate, grise, de peu d'intensité, dite *teinte d'ébauche*, sur toutes les surfaces dans l'ombre.

Fig. 235.



La direction du rayon lumineux sur le plan horizontal indique de suite qu'en élévation l'arête aa' est la ligne de séparation d'ombre et de lumière, et que la face $abb'a'$ est seule dans l'ombre. On pose alors la teinte d'ébauche sur toute cette face; quand elle est sèche, on la pose de nouveau de a en c, en la limitant à une ligne verticale ou parallèle à bb'; puis de a en d. On force alors la teinte, et on la pose de a en e; puis, continuant à la foncer à chaque opération, on la pose successivement en reculant constamment vers a, et en se limitant toujours à des verticales. Les limites des

diverses couches sont également espacées, et le nombre des teintes, sans l'exagérer, doit être assez grand pour qu'il n'y ait pas un contraste trop brusque de l'une à l'autre. La largeur $a'b'$ étant égale à $0^m,036$ on peut employer 8 teintes de chacune $0^m,007$ de largeur, et, selon la largeur de la surface, le nombre des teintes varie ordinairement de 5 à 9.

Les surfaces dans l'ombre étant terminées, on passe aux demi-teintes des surfaces fuyantes, c'est-à-dire à la face $gff'g'$. On étend une teinte très-faible sur la largeur $gh = \frac{1}{4}\, gf$, et on la fond de manière qu'arrivée en i, milieu de gf, elle ne se distingue pas du papier blanc. Quand le papier est suffisamment sec, on pose la teinte sur la largeur $g'k = \frac{1}{3}\, g'f'$ et on la fond de manière que quand sa largeur $g'p$ occupe les deux tiers de $g'f'$, elle se confonde avec le papier.

Si la largeur $g'f'$ avait une certaine étendue, au lieu de ne faire que deux dégradations, on en ferait 3 ou même 4. Si la surface, par suite de son inclinaison avec le rayon lumineux, était moins éclairée, après y avoir posé les teintes dégradées, on la couvrirait entièrement d'une teinte uniforme.

Enfin on termine le travail par les demi-teintes uniformes qui doivent recouvrir les faces parallèles aux plans de projection, c'est-à-dire les faces $aff'a'$ et $abnmgf$. On étend d'abord une teinte très-faible sur toute l'étendue de ces surfaces; quand le papier est suffisamment sec, on pose de nouveau la teinte, et on recommence encore une troisième fois l'opération, en ménageant chaque fois les filets lumineux. Dans l'élévation du prisme, le filet lumineux ne sera ménagé que suivant l'arète fa'; dans le plan, il régnera le long de la portion $afgm$ du contour.

On voit que les faces planes dans l'ombre sont dégradées à l'aide de teintes plates, et que celles qui sont éclairées le sont à l'aide de teintes fondues.

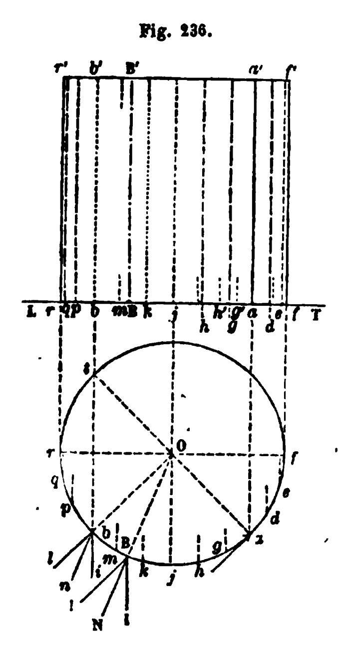
Avant de poser une teinte, on l'essaie sur le garde-main, afin de s'assurer que son intensité convient à la position de la surface sur laquelle on doit la poser, et aussi à sa position sur cette surface.

Pour éviter les pertes de temps, on peut s'écarter de l'ordre précédent d'exécution; ainsi, par exemple, pendant qu'une teinte dans l'ombre sèche, on peut poser une demi-teinte qui n'a avec elle aucune partie de contour commune.

1076. *Pour laver une pyramide, et en général un polyèdre quelconque*, on suit la même marche et on applique les mêmes principes que pour un prisme.

1077. *Lavis d'un cylindre.* Le rayon lumineux dont la projection est tangente en *a* à la base du cylindre détermine en élévation la ligne *aa'* de séparation d'ombre et de lumière, et le rayon lumineux se projetant normalement à la base du cylindre détermine la ligne relativement la mieux éclairée *bb'* (1060).

Fig. 236.



Quant à la ligne brillante relative (1060), on peut admettre que c'est celle pour laquelle les rayons réfléchis sont situés dans un plan perpendiculaire au plan vertical. Menant par le point *b* une perpendiculaire *bi* à la ligne de terre et la bissectrice *bn* de l'angle *lbi*, le rayon OB parallèle à *bn* détermine la ligne brillante relative BB'. En effet, tout rayon lumineux dont la projection est LB, parallèle à *lb*, rencontre BB', se réfléchit suivant une direction qui a pour projection la perpendiculaire BI à la ligne de terre, et l'angle d'incidence est bien égal à l'angle de réflexion, puisque les projections LBN et NBI de ces angles sont égales.

Cela établi, on divise la circonférence de la base du cylindre en un certain nombre de parties égales (ce nombre augmente avec le diamètre du cylindre, et il est tel que *a* et par suite *b* soient des points de division), et l'on considère le cylindre comme étant un prisme dont la surface latérale est composée de facettes rectangulaires ayant pour bases ces parties égales. Alors, sur la projection verticale, les teintes doivent aller en diminuant d'intensité depuis l'arête *aa'* jusqu'en *ff* du côté de l'ombre, et jusque vers BB' du côté de la lumière; elles vont également en diminuant d'intensité depuis *rr'* jusque vers *bb'*. Les largeurs des teintes s'obtiennent en projetant sur l'élévation du cylindre les points de division de la demi-circonférence de la base. Cependant il convient, pour l'effet du lavis, que la première teinte *ad* dans l'ombre soit sensiblement plus large que ses voisines, et, pour cela, on augmente de 1 le nombre des teintes de *a* en *k*, en balançant la largeur de la nouvelle teinte sur celles des autres, comme l'indiquent les amorces pointées *g'*, *h'*... de la *fig.* 236; on peut même augmenter *ad* en reculant légèrement *d* vers *f*. En augmentant de 1 le nombre des parties égales de *aj* sur le plan, et en projetant verticalement les points de division, on obtient très-sensiblement les points *g'*, *h'*... qui fixent les largeurs des teintes.

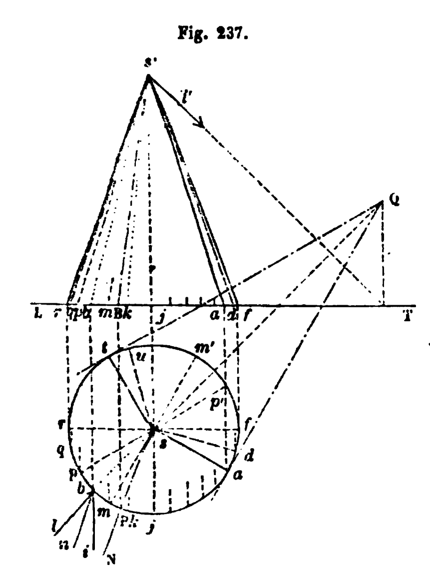
Après avoir posé la teinte d'ébauche de *aa'* en *ff'*, comme on ne pose pas de teinte de *b* en *k*, on commence par en étendre une excessivement faible de *k* en *f* et de *b* en *r*, puis on étend la même teinte de *j* en *f* et de

p en *r*, et encore la même teinte de *q* en *r* pour terminer l'ombre du côté de la lumière. On fonce alors un peu cette teinte, et on la pose depuis le point voisin de *h* jusqu'en *f*; on la fonce encore un peu, et on la pose de *h'* en *f*; on continue ainsi de suite, toujours en fonçant un peu, et en posant constamment jusqu'en *f*, tant qu'il reste plus de teintes à poser pour arriver en *a* qu'on veut en avoir à droite de *d* pour produire la courbure de la partie dans l'ombre; on arrive ainsi en *h'*. Alors, après avoir encore foncé la dernière teinte, on la pose de *g'* en *e*; on la fonce de nouveau, et on la pose de *a* en *d*, pour terminer l'élévation. Il ne reste plus qu'à poser la demi-teinte uniforme sur le plan du cylindre, en suivant la marche indiquée au numéro précédent pour la projection du prisme, et en réservant le filet lumineux sur la partie *abt* du contour.

Souvent on se contente de deux teintes pour chacune des parties *bb'r'r* et *aa'f'f*.

1078. *Lavis d'un cône.* Traçant le rayon lumineux passant par le sommet du cône, il vient rencontrer le plan horizontal, c'est-à-dire le plan de la base du cône au point Q, et menant par ce point des tangentes Q*a* et Q*t* à la base du cône, elles sont les traces horizontales des plans contenant les rayons lumineux tangents au cône. En plan, la ligne de séparation d'ombre et de lumière est formée par les deux génératrices *sa*, *st*, et en élévation par la génératrice *s'a* projection verticale de *sa*. La génératrice dont les projections sont *sb* et *s'b* est la ligne relativement la mieux éclairée. Menant *bi* perpendiculaire à la ligne de terre, et la bissectrice *bn* de l'angle *lbi*, le rayon *s*B parallèle à *bn* détermine la ligne brillante relative *s'*B en élévation. En plan, la ligne brillante relative est *sb*.

Fig. 237.



Cela fait, on termine en suivant la même marche que pour le cylindre (1077), ce que montrent les lettres, qui désignent les lignes ou points analogues dans les *fig.* 236 et 237. On divise *rb* en trois parties égales et on les reporte de *b* en *j*; on divise ensuite *ja* en parties égales, qu'on a soin de rendre un peu plus petites que celles de *rj*. On arrive à diviser convenablement *ja*, en portant sur cet arc, autant de fois qu'il est possible, à partir de *j*, l'une des parties de *rj*, et en augmentant de 1 le nombre des divisions obtenues; si cependant le reste obtenu vers *a* était

très-petit, on pourrait, en le considérant comme une division, prendre le nombre obtenu non augmenté de 1 pour celui des divisions de *ja*. L'arc *ja* étant ainsi divisé en parties égales, on projette les points obtenus sur la ligne de terre, et leurs projections déterminent sans balancement sensible les génératrices limitant les teintes sur l'élévation.

On porte sur l'arc *af*, à partir de *a* et autant de fois qu'il est possible, l'une des parties égales de *rj*; dans la *fig.* 237 elle y est contenue une fois avec un reste *df*, et par suite la partie *s'af* dans l'ombre ne contient que deux teintes; comme pour le cylindre (1077), la largeur de la teinte la plus noire *s'ad* pourra être augmentée en reculant un peu *s'd* vers *s'f*.

Il est à remarquer que la partie *s'af* dans l'ombre a d'autant moins de largeur que la hauteur *s'j* du cône est plus petite par rapport au diamètre *rf* de la base, et qu'elle commence à être nulle dès que *f* est le point de contact de la tangente menée par Q à la base du cône, c'est-à-dire quand *s'f* est incliné à 45°. L'arc *af* est égal à *rb* quand le cône devient un cylindre, et l'on a $af > rb$ pour un tronc de cône dont la grande base est au-dessus du plan de la petite base.

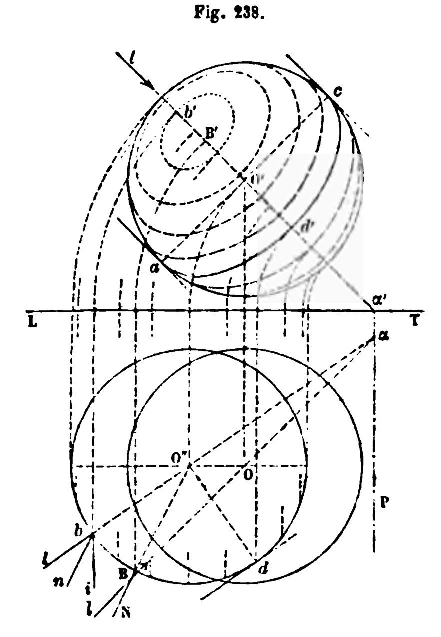
Les limites des teintes étant déterminées, on pose celles-ci en opérant comme pour le cylindre. En élévation, il n'y a pas de teinte de *s'b* à *s'k*, et il y en a trois de *s'b* à *s'r*; de l'autre côté, à partir de *s'k*, les teintes sont de plus en plus foncées jusqu'à celle *s'ad*, qui doit toujours être sensiblement plus forte; la dernière *s'df* est du même ton que celle qui précède *s'ad*. En plan, *spm* ne reçoit pas de teinte; de *sp* à *st*, et de *sm* à *sa*, les teintes sont de plus en plus foncées; à partir des plus fortes *sad*, *stu*, les teintes sont de plus en plus faibles, et la dernière *sm'p'*, opposée à la partie non teintée *smp* est uniforme.

Comme on le voit, toutes les teintes se terminent en pointe au sommet du cône.

Selon la règle générale, on commence le lavis par la pose de la teinte d'ébauche sur les parties *s'af* et *sam't*; puis l'on continue par les teintes les plus faibles, comme pour le cylindre.

1079. *Lavis d'une sphère.* La ligne de séparation d'ombre et de lumière est dans l'espace une circonférence, qui se projette suivant une ellipse sur chacun des plans de projection. Cherchons sa projection verticale; par la même marche on trouvera sa projection horizontale. D'abord le diamètre *ac* perpendiculaire au rayon lumineux est son grand axe; il suffit alors d'avoir son demi-petit axe O'd' pour pouvoir construire cette courbe par points (voir 5e partie). Rabattant sur le plan horizontal le plan Pα'O' projetant verticalement le rayon lumineux passant par le centre de la sphère, le centre de la sphère vient en O″; le grand cercle d'intersection de la sphère par ce plan se rabat en vraie grandeur, et le rayon lumineux passant par le centre de la sphère se rabat en αO″.

Fig. 238.



Menant alors une perpendiculaire O″*d* à αO″, ou au cercle O″ une tangente parallèle à αO″, le rayon O″*d* est le rabattement du demi-petit axe cherché; en relevant le point *d* en *d'*, O'*d'* est alors ce demi-petit axe.

Le point de la surface de la sphère frappé normalement par un rayon lumineux a *b* pour rabattement, et il se relève en *b'* sur le plan vertical. Menant *bi* perpendiculaire à la ligne de terre, la bissectrice *bn* de l'angle *lbi*, et le rayon O″B parallèle à cette bissectrice, B est le rabattement du point brillant, qui se relève en B' sur le plan vertical (1060).

Les limites des teintes sont des ellipses, et les largeurs de ces teintes s'obtiennent en opérant comme on l'a fait pour le cylindre et le cône (1077, 1078); c'est ce qu'indique la figure 238. Les teintes se posent également en suivant la même marche.

Pour le plan, on opérerait comme pour l'élévation; mais comme tout est symétrique par rapport à la ligne de terre, ayant une des projections des divers éléments nécessaires pour le lavis, on pourra facilement dessiner l'autre sans répéter les constructions précédentes.

1080. *Couleurs ordinairement employées pour le lavis.* Encre de Chine (1045), bleu de Prusse, bleu d'indigo, carmin, gomme-gutte, ocre jaune, terre de Sienne naturelle, terre de Sienne calcinée, c'est-à-dire colorée, sépia naturelle, sépia rouge, teinte neutre, vert anglais, vert de vessie.

La gomme-gutte est un mélange naturel d'une gomme et d'une résine

colorée; les autres couleurs sont des matières colorantes, broyées finement avec de la gomme, puis mises en pâte et séchées. Toutes ces couleurs se trouvent facilement en bonne qualité, et, sauf le carmin, à assez bas prix.

1081. *Teintes conventionnelles* (extrait en partie des feuilles lithographiées de l'École Centrale).

1° *Machines :*

Fonte. Bleu de Prusse mêlé d'encre de Chine et d'un peu de carmin.

Fer. Bleu de Prusse et encre de Chine très-faible, très-étendue d'eau.

Acier. Bleu de Prusse seul, très-faible.

Cuivre rouge. Terre de Sienne calcinée et carmin.

Cuivre jaune ou laiton. Gomme-gutte.

Bronze. Gomme-gutte et très-peu de carmin.

Bois. Terre de Sienne calcinée, un peu de carmin et un peu d'encre de Chine.

Remarque. A une grande échelle, c'est-à-dire sur une surface d'une certaine étendue, les teintes précédentes sont très-faibles; à une petite échelle, leur valeur est à peu près doublée.

Plomb. Étain. Zinc. Bleu d'indigo et encre de Chine très-étendue d'eau.

Verre. Bleu de Prusse et gomme-gutte très-étendue d'eau.

Cuir. Sépia naturelle, ou sépia rouge et un peu d'encre de Chine.

Cordes. Étoupes. Ocre jaune et un peu de sépia rouge.

Eau en plan. Bleu de Prusse faible en laissant quelques lignes blanches; on donne ensuite quelques touches horizontales avec la même teinte plus forte. Teinte neutre pour les ombres.

Eau douce en coupe. Bleu de Prusse très-étendu d'eau. Retouches avec la même teinte plus intense pour renforcer la ligne de niveau.

Eau de mer en coupe. Bleu de Prusse très-étendu avec une petite portion de gomme-gutte. Retouches avec la même teinte plus intense et renforcement de la ligne de niveau.

2° *Constructions :*

Pierre de taille en élévation. Ocre jaune et terre de Sienne calcinée, très-faible. Les assises ont été dessinées régulièrement sur toute la surface avant de poser la teinte.

Pierre de taille en coupe. Carmin très-faible. Les pierres ont été dessinées régulières, au moins celles faisant parement, avant de poser la teinte.

Moellons piqués en élévation. Ocre jaune et terre de Sienne calcinée, avec une pointe de sépia colorée. Assises régulières sur toute la surface, avant de poser la teinte.

Moellons piqués en coupe. Carmin très-faible. Assises dessinées régulières, au moins le long des parements, avant de poser la teinte.

Maçonnerie ordinaire. Comme pour la pierre de taille, soit en élévation, soit en coupe; seulement les assises sont dessinées à la plume, au lieu de l'être au tire-ligne, ce qui les rend un peu sinueuses.

Pierres sèches en élévation. Terre de Sienne calcinée et teinte neutre

faible, employées avec deux pinceaux. Avant de poser la teinte, on a dessiné à la plume des pierres à peu près rectangulaires.

Pierres sèches en coupe. Carmin très-faible. Quelques pierres à peu près rectangulaires ont été dessinées à la plume dans le massif de maçonnerie.

Briques ordinaires. Terre de Sienne et carmin.

Briques réfractaires. Ocre jaune.

Briques en coupe. Carmin faible.

Béton en plan. Terre de Sienne calcinée et teinte neutre faible, employées avec deux pinceaux. Des petits éclats de pierre ont été dessinés à la plume, d'une manière irrégulière, sur la surface, avant de poser la teinte.

Béton en coupe. Carmin très-faible. Petits éclats dessinés à la plume et parsemés à l'avance dans la masse.

Enrochements en plan. Terre de Sienne calcinée, retouches avec terre de Sienne et sépia colorée. Ces retouches sont destinées à donner du relief aux galets qui composent l'enrochement, et qu'on a dessinés à la plume avant de poser la teinte.

Enrochements en coupe. Carmin très-faible. Avant de poser la teinte, on a dessiné les galets à la plume et on les a fait légèrement tourner à l'aide de quelques traits de plume.

Gravier en plan. Terre de Sienne calcinée faible. Sable et quelques petits cailloux à la plume avec la même teinte plus forte.

Gravier en coupe. Carmin très-faible. Sable et quelques petits cailloux à la plume avec de l'encre de Chine.

Sable en plan et en coupe. Mêmes teintes que pour le gravier; mais le sable à la plume sans petits cailloux.

Rochers en plan. Teinte neutre et touches de terre de Sienne calcinée, appliquées à deux pinceaux. Retouches avec de la terre de Sienne mêlée avec de la sépia. Ces retouches sont d'une teinte plus forte et figurent des crevasses irrégulières dans les rochers.

Rochers en coupe. Carmin faible. Des crevasses irrégulières sont dessinées à la plume avant de poser la teinte.

Argile en coupe. Carmin très-faible. Des traits de plume irréguliers et légèrement inclinés représentent les couches stratifiées d'argile.

Vase en coupe. Carmin très-faible. Des traits de plume irréguliers, à peu près horizontaux et d'autant moins rapprochés qu'on s'éloigne plus de la surface, sont donnés avant de poser la teinte.

Terrain en coupe. Sépia naturelle avec un peu de carmin, ou sépia rouge seule. Renforcée à la ligne du sol par une teinte de sépia plus forte, fondue irrégulièrement. Quelques retouches irrégulières avec la même teinte.

Talus et terrain en plan. Sur les remblais ou déblais, sépia rouge faible. Sur les talus, vert anglais, ou terre de Sienne et bleu de Prusse; pour les ombres des talus, ajouter de l'encre de Chine; l'intensité doit être d'autant plus forte que le point est plus élevé.

Les *terrassements* s'indiquent très-souvent par une simple teinte de

gomme-gutte sur les parties à déblayer, et une teinte rose de carmin sur les parties à remblayer.

Pavé en plan. Teinte neutre et carmin très-faible mêlés, touches de terre de Sienne avec un second pinceau avant que la teinte soit sèche. Les pavés sont légèrement dessinés au tire-ligne avant de teinter.

Pavé en coupe. Carmin très-faible comme pour la pierre de taille. Avant de poser la teinte on dessine à la plume les pavés, dessous la couche de sable à l'aide de points, et au-dessous le terrain par quelques groupes de traits irréguliers et de sens divers.

Empierrements en plan. Terre de Sienne calcinée et teinte neutre, employées à deux pinceaux. Quelques cailloux de diverses grosseurs, parsemés sur la surface et dessinés à la plume, avant de poser les teintes.

Empierrements en coupe. Carmin très-faible. Avant de poser la teinte, on dessine à la plume les cailloux sur toute l'épaisseur de l'empierrement, et au-dessous le terrain comme sous les pavés.

Tuiles en élévation ou en plan. Terre de Sienne calcinée et carmin. Même teinte que pour les briques, avec un peu plus de terre de Sienne.

Ardoises en élévation ou en plan. Teinte neutre mêlée d'un peu de bleu d'indigo.

3° *Topographie.*

Bois et forêts. 1° *Minute.* Teinte plate de terre de Sienne naturelle faible.

2° *Rédaction.* Fond de terre de Sienne calcinée et de vert, faibles. Les arbres en deux teintes de vert de vessie mélangé d'un peu de bleu de Prusse, l'une faible sur toute la masse, l'autre forte du côté de l'ombre. Les ombres projetées en sépia colorée. Les chemins, les arbres ou massifs et quelques petites touffes d'herbe ont été légèrement dessinés à la plume avant de poser les teintes.

Broussailles. 1° *Minute.* Terre de Sienne naturelle et vert de vessie mélangé de bleu de Prusse. Ces deux teintes appliquées à deux pinceaux et simultanément pour qu'elles se fondent l'une dans l'autre et forment une teinte panachée.

2° *Rédaction.* Fond de terre de Sienne calcinée et de vert comme pour les forêts. Même vert pour les broussailles que pour les arbres. Sépia rouge pour les ombres. Massifs de broussailles et petites touffes d'herbe dessinés légèrement à la plume avant de teinter.

Bois marécageux. 1° *Minute.* Fond de terre de Sienne naturelle pour les parties boisées. Bleu de Prusse clair et par touches horizontales pour les parties aquatiques, dont les contours ont été tracés à la plume.

2° *Rédaction.* Parties boisées comme pour les forêts. Parties aquatiques par touches horizontales de bleu de Prusse, en ménageant quelques blancs. Retouches avec la même teinte plus forte. Ombres dans l'eau avec de la teinte neutre. Contours des parties aquatiques, arbres et petites touffes d'herbe dessinés à la plume avant de teinter.

Prés. 1° *Minute.* Teinte plate de vert de vessie et bleu de Prusse mêlés.



2° *Rédaction.* Fond de vert un peu plus clair que pour la minute, c'est-à-dire contenant moins de bleu. Touches horizontales avec le même vert plus intense. Cours d'eau et quelques petites touffes d'herbe çà et là dessinés à la plume avant de teinter.

Pâturages. 1° *Minute.* Mêmes teintes que pour la minute des broussailles plus une teinte de bleu indigo. Ces trois teintes appliquées avec trois pinceaux.

2° *Rédaction.* Terre de Sienne calcinée et vert-pré, avec deux pinceaux. Touches horizontales avec le même vert, particulièrement sur le travail à la plume, qui consiste simplement en quelques traînées à peu près horizontales et sinueuses de petits traits figurant de l'herbe.

Terres humides. 1° *Minute.* Vert-pré et bleu de Prusse faible, à deux pinceaux.

2° *Rédaction.* Touches horizontales de vert-pré, en ménageant un peu de blanc, que l'on remplit par des touches bleues. Des petites traînées à la plume figurent de l'herbe; c'est sur ces traînées que l'on place principalement les touches de vert-pré.

Marais. 1° *Minute.* Comme pour les bois marécageux, en remplaçant la terre de Sienne par du vert-pré.

2° *Rédaction.* Vert-pré sur la terre, et revenir avec quelques touches plus fortes, principalement sur des petites traînées à la plume figurant de l'herbe, et sur les contours du côté de l'ombre. Eau comme pour les bois marécageux.

Tourbières et vases. 1° *Minute.* Fond de vert-pré sur le sol. Touches de bleu dans les tourbières. Teinte neutre et sépia rouge mêlées pour les vases, qui séparent, sur une étendue plus ou moins grande, le sol de l'eau.

2° *Rédaction.* Comme à la minute, mais en plus des touches horizontales en vert-pré plus foncé sur le sol. Les contours des tourbières, les lignes qui séparent le sol des vases ou de l'eau, et quelque petites traînées figurant de l'herbe sont dessinés à l'encre avant de poser les teintes.

Étang. Rédaction. Terrains environnants teintés selon leur nature. Pour l'étang, bleu de Prusse par touches horizontales en ménageant des blancs, et retouches avec la même teinte, en fonçant davantage du côté de l'ombre.

Lac. Rédaction. Terrains environnants ordinairement fond de pré. Pour le lac, teinte de bleu de Prusse sur les bords, adoucie vers le milieu, plus forte du côté de l'ombre.

Mer. Rochers. 1° *Minute.* Mer, teinte plate de bleu verdâtre (bleu de Prusse et gomme-gutte). Rochers, sépia rouge seule. Les rochers bordant la mer sont dessinés à l'avance avant de poser les teintes.

2° *Rédaction.* Mer, même teinte que pour la minute, mais plus forte et adoucie des bords vers le large. Pour les rochers, sépia rouge, retouches de terre de Sienne calcinée et de teinte neutre. Les terrains sont teintés selon leur nature.

Terres labourées. 1° *Minute.* Teinte plate de terre de Sienne calcinée. Des lignes pointées faites à la plume bordent les chemins et divisent le

terrain en champs. Un liséré vert s'applique sur les lignes qui bordent les chemins.

2° *Rédaction.* Teintes appliquées par bandes ou sillons dans le sens de la longueur des champs. Ces teintes varient d'un champ à l'autre, et l'on s'arrange pour que dans l'ensemble de toutes ces teintes variées le jaune domine (terre de Sienne et gomme-gutte).

Vergers. 1° *Minute.* Vert de vessie et bleu de Prusse très-étendus d'eau. Des points foncés disposés en quinconce pour figurer les arbres. Les chemins ont été à l'avance dessinés à la plume ou au tire-ligne.

2° *Rédaction.* Fond de même vert que pour la minute, mais plus foncé. Pour les arbres et les haies, le même vert plus foncé encore. Les ombres des arbres et haies à la sépia rouge.

Vignes. 1° *Minute.* Teinte neutre faible. Chemins et divisions du terrain dessinés à la plume ou au tire-ligne.

2° *Rédaction.* Même teinte que pour la minute, mais plus forte. Ceps en quinconce dessinés à la plume et représentés par un trait vertical enveloppé d'un second trait en hélice. Petite ombre à la plume pou chaque cep.

Sables. 1° *Minute.* Teinte plate faible de terre de Sienne calcinée pour les sables; teinte plate faible de bleu de Prusse pour la rivière.

2° *Rédaction.* Pour les sables, même teinte que pour la minute, mais un peu plus forte, et pointillé à la plume avec de l'encre pâle. Pour la rivière, même teinte que pour la minute, mais adoucie des bords vers le milieu, et plus forte du côté de l'ombre.

Landes. 1° *Minute.* Vert terne, sable et carmin, très-faibles et appliqués avec trois pinceaux. Les couleurs dominantes sont le sable et le carmin.

2° *Rédaction.* Fond de sable et de vert faible par touches horizontales. Retouches avec un vert plus fort pour les genets, qui ont été légèrement dessinés à la plume par quelques traînées de petits traits. Pointillé à la plume sur les parties de sable.

Friches. 1° *Minute.* Vert-pré pâle, et sépia rouge mélangée d'un peu de terre de Sienne; ces deux teintes appliquées avec deux pinceaux.

2° *Rédaction.* Vert-pré par touches horizontales, en ménageant des blancs, que l'on remplit ensuite avec de la sépia rouge mêlée de terre de Sienne. Quelques touches plus foncées sur le vert, principalement sur les traînées de petits traits faits à la plume pour figurer quelques herbes.

Bruyères. 1° *Minute.* Vert clair et carmin faible à deux princeaux.

2° *Rédaction.* Même travail que pour les friches, mais avec du vert et du carmin.

Villages. Parcs. Jardins. 1° *Minute.* Carmin faible pour les parties construites; vert faible pour les jardins; les parties boisées et pièces de verdure comme pour les forêts ou les prés.

2° *Rédaction.* Parties construites, carmin plus fort que pour la minute; jardins, teintes variées posées en rectangles; le reste, comme aux échantillons.



QUATRIÈME PARTIE.

TRIGONOMÉTRIE.

1082. *L'objet spécial de la trigonométrie* est de fournir des méthodes pour calculer toutes les parties d'un triangle (angles et côtés), quand on a des données suffisantes pour les déterminer (969 à 972).

Remarque. Un polygone quelconque étant composé de triangles, il en résulte que *le but plus général de la trigonométrie* est de soumettre au calcul, dans tout polygone suffisamment défini, les relations qui existent entre les directions et les grandeurs des côtés et des diagonales de ce polygone.

DÉTERMINATION D'UN POINT.

1083. *Moyen de fixer la position d'un point sur une ligne.* Comme on peut prendre sur une ligne, à partir d'un point de cette ligne, une même longueur dans les deux sens (556), il en résulte qu'il ne suffit pas de connaître la distance d'un point à un point déterminé de la ligne, pour connaître la position du premier ; mais qu'il faut en outre connaître le sens dans lequel on doit compter cette distance.

Pour simplifier les expressions et faciliter les calculs, on est convenu de considérer les distances portées dans un sens comme positives, et celles prises dans l'autre sens comme négatives. Pour cette raison, dans les calculs, les premières distances s'affectent du signe +, et les secondes du signe — (410). On a l'habitude de considérer comme positives les distances portées dans le sens de gauche à droite et de bas en haut, et comme négatives celles comptées de droite à gauche et de haut en bas.

1084. Le point fixe O d'une ligne, à partir duquel on compte les distances prises sur cette ligne, prend le nom d'*origine*.

Quand la ligne sur laquelle on compte les distances est droite, elle prend le nom d'*axe*.

La distance d'un point quelconque de l'axe à l'origine prend le nom d'*abscisse*; on la désigne généralement par x, que l'on affecte du signe + ou du signe — selon qu'elle est comptée dans un sens ou dans l'autre.

1085. Étant données deux directions xx' et yy', que nous supposerons rectangulaires entre elles, *on connaîtra la position d'un point quelconque du plan de ces deux directions quand on aura les projections de ce point sur les droites* xx' *et* yy' (689).

Fig. 239.

En effet, p et q étant les projections d'un point sur les droites xx' et yy', élevant des perpendiculaires indéfinies pM et qM à ces droites, chacune de ces perpendiculaires contiendra le point, qui est alors leur point unique de rencontre M.

Le point M étant déterminé quand on a ses projections p et q, comme ces projections le sont par leurs distances à une origine prise sur chacun des axes xx', yy' (1083), un point est donc déterminé dans un plan quand on connaît les abscisses de ses projections sur deux axes rectangulaires tracés dans ce plan.

On prend pour origine commune sur les axes xx' et yy' le point de rencontre O de ces axes.

Ces axes prennent le nom d'*axes coordonnés*.

L'axe xx' est l'*axe des abscisses* ou *des x*.

L'axe yy' est l'*axe des ordonnées* ou *des y*, c'est-à-dire que les longueurs comptées sur cet axe à partir de l'origine O sont appelées *ordonnées*, au lieu d'abscisses.

Ox est la partie des abscisses ou des x positives, et Ox' celle des abscisses ou des x négatives. De même Oy est la partie des ordonnées ou des y positives, et Oy' celle des ordonnées ou des y négatives.

L'abscisse Op de la projection p est aussi l'abscisse du point M. Comme on a $Op = Mq$, on voit que l'abscisse d'un point est la distance du point à l'axe des y. Cette abscisse, que l'on désigne par x, est positive ou négative selon qu'elle est comptée sur Ox ou sur Ox', c'est-à-dire selon que le point est à droite ou à gauche de l'axe des y.

De même, l'ordonnée Oq de la projection q est l'ordonnée du point M. On a aussi $Oq = Mp$, ce qui fait voir que l'ordonnée d'un point quelconque est la distance de ce point à l'axe des x. L'ordonnée se désigne par la lettre y, et elle est positive ou négative suivant que le point se trouve au-dessus ou au-dessous de l'axe des x.

L'abscisse et l'ordonnée d'un point sont les *coordonnées* de ce point.

Ainsi un point est déterminé par les valeurs algébriques de ses coordonnées x *et* y (441).

On a :

$$\begin{array}{lll} \text{Pour M}, & x = +Op \quad \text{et} & y = +Oq; \\ \text{M}', & x = -Op' \quad \text{et} & y = +Oq; \\ \text{M}'', & x = -Op' \quad \text{et} & y = -Oq'; \\ \text{M}''', & x = +Op \quad \text{et} & y = -Oq'. \end{array}$$

Quand $x = 0$, c'est que le point est situé sur l'axe des y; $y = 0$ indique qu'il se trouve sur l'axe des x, et si l'on a à la fois $x = 0$ et $y = 0$, c'est qu'il est question de l'origine O des axes.

Remarque 1. Ce qui vient d'être dit pour des axes perpendiculaires xx', yy' s'applique à des axes faisant entre eux un angle quelconque; mais alors les lignes Mp, Mq..., qui restent toujours parallèles aux axes yy', xx', sont obliques sur les axes respectifs xx' et yy'.

Remarque 2. Dans le cas où les axes sont rectangulaires, joignant OM, le triangle rectangle OMp donne (704)

$$\overline{\mathrm{OM}}^2 = x^2 + y^2.$$

La distance de l'origine à un autre point quelconque M', M''... donne la même relation avec les coordonnées du point considéré.

1086. *Moyen de fixer la position d'un point dans l'espace.* De même qu'un point est déterminé sur un plan par ses projections sur deux droites rectangulaires tracées dans le plan (1085), *on connaît la position d'un point quelconque de l'espace quand ses projections sur trois plans perpendiculaires entre eux sont déterminées* (739).

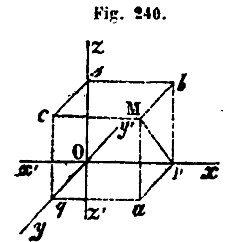


Fig. 240.

En effet, a, b et c étant les projections d'un point M sur les trois plans xOy, xOz et yOz, déterminés par les axes rectangulaires xx', yy' et zz' qui sont leurs intersections, si par chacun de ces points on élève une perpendiculaire au plan correspondant, chacune de ces perpendiculaires passera au point M, et ce point devant se trouver à la fois sur les trois perpendiculaires, il sera leur point unique de rencontre. Ainsi un point est bien déterminé par ses projections sur les trois plans.

Chacune des projections a, b, c étant déterminée quand on connaît ses projections respectives p et q, p et s, q et s, sur deux axes, il en résulte que ces trois projections, et par suite le point M, sont déterminées quand on connaît les trois points p, q, s, qui ne sont autre chose que les projections du point M sur les trois axes xx', yy', zz' (689, 747).

Les trois points p, q, s, situés sur les axes, étant déterminés par leurs abscisses par rapport à l'origine O (1083), *un point* M *est donc déterminé quand on connaît les abscisses de ses projections sur trois axes rectangulaires.*

Les trois axes rectangulaires xx', yy', zz' prennent encore le nom d'*axes coordonnés*; xx' est l'*axe des* x, yy' celui des y, et zz' celui des z.

Les trois plans déterminés par ces axes sont appelés *plans coordonnés.*

Les abscisses Op, Oq et Os des projections du point M sur les axes sont appelées les *coordonnées du point* M; Op en est l'abscisse x, Oq l'ordonnée y, et Os l'ordonnée z. *Ainsi un point est déterminé par ses coordonnées* (1085).

Comme on a Op = Mc, Oq = Mb et Os = Ma, les coordonnées x, y et z d'un point sont donc égales aux distances de ce point aux plans coordonnés. Ces coordonnées sont positives ou négatives selon que les projections du point sur les axes sont sur les parties Ox, Oy et Oz, ou sur

celles Ox', Oy' et Oz'. Ainsi la coordonnée x sera positive ou négative selon que le point M sera à droite ou à gauche du plan yOz, dit plan des $y\,z$; y sera positive ou négative selon que M sera en avant ou en arrière du plan xOz ou des $x\,z$, et enfin z sera positive ou négative selon que M sera au-dessus ou au-dessous du plan xOy ou des $x\,y$.

Quand $x=0$, c'est que le point est sur le plan yOz; de même si $y=0$, ou $z=0$, c'est que le point est respectivement sur le plan xOz ou xOy.

Quand on a à la fois deux coordonnées nulles, c'est que le point est sur l'un des axes; ainsi pour $x=0$ et $y=0$, le point est sur l'axe zz'. Si les trois coordonnées sont nulles, c'est que le point se trouve sur les trois plans coordonnés, et il ne peut être que l'origine.

Remarque 1. Ce qui vient d'être dit pour des plans ou axes rectangulaires s'applique à des plans ou axes faisant entre eux des angles quelconques; seulement alors les perpendiculaires Ma, Mb, Mc aux plans de projection restant toujours parallèles aux axes, elles deviennent obliques. Les projections a, b, c sur les plans coordonnés, ou celles p, q, s sur les axes, au lieu d'être des *projections orthogonales*, sont alors des *projections obliques*.

Remarque 2. La distance OM, du point M à l'origine O, étant la diagonale d'un parallélipipède qui a pour arêtes les coordonnées du point, dans le cas où les axes sont rectangulaires, le parallélipipède est rectangle, et l'on a

$$\overline{OM}^2 = x^2 + y^2 + z^2. \qquad (827)$$

Cette relation existe quelle que soit la position du point M autour de l'origine O.

MOYENS DE FIXER LA POSITION D'UNE DROITE.

1087. *La position d'une droite étant fixée par celles de ses extrémités, elle le sera donc par les coordonnées de ses extrémités* (1086).

Une droite peut aussi être définie par les conditions qui font connaître : 1° la position de l'une de ses extrémités; 2° la longueur de la droite; 3° la direction et le sens de la droite.

1° La position de l'une des extrémités de la droite est définie par les valeurs algébriques des coordonnées de cette extrémité.

2° La longueur de la droite est définie, sans avoir égard au signe algébrique, par le rapport de son étendue à celle de l'unité linéaire (686).

3° *Il reste à poser les données nécessaires pour fixer la direction et le sens de la droite.*

Quelle que soit la position de la droite par rapport aux axes coordonnés, on connaîtra sa direction et son sens par rapport à ces axes, quand on aura sa direction et son sens par rapport à des axes parallèles aux premiers et menés par son extrémité déterminée.

1088. *Cette dernière partie de la question est donc ramenée à déterminer les données nécessaires pour fixer la direction et le sens de la droite*

par rapport à des axes coordonnés ayant pour origine une extrémité de la droite (555, 556).

Considérons d'abord le cas le plus simple, celui où la droite est dans l'un des plans coordonnés, celui des xy, par exemple (1086).

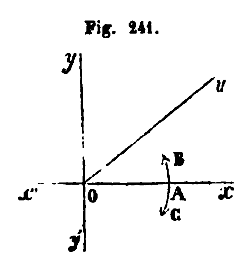


Fig. 241.

Soit Ou cette droite, dont le sens est indiqué par l'ordre Ou de ses extrémités; la direction de cette droite sera déterminée quand on connaîtra l'angle uOx que fait la droite avec la partie Ox de l'axe des abscisses, et que, de plus, on indiquera que cet angle est compté en dessus ou en dessous de Ox, car on peut mener par O deux droites faisant des angles égaux avec la partie Ox.

Afin de se dispenser de désigner si l'angle doit être compté en dessus ou en dessous de Ox, on a fait une convention analogue à celle mise en usage au n° 1083 pour fixer la position d'un point. Ainsi l'on est convenu de considérer comme positifs tous les angles que décrit la droite Ou en tournant autour du point O dans le sens de la flèche AB, et comme négatifs ceux qu'elle décrit en tournant dans le sens de la flèche AC.

L'angle positif est nul quand Ou se confond avec Ox; puis il prend toutes les valeurs positives comprises entre 0° et 90°, pendant que Ou passe de Ox à Oy; quand elle se confond avec Oy, elle fait un angle positif de 90° avec Ox. Ou continuant à tourner, elle décrit tous les angles positifs de 90° à 180°; elle fait ce dernier angle avec Ox quand elle se confond avec Ox'. Continuant à tourner, les angles positifs prennent toutes les valeurs de 180° à 270°; à cette dernière valeur, elle se confond avec Oy'. Tournant encore, elle vient se confondre avec Ox après avoir décrit tous les angles positifs de 270° à 360°. Dans une nouvelle révolution Ou décrirait tous les anglés positifs de 360° à 720°, et continuant son mouvement, elle décrirait tous les angles positifs supérieurs à 720°.

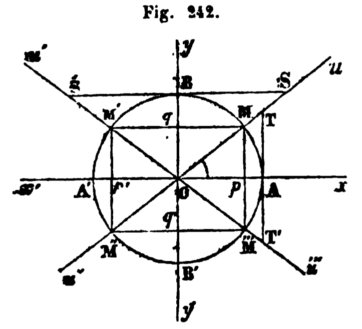
Si Ou avait tourné dans le sens de la flèche AC, elle aurait successivement décrit tous les angles négatifs, comme elle a décrit tous les angles positifs en tournant dans le sens de la flèche AB. Il est à remarquer que les angles $+\alpha$, $+(360° + \alpha)$, $+(720° + \alpha)$, etc.; $-(360° - \alpha)$, $-(720° - \alpha)$, etc., désignent tous la même droite, en direction et sens.

Remarque. Pendant que la droite Ou décrit les angles autour du point O, chacun de ses points décrit les arcs correspondants à ces angles (631), et suivant que les angles sont positifs ou négatifs, c'est-à-dire selon le mouvement de Ou, ces arcs sont positifs ou négatifs. Ainsi un angle est déterminé quand on a l'arc correspondant, et réciproquement.

EXPRESSIONS TRIGONOMÉTRIQUES. LEUR USAGE POUR EXPRIMER LA VALEUR D'UN ANGLE OU D'UN ARC QUELCONQUE, POSITIF OU NÉGATIF.

1089. Dans le cas où la droite considérée Ou a une de ses extrémités située à l'origine O, la droite est déterminée quand on connaît les valeurs algébriques des coordonnées $y = Mp$ et $x = Mq$ de son autre extrémité M (1085).

Fig. 242.



Les rapports entre les quantités y, x et OM sont constants, quelle que soit la position du point M sur la droite Ou, c'est-à-dire quelle que soit la valeur de $OM = r$, quantité toujours positive, puisqu'elle indique la distance du point M à l'origine O, et qu'elle est comptée dans le sens positif de Ou. Il en résulte alors que si l'on n'a besoin que de connaître la direction et le sens de la droite, il suffit d'avoir les valeurs algébriques de deux des rapports constants qui existent entre les quantités x, y et r; car attribuant une valeur quelconque à r, ces rapports donnent les valeurs correspondantes de x et y (176).

1090. Les quantités x, y, r fournissent entre elles 6 rapports, ou *expressions trigonométriques*, qui prennent les noms particuliers suivants :

$\frac{y}{r}$, rapport de l'ordonnée Mp au rayon de l'arc AB passant par le point M, est le *sinus* de l'angle $uOx = \alpha$, et de l'arc AM, que nous désignerons aussi par α. Il est de même signe que l'ordonnée y (1085).

$\frac{x}{r}$, rapport de l'abscisse Op au rayon, est le *cosinus* de l'angle et de l'arc α. Son signe est celui de x;

$\frac{y}{x}$, rapport de l'ordonnée à l'abscisse, est la *tangente* de l'angle et de l'arc α. Elle est positive ou négative selon que y et x sont de même signe ou de signes contraires;

$\frac{r}{y}$, rapport inverse du sinus, et de même signe, est la *cosécante* de l'angle et de l'arc α;

$\frac{r}{x}$, rapport inverse du cosinus, et de même signe, est la *sécante* de l'angle et de l'arc α.

$\frac{x}{y}$, rapport inverse de la tangente, est la *cotangente* de l'angle et de l'arc α. Elle est positive ou négative selon que x et y ont le même signe ou des signes contraires; elle est par conséquent de même signe que la tangente.

En abrégé, on écrit :

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \operatorname{tang}\alpha = \frac{y}{x},$$
$$\operatorname{coséc}\alpha = \frac{r}{y}, \quad \operatorname{séc}\alpha = \frac{r}{x}, \quad \cot\alpha = \frac{x}{y}.$$

1091. *Remarques.* Dans le cas où le rayon r est égal à l'unité, les expressions précédentes deviennent :

1° $\sin\alpha = y$. *C'est la moitié de la corde sous-tendant l'arc correspondant à l'angle double de* α ;

2° $\cos\alpha = x$. *Le cosinus et le sinus de* α *sont respectivement égaux au sinus et au cosinus du complément de* α. C'est ce qu'on peut vérifier sur la *fig.* 242.

3° Menant la tangente AT (*fig.* 242), les deux triangles semblables OAT et OpM donnent (670, 1090).

$$\frac{AT}{r} = \frac{y}{x} = \operatorname{tang}\alpha.$$

Ainsi la tangente d'un angle α *est aussi représentée par le rapport, à un rayon quelconque* r, *de la tangente positive ou négative* AT *menée à l'origine* A *de l'arc décrit avec le rayon* r, *et prolongée jusqu'à la rencontre de l'autre côté de l'angle* α. C'est ce qui a fait donner à l'expression $\frac{y}{x}$ le nom de tangente. Dans le cas où $r = 1$, on a algébriquement

$$\operatorname{tang}\alpha = AT;$$

4° Les mêmes triangles semblables OAT et OpM donnent

$$\frac{OT}{r} = \frac{r}{x} = \operatorname{séc}\alpha.$$

Ainsi la sécante est aussi représentée par le rapport au rayon de la portion de sécante OT, *comptée sur le deuxième côté de l'angle et comprise entre le centre et la tangente.* C'est ce qui lui a fait donner le nom de *sécante.* Dans le cas où $r = 1$, on a

$$\operatorname{séc}\alpha = OT;$$

5° Menant au point B la tangente BS jusqu'à la rencontre de Ou, les deux triangles semblables OBS, OqM donnent

$$\frac{BS}{r} = \frac{x}{y} = \cot\alpha.$$

Ce qui fait voir que la cotangente d'un angle est aussi représentée par le rapport de la tangente BS *au rayon.* Dans le cas où $r = 1$, on a

$$\cot\alpha = BS.$$

Ces formules et la figure font voir que *la cotangente d'un angle n'est autre chose que la tangente de son complément.* C'est ce qui lui a fait donner le nom de *cotangente;*

6° Les deux triangles semblables OBS et OqM donnent aussi

$$\frac{\text{OS}}{r} = \frac{r}{y} = \text{coséc}\,\alpha.$$

Ainsi la cosécante d'un angle est aussi représentée par le rapport de la partie de sécante OS *au rayon.* Dans le cas où $r = 1$, on a

$$\text{coséc}\,\alpha = \text{OS}.$$

Ces formules, ainsi que la figure, font voir que *la cosécante d'un angle n'est autre chose que la sécante de son complément.*

1092. De ces remarques il résulte qu'on a :

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \text{tang}\,\alpha = \frac{\text{AT}}{r},$$
$$\text{coséc}\,\alpha = \frac{\text{OS}}{r}, \quad \text{séc}\,\alpha = \frac{\text{OT}}{r}, \quad \cot\alpha = \frac{\text{BS}}{r};$$

et que dans les cas où $r = 1$, il vient

$$\sin\alpha = y, \quad \cos\alpha = x, \quad \text{tang}\,\alpha = \text{AT},$$
$$\text{coséc}\,\alpha = \text{OS}, \quad \text{séc}\,\alpha = \text{OT}, \quad \cot\alpha = \text{BS}.$$

Ces dernières valeurs des expressions trigonométriques sont représentées par de simples lignes, qui prennent le nom de *lignes trigonométriques.*

1093. Il y a encore deux autres expressions trigonométriques, que nous nous contenterons de définir, vu leur usage peu fréquent.

$\frac{r-x}{r} = \frac{\text{A}p}{r}$ est le *sinus verse* de l'angle et de l'arc α. Pour $r = 1$ le sinus verse est égal à Ap.

$\frac{r-y}{r} = \frac{\text{B}q}{r}$ est le *cosinus verse* de l'angle et de l'arc α. Pour $r = 1$, le cosinus verse est égal à Bq.

1094. *Signes des expressions trigonométriques.* Comme dans les six expressions trigonométriques du n° 1090, il n'entre que les coordonnées x et y de variables, et qu'il est de la plus grande facilité de reconnaître les signes de ces variables quelle que soit la valeur de α, la détermination des signes de ces expressions n'offre aucune difficulté (447, 1085).

Pour les valeurs de α *comprises entre* 0° *et* 90°,

x et y restent positifs, et x varie de r à 0, tandis que y varie de 0 à r; donc (1090) :



$\sin\alpha = +\frac{y}{r}$, et varie de 0 à +1;

$\cos\alpha = +\frac{x}{r}$, et varie de +1 à 0;

$\text{tang}\,\alpha = +\frac{y}{x}$, et varie de 0 à $+\infty$;

$\text{coséc}\,\alpha = +\frac{r}{y}$, et varie de $+\infty$ à 1;

$\text{séc}\,\alpha = +\frac{r}{x}$, et varie de 1 à $+\infty$;

$\cot\alpha = +\frac{x}{y}$, et varie de $+\infty$ à 0.

Pour les valeurs de α *comprises entre* + 90° *et* + 180°,

y est positif et varie de r à 0, au lieu que x est négatif et varie de 0 à $-r$, donc :

$\sin\alpha = +\frac{y}{r}$, et varie de + 1 à 0;

$\cos\alpha = \frac{-x}{r} = -\frac{x}{r}$, et varie de 0 à -1;

$\text{tang}\,\alpha = \frac{+y}{-x} = -\frac{y}{x}$, et varie de $-\infty$ à 0;

$\text{coséc}\,\alpha = +\frac{r}{y}$, et varie de 1 à $+\infty$;

$\text{séc}\,\alpha = \frac{r}{-x} = -\frac{r}{x}$, et varie de $-\infty$ à -1;

$\cot\alpha = \frac{-x}{y} = -\frac{x}{y}$, et varie de 0 à $-\infty$.

Pour les valeurs de α *comprises entre* + 180° *et* + 270°,

y est négatif et varie de 0 à $-r$, tandis que x est négatif et varie de $-r$ à 0; donc :

$\sin\alpha = \frac{-y}{r} + -\frac{y}{r}$, et varie de 0 à -1;

$\cos\alpha = \frac{-x}{r} = -\frac{x}{r}$, et varie de -1 à 0;

$\text{tang}\,\alpha = \frac{-y}{-x} = +\frac{y}{x}$, et varie de 0 à $+\infty$;

$\text{coséc}\,\alpha = \frac{r}{-y} = -\frac{r}{y}$, et varie de $-\infty$ à -1;

$\text{séc}\,\alpha = \frac{r}{-x} = -\frac{r}{x}$, et varie de -1 à $-\infty$;

$\cot\alpha = \frac{-x}{-y} = +\frac{x}{y}$, et varie de $+\infty$ à 0.

Pour les valeurs de α *variant de* + 270° *à* + 360°,

y est négatif et varie de $-r$ à 0, tandis que x est positif et varie de 0 à $+r$; donc :

$\sin\alpha = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r}$, et varie de -1 à 0;

$\cos\alpha = +\frac{x}{r}$, et varie de 0 à $+1$;

$\tang\alpha = \frac{-y}{+x} = -\frac{y}{x}$, et varie de $-\infty$ à 0;

$\text{coséc}\,\alpha = \frac{r}{-y} = -\frac{r}{y}$, et varie de -1 à $-\infty$;

$\text{séc}\,\alpha = \frac{r}{x}$, et varie de $+\infty$ à $+1$;

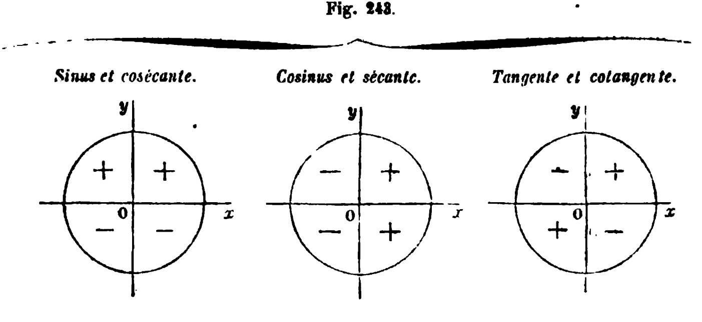
$\cot\alpha = \frac{+x}{-y} = -\frac{x}{y}$, et varie de 0 à $-\infty$.

Pour les valeurs de α supérieures à 360°, les expressions trigonométriques reprennent successivement les mêmes valeurs et les mêmes signes que pour les angles de 0° à 360°; ainsi les expressions trigonométriques sont les mêmes pour les angles de $(360 + 30)°$, $(360 \times 2 + 30)°$, etc., que pour un angle de 30°.

L'inspection de la *fig.* 242 fait voir que *pour un angle négatif quelconque* $-\alpha$ (n° 1088), *les expressions trigonométriques ont les mêmes valeurs et les mêmes signes que pour l'angle positif* $360° - \alpha$. D'où il résulte qu'en formant pour les angles négatifs le tableau précédent, on retrouverait les mêmes valeurs, mais dans un ordre inverse. Ainsi, pour les angles de 0° à $-90°$, on aurait les mêmes valeurs que pour les angles positifs de 360° à 270°.

La figure suivante indique les signes des expressions trigonométriques pour les diverses valeurs de l'angle ou de l'arc α.

Fig. 243.



1095. Il est à remarquer que les valeurs absolues des coordonnées y et x (1089), et par suite celles des expressions trigonométriques d'un angle quelconque uOx (1090), sont égales à celles de l'angle aigu que fait la droite Ou avec Ox ou avec son prolongement Ox' (*fig* 242), cet angle aigu étant dans tous les cas considéré comme positif.

Il résulte donc qu'en formant le tableau (n° 1138) des valeurs des expressions trigonométriques correspondant à tous les angles positifs

compris entre 0° et 90°, il contiendra aussi les valeurs absolues des expressions trigonométriques d'un angle quelconque plus grand que 90°; ayant ces valeurs absolues, on leur donnera le signe qui convient à l'angle en consultant le tableau du n° 1094 ou la fig. 243.

Veut-on avoir, par exemple, le sinus d'un angle $uOx = +215°$? On remarque que Ou fait avec Ox' un angle aigu de $215-180=35°$; on cherche dans la table (1138) le sinus 0,57358 de l'angle de 35°, et donnant à ce sinus le signe — qui convient à l'angle de 215°, on obtient $-0,57358$ pour le sinus de l'angle $+215°$.

Étant donné un angle quelconque, on peut donc déterminer les valeurs algébriques de ses expressions trigonométriques.

1096. De là on est conduit à se demander si, étant donnés la valeur et le signe d'une seule expression trigonométrique, l'angle est déterminé. D'après ce qui précède, l'angle aigu α ayant la valeur donnée $+s$ pour sinus, l'angle obtus supplémentaire $180°-\alpha$ a le même sinus; le sinus proposé ne détermine donc pas un angle, puisqu'il satisfait à deux angles supplémentaires formés avec Ox par deux droites symétriques par rapport à l'axe Oy. De même, à une valeur négative $-s$ du sinus correspondent les deux angles $180°+\alpha$ et $360°-\alpha$, que font avec Ox deux droites symétriques par rapport à Oy' (*fig.* 242).

Comme à l'angle aigu α correspond un cosinus positif, tandis qu'à son supplément $180°-\alpha$ correspond un cosinus négatif, on voit qu'étant donné un sinus positif, si en outre on indique le signe du cosinus, l'angle sera déterminé. De plus, comme à l'angle $180°+\alpha$ correspond un cosinus négatif, tandis qu'à l'angle $360°-\alpha$ correspond un cosinus positif, on voit donc qu'étant donné un sinus quelconque, positif ou négatif, et le signe du cosinus correspondant, l'angle est déterminé.

On ferait voir de la même manière qu'à une même valeur positive du cosinus correspondent les deux angles α et $360°-\alpha$ formés par deux droites symétriques par rapport à Ox; et qu'à une même valeur négative correspondent les deux angles $180°-\alpha$ et $180°+\alpha$ formés par deux droites symétriques par rapport à Ox'; mais que si en outre de la valeur algébrique du cosinus on donne le signe du sinus correspondant, l'angle est déterminé.

$+t$ étant la tangente d'un angle α, on aura à la fois $t=\frac{y}{x}$ et $t=\frac{-y}{-x}$, équations qui peuvent être satisfaites par deux droites Ou et Ou'', directement opposées et faisant avec Ox les angles α et $180°+\alpha$. Ainsi l'angle n'est pas déterminé par sa tangente; il le sera quand, en outre, on connaîtra le signe de l'une des coordonnées y et x, ou, ce qui revient au même, celui du sinus ou du cosinus.

Si la tangente donnée était $-t$, on aurait à la fois $-t=\frac{+y}{-x}$ et $-t=\frac{-y}{+x}$, valeurs qui seraient satisfaites par deux droites Ou' et Ou''', directement opposées et faisant avec Ox les angles $90°+\alpha$ et $270°+\alpha$. L'angle n'est donc pas déterminé par ces valeurs; mais, comme dans

le cas précédent, il le sera dès qu'en outre on connaîtra le signe du sinus ou du cosinus correspondant.

En général, à une même valeur algébrique d'une des expressions trigonométriques principales, sinus, cosinus et tangente, correspondent, pour chacune des deux autres, deux valeurs égales et de signes contraires; c'est ce que montre la fig. 243. Il en résulte qu'ayant la valeur de l'une quelconque de ces expressions, il suffira de connaître le signe de l'une des deux autres pour que l'angle soit déterminé.

1097. *Désignation d'un angle au moyen des mots fruit, base, pente.* Quand, dans la pratique, on dit que le *fruit* d'un mur est de $0^m,01$ par mètre, par exemple, on entend que la face que l'on considère s'écarte de la verticale de $0^m,01$ par chaque mètre de hauteur verticale, et 0,01 est la tangente de l'angle que forme la face du mur avec la verticale. La *base* d'un talus par unité de hauteur a la même signification. La *pente* d'une route ou d'un chemin de fer est la hauteur dont il s'élève pour 1 mètre mesuré sur l'horizontale; ainsi, dire que la pente d'un chemin de fer est de $0^m,003$ par mètre, c'est indiquer que le chemin forme avec l'horizon un angle dont la tangente est égale à 0,003. Si le mètre était mesuré sur le chemin même, 0,003 serait le sinus au lieu d'être la tangente. Du reste, dans les cas ordinaires de chemins de fer, et même de routes, les angles formés avec l'horizon sont assez petits pour que la tangente ne diffère pas sensiblement du sinus.

1098. Nous avons vu comment, ayant une table des valeurs des expressions trigonométriques des angles de 0° à 90°, on déterminait ces valeurs pour un angle quelconque (1095) Remarquant que le sinus, le cosinus, la tangente, la cotangente, la sécante et la cosécante d'un angle aigu sont respectivement égaux au cosinus, au sinus à la cotangente, à la tangente, à la cosécante et à la sécante de son complément, il suffit donc de connaître les valeurs des expressions trigonométriques des angles de 0° à 45° pour pouvoir en conclure celles de tous les angles possibles. Veut-t-on avoir, par exemple, le sinus d'un angle de 70°? Il suffit de chercher dans la table le cosinus 0,93969 de l'angle de $90 - 70 = 20°$ (1109).

Le cosinus d'un angle de 125° a pour valeur absolue celle 0,57358 du cosinus de $180 - 125 = 55°$ (1138), qui est aussi celle de sin 35°; sa valeur algébrique est donc $-0,57358$ (n° 1094).

Règle générale. Quand on a à déterminer la valeur d'une expression trigonométrique d'un angle compris entre 90° et 180°, on prend cette valeur pour le supplément de l'angle, et en lui donnant le signe qui convient à l'angle proposé (1094) on a le résultat cherché. Dans la pratique on n'a guère à considérer que des angles moindres que deux droits; du reste, pour les angles supérieurs à cette limite, il n'y aurait pas plus de difficultés.

1099. *Disposition des tables trigonométriques.* Dans les applications on ne fait guère usage que des sinus, cosinus, tangentes et cotangentes; aussi les tables dressées ne contiennent-elles que les valeurs de ces expressions trigonométriques.

En donnant deux entrées à ces tables, comme dans celle du n° 1138, qui contient les valeurs de ces expressions trigonométriques pour les angles successifs de minute en minute, on obtient directement les expressions trigonométriques de ces angles et de leurs compléments jusqu'à 90°; au lieu qu'avec une seule entrée on ne les aurait eus directement que jusqu'à 45°.

L'entrée par les premières lignes horizontales et verticales fournit les valeurs des expressions trigonométriques pour les angles de 0° à 45°, et l'entrée par les dernières lignes horizontales et verticales les donne pour les angles de 90° à 45°.

De cette double entrée, il résulte que chacun des nombres de la deuxième colonne verticale est à la fois le sinus de l'angle indiqué dans la première colonne verticale, et le cosinus de l'angle indiqué dans la dernière colonne verticale; ce qui devait être, ces deux angles étant complémentaires (1098). De même, un nombre quelconque 0,80902 de la troisième colonne verticale est à la fois le cosinus de l'angle de 36°, désigné à la première colonne verticale, et le sinus de l'angle complémentaire 53° 60′ = 54°, désigné à la dernière colonne verticale. Les colonnes verticales 4 et 5 fournissent des résultats analogues pour les tangentes et cotangentes.

Les tables ordinaires, au lieu de contenir les valeurs naturelles des expressions trigonométriques, contiennent les logarithmes de ces grandeurs. De plus, on a augmenté les logarithmes négatifs de 10 unités, afin de les rendre positifs; ce qui équivaut à multiplier les valeurs des expressions trigonométriques par l'unité suivie de 10 zéros (395, 397).

Pour avoir une expression trigonométrique dont le logarithme a été augmenté de 10 unités, on commence par diminuer la caractéristique de ce logarithme d'un nombre d'unités seulement suffisant pour que la nouvelle caractéristique se trouve dans les tables de logarithmes que l'on a à sa disposition; le nombre correspondant au nouveau logarithme, divisé par l'unité suivie d'un nombre de zéros égal à 10 moins le nombre des unités retranchées de la caractéristique, est la valeur de l'expression trigonométrique cherchée (401). On trouve ainsi que *sin* 65° = 0,906 31 et que *cos* 55° = 0,573 58.

Les *tables de Lalande* contiennent les logarithmes des expressions trigonométriques de *minute en minute*, avec 5 décimales, et les différences de ces logarithmes.

Les *tables de Callet* contiennent, avec 7 décimales, dans une *première partie* les logarithmes des expressions trigonométriques des angles de seconde en seconde de 0° à 5°, et par conséquent de 85° à 90° à cause de la double entrée; et dans une *seconde partie*, ces logarithmes des angles de dix secondes en dix secondes de 0° à 90°. Les tables contiennent également les différences des logarithmes.

Les sinus et cosinus étant tous plus petits que l'unité, ainsi que les tangentes des angles de moins de 45° et les cotangentes des angles de 45° à 90° (tang 45° = cot 45° = 1, et log tang 45° = log cot 45° = 0), leurs logarithmes sont négatifs. Pour les rendre positifs, on les a augmentés

de 10 unités; mais pour la facilité des calculs, il convient de rétablir le vrai logarithme à caractéristique seule négative. Ce vrai logarithme a pour partie décimale positive celle de la table, et pour caractéristique, la différence, prise avec le signe moins, obtenue en retranchant la caractéristique de la table de 10 unités.

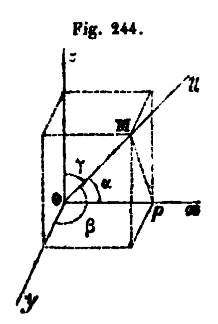
Ainsi la table donnant, par exemple :

log sin $18°31'20'' = 9,501\,9795$,	on a	log sin	$18°31'20'' = \bar{1},501\,9795$;
log cos $18°31'20'' = 9,976\,9002$,	on a	log cos	$18°31'20'' = \bar{1},976\,9002$;
log tang $18°31'20'' = 9,525\,0794$,	on a	log tang	$18°31'20'' = \bar{1},525\,0794$;
log cot $18°31'20'' = 0,474\,9206$,	on a	log cot	$18°31'20'' = 0,474\,9206$.

Ce sont ces secondes valeurs qu'il faut employer dans la pratique (voir résolution des triangles). Les tangentes des angles de 45° à 90° et les cotangentes des angles de 0° à 45° étant supérieures à l'unité, leurs logarithmes sont positifs; aussi a-t-on inscrit ces logarithmes dans les tables sans les augmenter de 10 unités; c'est ce qui fait qu'il n'y a pas eu de changement dans la dernière ligne du tableau précédent.

1100. *Fixer la position d'une droite dans l'espace.* Nous venons de voir comment, à l'aide des expressions trigonométriques, on fixe la direction et le sens, c'est-à-dire la position d'une droite dans un des plans coordonnés. Examinons maintenant le cas où la droite est située hors de ces plans.

Fig. 244.



Supposons toujours les plans rectangulaires entre eux, et ayant pour origine l'extrémité O de la droite Ou, dont le sens est Ou. La position de la droite sera déterminée quand on connaîtra les valeurs algébriques des coordonnées x, y, z d'un point M situé à la distance quelconque $+\mathrm{OM} = r$ de l'origine (1086). Cette position sera donc déterminée quand on connaîtra les rapports $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$, qui prennent les signes de x, y et z, car r étant toujours positif, en lui donnant une valeur quelconque, on en déduira les valeurs algébriques correspondantes de x, y et z.

Désignons par α, β et γ les angles que fait Ou avec les axes respectifs Ox, Oy, Oz. Mp étant perpendiculaire à Ox (747), Op est l'abscisse x du point M, et, dans le plan uOx, on a

$$\frac{\mathrm{O}p}{\mathrm{OM}} = \frac{x}{r} = \cos\alpha. \qquad (1090)$$

On a de même dans les plans uOy et uOz

$$\frac{y}{r} = \cos\beta \text{ et } \frac{z}{r} = \cos\gamma.$$

Ce qui fait voir que connaissant les cosinus des angles que fait la

droite avec les axes, on connaît les rapports algébriques $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$, et par suite la direction et le sens de la droite.

1101. On a $$x^2 + y^2 + z^2 = \overline{OM}^2 = r^2; \qquad (1086)$$

par suite $$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1,$$

c'est-à-dire $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (a)$$

Ce qui fait voir la propriété remarquable, que *la somme des carrés des cosinus des angles que fait une droite avec trois axes rectangulaires est égale à l'unité.*

Remarque 1. Cette relation montre qu'on ne peut pas choisir arbitrairement les cosinus des angles, et par suite les angles que doit faire une droite avec trois axes rectangulaires ; mais qu'en se donnant, avec leurs signes, les cosinus des angles que doit faire la droite avec deux des axes, et le signe du cosinus de l'angle qu'elle doit faire avec le troisième, on peut de l'équation (*a*) déduire ce troisième cosinus, et par suite fixer la position de la droite.

Remarque 2. Donner le cosinus de l'angle que fait la droite avec un axe, revient à faire connaître une nappe conique de révolution ayant pour axe l'axe donné, et sur laquelle se trouve la droite. Donnant deux cosinus, c'est que la droite est l'une des deux génératrices intersections de deux nappes coniques ; comme l'une de ces génératrices fait un angle aigu avec le troisième axe, tandis que l'autre fait un angle obtus, donner le signe du cosinus de l'angle que fait la droite avec le troisième axe, c'est désigner celle des deux génératrices qui satisfait à l'énoncé.

Remarque 3. Si la droite était dans le plan de deux axes, la formule (*a*) deviendrait

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1. \qquad (1085)$$

NOTIONS SUR LES PROJECTIONS D'UNE LIGNE.

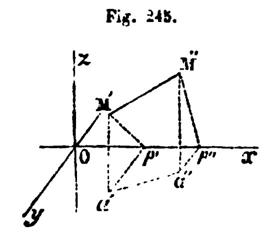
1102. Une droite ayant deux sens (556), la longueur d'une droite finie prendra le signe + ou le signe —, suivant qu'il s'agira de l'un ou de l'autre sens de la droite.

Quand on considère une droite indépendamment d'aucun axe, on peut indifféremment adopter comme positif l'un quelconque de ses sens, l'autre sens est négatif. Mais lorsque la droite est considérée par rapport à un système d'axes, le signe à donner à chaque sens de la droite est indiqué par les signes des sens correspondants des axes.

Le sens de la projection d'une droite sur un axe est, comme pour la droite, indiqué par l'ordre des lettres de deux de ses points, et le signe de chacun des sens de cette projection est indiqué par ceux des mêmes sens de l'axe (1083).

Pour fixer les idées, la longueur absolue de la droite M′M″ ou M″M′

Fig. 245.



étant de 30m, la valeur algébrique de M′M″ est + 30m, et celle de M″M′ est — 30m. De même, la valeur absolue de la projection $p'p''$ ou $p''p'$ de M′M″ sur l'axe Ox étant de 22m, la valeur algébrique de $p'p''$ est + 22m, et celle de $p''p'$ est — 22m.

1103. *Expression algébrique de la projection d'une droite sur un axe.* Ayant $Op''=x''$, abscisse du point M″, et $Op'=x'$, abscisse du point M′, il en résulte qu'on a

$$p'p'' = +(x''-x'), \quad \text{et} \quad p''p' = -(x''-x').$$

On aurait des expressions analogues pour les projections sur chacun des autres axes Oy et Oz.

Ces expressions s'appliquent aux cas où les valeurs de x' et de x'' sont de signes contraires, comme à ceux où elles ont même signe; seulement il faut affecter x' et x'' des signes qui leur conviennent : ainsi les valeurs de x' et de x'' étant négatives, ce qui a lieu quand M′ et M″ sont à gauche du plan des $y\,z$, on a

$$p'p'' = +[-x''-(-x')] = +(-x''+x'),$$

et

$$p''p' = -[-x''-(-x')] = -(-x''+x'). \qquad (422)$$

Si x' est négatif et x'' positif, les formules établies comme précédemment donnent

$$p'p'' = +[+x''-(-x')] = +(x''+x'),$$

et

$$p''p' = -[+x''-(-x')] = -(x''+x').$$

1104. *Relation entre une droite et ses projections* (1106). Si par le point M′ (*fig.* 245) on menait des axes parallèles aux premiers, les projections de M′M″ sur ces nouveaux axes seraient respectivement égales aux projections sur les premiers; de plus, ces projections seraient les coordonnées du point M″. Alors, les axes étant rectangulaires, appelant u la longueur de M′M″, on pourra appliquer la formule du n° 1086, et poser

$$u^2 = (x''-x')^2 + (y''-y')^2 + (z''-z')^2.$$

Dans le cas où l'une des projections est nulle, ce qui arrive quand la droite est située dans l'un des plans coordonnés ou parallèle à ce plan, la formule précédente devient, en supposant que c'est par rapport au plan des $x\,y$ que la droite jouit de ces propriétés,

$$u^2 = (x''-x')^2 + (y''-y')^2.$$

Formule identique à celle du n° 1085, et qu'on peut établir comme la formule générale précédente, en supposant la droite située dans le plan de deux axes déterminés.

Si la droite était à la fois dans deux plans coordonnés, $x\,y$ et $x\,z$ par exemple, ou parallèle à ces plans, elle se confondrait avec l'axe des x ou lui serait parallèle. Alors elle se projetterait en véritable grandeur

sur cet axe, tandis que ses projections sur yy' et zz' seraient nulles, et la formule précédente deviendrait

$$u^2 = (x'' - x')^2 \quad \text{ou} \quad u = x'' - x',$$

formule qui n'est autre que celle du n° 1103.

1105. ***La somme algébrique des projections des diverses portions droites d'une ligne brisée* ACDE *sur un axe quelconque, c'est-à-dire la projection de cette ligne brisée sur l'axe, est égale à la projection sur le même axe de la droite* AE *qui joint les extrémités de la ligne*** **(1106).**

Fig. 246.

x' étant l'abscisse du point A, x'' celle des points B et D, x''' celle du point C et x^{IV} celle du point E, on a successivement (1103) :

$$\begin{aligned}
&\textit{Projection de } \mathrm{AB} = x'' - x',\\
&\qquad \textit{Id.} \quad \text{de } \mathrm{BC} = x''' - x'',\\
&\qquad \textit{Id.} \quad \text{de } \mathrm{CD} = x'' - x''',\\
&\qquad \textit{Id.} \quad \text{de } \mathrm{DE} = x^{\text{IV}} - x''.
\end{aligned}$$

Faisant la somme de toutes ces projections, on a, en réduisant (419) :

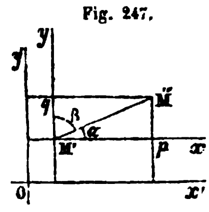
$$\text{Projection de ACDE} = x^{\text{IV}} - x'.$$

Ce qui n'est autre chose que la projection de la droite AE qui joint les extrémités de la ligne brisée.

Remarque. Considérant une ligne courbe comme étant une ligne brisée dont les éléments sont infiniment petits (558), il en résulte que ce qui précède s'applique à une ligne quelconque.

1106. *Projection d'une droite et en général d'une ligne quelconque sur un axe, en fonction des expressions trigonométriques* (1103).

Fig. 247.



1° Soit une droite M'M'' située dans le plan xy et ayant son extrémité M' située à l'origine des axes. On a (1090), en représentant par u la longueur de M'M'', par P_x et P_y les projections M'p et M'q de la droite sur les axes, et en remarquant que ces projections ne sont autre chose que les coordonnées du point M'' :

$$\frac{P_x}{u} = \cos\alpha, \quad \text{et} \quad \frac{P_y}{u} = \sin\alpha;$$

d'où

$$P_x = u\cos\alpha, \quad \text{et} \quad P_y = u\sin\alpha.$$

2° Ces expressions s'appliquent également au cas où la droite M'M'' étant dans le plan $x'y'$, l'extrémité M' n'est pas à l'origine.

En effet, les angles α et β que fait M'M'' avec ces axes étant les mêmes qu'avec les axes parallèles M'x et M'y, comme de plus les projections $x'' - x'$ et $y'' - y'$ sont respectivement égales à P_x et P_y, on peut donc encore poser

$$x'' - x' = u\cos\alpha, \quad \text{et} \quad y'' - y' = u\sin\alpha.$$

3° Il reste encore à considérer le cas où M'M'' n'est pas dans un même plan que l'axe Ox.

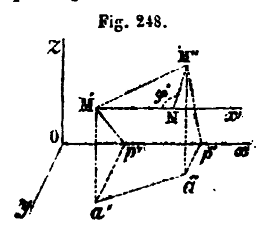


Fig. 248.

D'abord l'angle α que fait M'M'' avec Ox est égal à l'angle M''M'x' que fait cette droite avec l'axe M'x' parallèle à Ox (569), comme de plus la projection M'N de M'M'' sur M'x' est égale à la projection $p'p'' = P_x$ de cette même droite sur Ox, on peut donc encore poser

$$P_x = u \cos \alpha.$$

Ainsi, quelle que soit la position d'une droite par rapport à un axe, la valeur algébrique de sa projection sur cet axe est égale à la longueur absolue de la droite multipliée par le cosinus de l'angle positif que font entre eux les sens positifs de la droite et de l'axe (1083, 1088).

Remarque. Nous avons dit (3°) que les projections M'N et $p'p''$ étaient égales entre elles. En effet, les perpendiculaires M''N, M'p' et M''p'' menées aux axes étant dans les plans qu'on peut conduire par M' et M'' perpendiculairement à la fois aux axes parallèles, comme ces plans couperaient les axes en M', N, p' et p'', et que des parallèles comprises entre plans parallèles sont égales, on a bien $M'N = p'p''$.

4° Pour une ligne brisée ACDE (*fig.* 246), on a, en faisant $AC = u'$, $CD = u''$..... et en désignant par α', α''..... les angles positifs que font AC, CD..... avec Ox (3°):

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Projection de} & AB = AB \cos \alpha' \\ \textit{Id.} \quad \textit{de} & BC = BC \cos \alpha' \end{array}\right\} \text{dont la somme, c'est-à-dire}$$

$$\begin{array}{lll} \textit{Projection} & \textit{de } u' & = u' \cos \alpha' \\ \textit{Id.} & \textit{de } u'' & = u'' \cos \alpha'' \\ \textit{Id.} & \textit{de } u''' & = u''' \cos \alpha'''. \end{array}$$

Faisant la somme de toutes ces projections, on a

$$x^{\text{IV}} - x' = u' \cos \alpha' + u'' \cos \alpha'' + u''' \cos \alpha'''.$$

$x^{\text{IV}} - x'$ étant la projection du chemin direct AE (2°), on voit donc que la somme algébrique des produits de chacun des côtés d'un chemin polygonal, par le cosinus de l'angle que fait le côté avec un axe, est égale à la projection du chemin direct sur le même axe (1105).

Représentant cette somme de produits par $\Sigma u \cos \alpha$, par U la longueur du chemin direct, et par α l'angle que fait ce chemin direct avec l'axe, l'équation précédente devient

$$U \cos \alpha = \Sigma u \cos \alpha.$$

Remarque 1. Une ligne courbe pouvant être considérée comme étant composée d'une infinité de lignes droites (558), cette dernière expression lui est encore applicable.

...arque 2. α' étant l'angle que forme AC avec une parallèle à Ox ...par l'extrémité A, et non par C, dans le cas de la figure 246 il

est compris entre 270° et 360°; α'' étant l'angle que forme CD avec une parallèle à Ox menée par l'extrémité C, il est compris entre 90° et 180°; α''' est compris entre 0° et 90°.

L'angle α', formé par AC avec Ox, étant compris entre 270° et 360°, son cosinus est algébriquement égal au cosinus de l'angle aigu $360° - \alpha'$, qui est le plus petit des deux angles formés par AC avec Ox. De même le cosinus d'un angle α_1 compris entre 180° et 270° est algébriquement égal au cosinus de l'angle obtus $360° - \alpha_1$, qui est le plus petit des deux angles que forme la droite avec Ox. Pour déterminer la projection d'une droite ou d'une suite de droites sur un axe, on peut donc, pour la facilité des calculs, prendre le cosinus du plus petit des angles que forme chaque droite avec Ox.

FORMULES EXPRIMANT LES RELATIONS ENTRE LES EXPRESSIONS TRIGONOMÉTRIQUES.

1107. *Relations entre les expressions trigonométriques d'un même angle ou d'un même arc α.*

On a (1090):

1° $\sin\alpha = \frac{y}{r}$, d'où $y = r\sin\alpha$;

et $\cos\alpha = \frac{x}{r}$, d'où $x = r\cos\alpha$.

Substituant ces valeurs de y et de x dans l'équation

$$y^2 + x^2 = r^2, \qquad (1085)$$

il vient

$$r^2\sin^2\alpha + r^2\cos^2\alpha = r^2,$$

ou

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

d'où l'on tire

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} \quad \text{et} \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

2° $\operatorname{tang}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{r\sin\alpha}{r\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;

d'où $\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$ ou $\sin\alpha = \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha}}$,

et $\operatorname{tang}\alpha = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$ ou $\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha}}$.

3° $\cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{r\cos\alpha}{r\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Ainsi $\cot\alpha = \frac{1}{\operatorname{tang}\alpha}$ ou $\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$;

d'où $\cot\alpha = \frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$ ou $\sin\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$;

et $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$ ou $\cos\alpha = \dfrac{\cot\alpha}{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$.

4° $\text{séc}\,\alpha = \dfrac{r}{x} = \dfrac{r}{r\cos\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ ou $\cos\alpha = \dfrac{1}{\text{séc}\,\alpha}$,

$$\text{séc}\,\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}} \quad \text{ou} \quad \sin\alpha = \frac{\pm\sqrt{\text{séc}^2\alpha - 1}}{\text{séc}\,\alpha},$$

$$\text{séc}\,\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \pm\sqrt{1+\text{tang}^2\alpha} \quad \text{ou} \quad \text{tang}\,\alpha = \pm\sqrt{\text{séc}^2\alpha - 1},$$

$$\text{séc}\,\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\pm\sqrt{1-\cot^2\alpha}}{\cot\alpha} \quad \text{ou} \quad \cot\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{\text{séc}^2\alpha - 1}}.$$

5° $\text{coséc}\,\alpha = \dfrac{r}{y} = \dfrac{r}{r\sin\alpha} = \dfrac{1}{\sin\alpha}$ ou $\sin\alpha = \dfrac{1}{\text{coséc}\,\alpha}$,

$$\text{coséc}\,\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}} \quad \text{ou} \quad \cos\alpha = \frac{\pm\sqrt{\text{coséc}^2\alpha - 1}}{\text{coséc}\,\alpha},$$

$$\text{coséc}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\pm\sqrt{1+\text{tang}^2\alpha}}{\text{tang}\,\alpha} \quad \text{ou} \quad \text{tang}\,\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{\text{coséc}^2\alpha - 1}},$$

$$\text{coséc}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \pm\sqrt{1+\cot^2\alpha} \quad \text{ou} \quad \cot\alpha = \pm\sqrt{\text{coséc}^2\alpha - 1},$$

$$\text{coséc}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\text{séc}\,\alpha}{\pm\sqrt{\text{séc}^2\alpha - 1}} \quad \text{ou} \quad \text{séc}\,\alpha = \frac{\text{coséc}\,\alpha}{\pm\sqrt{\text{coséc}^2\alpha - 1}}.$$

1108. *Relations entre les expressions trigonométriques de deux angles ou de deux arcs égaux et de signes contraires α et $-\alpha$.*

Pour une même valeur de r, les droites faisant avec Ox les angles α et $-\alpha$ donneront (1089) :

1° Pour y, deux valeurs y et $-y$ égales et de signes contraires; par conséquent les sinus $\frac{y}{r}$ et $-\frac{y}{r}$ (1090) seront égaux et de signes contraires; donc

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$

Ainsi, *deux angles égaux et de signes contraires ont des sinus égaux, mais de signes contraires.*

2° Pour x les deux valeurs seront de même signe; par conséquent les deux cosinus seront ensemble ou $+\frac{x}{r}$ ou $-\frac{x}{r}$; donc

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

Ainsi, *deux angles égaux et de signes contraires ont même cosinus.*

3° De ce que les valeurs de x sont égales et de même signe, tandis que celles de y sont égales et de signes contraires, il en résulte que les tangentes $\frac{y}{x}$ et $-\frac{y}{x}$ sont toujours égales et de signes contraires; donc

$$\text{tang}(-\alpha) = -\text{tang}\,\alpha.$$

Ainsi, *deux angles égaux et de signes contraires ont des tangentes égales, mais de signes contraires.*

Des raisonnements analogues font voir qu'on a :

4° $\text{coséc}\,(-\alpha) = -\,\text{coséc}\,\alpha$;

5° $\text{séc}\,(-\alpha) = \text{séc}\,\alpha$;

6° $\cot\,(-\alpha) = -\cot\alpha$.

1109. *Relations entre les expressions trigonométriques de deux angles ou de deux arcs complémentaires*, c'est-à-dire dont la somme $\alpha + \alpha' = 90°$.

Soit $\alpha = uOx$ et $\alpha' = uOy$.

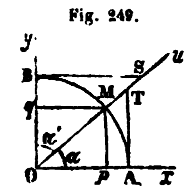


Fig. 249.

y et x étant les coordonnées du point M, et r étant le rayon OM,

On a pour l'angle α (1107)

$$Oq \quad \text{ou} \quad y = r\sin\alpha, \quad \text{et} \quad Op \quad \text{ou} \quad x = r\cos\alpha.$$

Au contraire, pour l'angle positif α', les mêmes valeurs de y et x donnent

$$y = r\cos\alpha' \quad \text{et} \quad x = r\sin\alpha'.$$

Égalant ces deux valeurs de y et ces deux valeurs de x, on a, en supprimant r, commun aux deux membres de chaque équation,

$$\sin\alpha = \cos\alpha' \quad \text{et} \quad \cos\alpha = \sin\alpha'.$$

Divisant membre à membre ces deux équations, on a

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha'}{\sin\alpha'},$$

c'est-à-dire (2°, 1107)

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{1}{\text{tang}\,\alpha'} \quad \text{ou} \quad \text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\alpha' = 1.$$

On a aussi (3°, 1107)

$$\text{tang}\,\alpha = \cot\alpha'.$$

Ainsi, *les angles α et α' étant complémentaires, les sinus, cosinus et tangente de l'un sont respectivement égaux aux cosinus, sinus et cotangente de l'autre.* C'est ce qu'on vérifie facilement sur la figure 249 (1098).

1110. *Relations entre les expressions trigonométriqnes de deux angles ou de deux arcs dont la différence $\alpha - \alpha' = 90°$.*

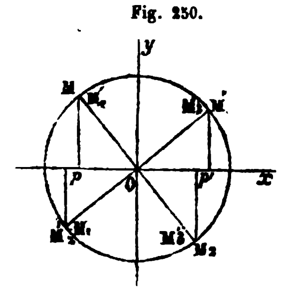


Fig. 250.

Admettant la définition que deux angles sont complémentaires lorsque leur somme algébrique est égale à un droit, ce cas rentre dans le précédent, en considérant α' comme négatif.

Soit $M'Ox = \alpha'$ le plus petit des deux angles et $MOx = \alpha$ le plus grand. Ces angles étant comptés dans le sens positif et à partir de la même direction Ox, l'angle $MOM' = \alpha - \alpha'$.

D'après la relation qui existe entre α et α',

quelles que soient du reste les valeurs de ces angles, MOM' est toujours droit ; d'où il résulte que les triangles rectangles MOp, M'Op' sont égaux, et l'on a, en valeurs absolues, Mp ou $y = Op'$ ou x', et Op ou $x = M'p'$ ou y'.

Remarquant maintenant que y et x' sont toujours de même signe et x et y' de signes contraires, quelles que soient les valeurs de α et α', c'est-à-dire quelle que soit la position de l'angle droit MOM' autour du point O, ce que l'on peut vérifier sur la figure pour les positions MOM', $M_1OM'_1$, $M_2OM'_2$, $M_3OM'_3$, qui renferment toutes les autres, il en résulte qu'on a

$$y = x' \quad \text{et} \quad x = -y'.$$

Remplaçant, comme au numéro précédent, y, x, y', et x' par leurs valeurs posées au n° 1107, on conclut

$$\sin\alpha = \cos\alpha' \quad \text{et} \quad \cos\alpha = -\sin\alpha'.$$

Ainsi, *pour deux angles dont la différence vaut un droit, le sinus du plus grand est égal au cosinus du plus petit, et a le même signe, et son cosinus est égal au sinus de ce dernier, mais de signe contraire.*

Divisant membre à membre ces deux équations on a

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\cos\alpha'}{\sin\alpha'},$$

d'où l'on déduit, d'après les mêmes équations qu'au numéro précédent,

$$\operatorname{tang}\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tang}\alpha'}, \ \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' = -1 \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}\alpha = -\cot\alpha'.$$

Application. Quels sont le sinus, le cosinus et la tangente d'un angle de 165° ?

La relation $\alpha - \alpha' = 90°$ devient $165° - \alpha' = 90°$, d'où $\alpha' = 165° - 90° = 75°$.

La table du n° 1138 donnant $\cos 75° = 0{,}25882$, $\sin 75° = 0{,}96593$ et $\cot 75° = 0{,}26795$, on a donc $\sin 165° = 0{,}25882$, $\cos 165° = -0{,}96593$ et $\operatorname{tang} 165° = -0{,}26795$.

1111. *Relations entre les expressions trigonométriques de deux angles ou de deux arcs* a *et* b *et celles de leur somme* $(a + b)$.

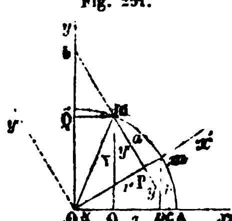


Fig. 251.

Soit $mOA = b$, $MOm = a$ et par suite $MOA = (a + b)$.

Cherchons d'abord les relations qui existent entre les coordonnées $MQ = Y$, $OQ = X$, et celles $OP = x'$ et $MP = y'$ du même point M par rapport aux deux systèmes d'axes rectangulaires x, y et x', y'.

Y étant la projection sur Oy du chemin OPM, et X étant celle du même chemin sur Ox, on a (1106)

$$Y = x' \cos POy + y' \cos PbO,$$
$$X = x' \cos b + y' \cos Mcx.$$

L'angle $Mcx = y'Ox$, dont l'excès sur un droit est égal à $x'Ox$ ou b; donc

$$\cos Mcx = -\sin b. \qquad (1110)$$

Relation qui existe quelle que soit la position du point M, c'est-à-dire quelles que soient les valeurs de a et b. C'est ce qu'on peut vérifier en faisant la figure.

L'angle POy a pour complément l'angle b; donc

$$\cos POy = \sin b. \qquad (1109)$$

Cette relation est vraie quelle que soit la valeur de b; car quand cet angle est obtus, son excès sur un droit est égal à POy, et l'on a bien encore

$$\cos POy = \sin b. \qquad (1110)$$

L'angle $PbO = b$ (594); donc

$$\cos PbO = \cos b.$$

Substituant ces valeurs de $\cos Mcx$, $\cos POy$ et $\cos PbO$ dans celles de X et Y, on a

$$Y = x' \sin b + y' \cos b,$$
$$X = x' \cos b - y' \sin b.$$

Comme on a (1107)

$$Y = r \sin(a+b), \quad X = r\cos(a+b),$$
$$y' = r \sin a, \quad x' = r \cos a,$$

les équations précédentes reviennent donc à

$$r\sin(a+b) = r\cos a \sin b + r \sin a \cos b,$$
$$r\cos(a+b) = r\cos a\cos b - r\sin a \sin b,$$

ou, en supprimant r,

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b, \qquad (1)$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b. \qquad (2)$$

$$\text{tang}(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}. \qquad (1107)$$

Divisant les deux termes de cette valeur par $\cos a \cos b$, on a, en remarquant encore que le sinus divisé par le cosinus donne la tangente,

$$\text{tang}(a+b) = \frac{\text{tang}\, a + \text{tang}\, b}{1 - \text{tang}\, a\ \text{tang}\, b}. \qquad (3)$$

1112. *Expressions trigonométriques de la différence* (a — b) *de deux angles* a *et* b *en fonction de celles de ces angles.* En conservant à b la même valeur, si dans les formules (1) et (2) du numéro précédent on fait $(a+b) = a$ et par suite $a = (a-b)$, elles deviennent

$$\sin a = \sin(a-b)\cos b + \cos(a-b)\sin b, \qquad (1)$$
$$\cos a = \cos(a-b)\cos b - \sin(a-b)\sin b. \qquad (2)$$

De l'équation (2) on tire (471)

$$\cos(a-b) = \frac{\cos a}{\cos b} + \sin(a-b)\frac{\sin b}{\cos b}. \qquad (3)$$

Substituant cette valeur dans l'équation (1), il vient, en isolant $\sin(a-b)$,

$$\sin(a-b)\left(\cos b + \frac{\sin^2 b}{\cos b}\right) = \sin a - \frac{\cos a \sin b}{\cos b}. \qquad (4)$$

Comme on a (4°, n° 469)

$$\cos b + \frac{\sin^2 b}{\cos b} = \frac{\cos^2 b + \sin^2 b}{\cos b} = \frac{1}{\cos b}, \qquad (1107)$$

substituant cette valeur dans l'équation (4), il vient

$$\frac{\sin(a-b)}{\cos b} = \frac{\sin a \cos b - \cos a \sin b}{\cos b},$$

c'est-à-dire

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

Substituant cette valeur de $\sin(a-b)$ dans l'équation (3), on en conclut

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Comme au numéro précédent, on peut poser

$$\operatorname{tang}(a-b) = \frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)} = \frac{\sin a \cos b - \cos a \sin b}{\cos a \cos b + \sin a \sin b};$$

d'où, en divisant les deux termes de cette valeur par $\cos a \cos b$,

$$\operatorname{tang}(a-b) = \frac{\operatorname{tang} a - \operatorname{tang} b}{1 + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b}.$$

1113. *Relations entre les expressions trigonométriques d'un angle a et celles d'un angle double 2a.*

Faisant $b = a$ dans les valeurs de $\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$ et $\operatorname{tang}(a+b)$ (1111), on a :

1° $\sin(a+b)$ ou $\sin 2a = \sin a \cos a + \cos a \sin a$,

c'est-à-dire

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a; \qquad (a)$$

2° $\cos(a+b)$ ou $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$. (1)

Comme on a (1107)

$$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a,$$

substituant cette valeur dans l'équation (1), elle donne

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a. \qquad (b)$$

Si, au lieu d'éliminer $\cos^2 a$ de l'équation (1), on avait éliminé $\sin^2 a$, on aurait obtenu

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1; \qquad (b')$$

3°
$$\operatorname{tang}(a+b) = \operatorname{tang} 2a = \frac{2\operatorname{tang} a}{1-\operatorname{tang}^2 a}. \qquad (c)$$

1114. *Relations entre les expressions trigonométriques d'un angle* a *et celle d'un angle moitié* $\frac{1}{2}a$.

Remplaçant $2a$ par a, et par suite a par $\frac{1}{2}a$ dans les formules du numéro précédent :

1° La formule (a) donne

$$\sin a = 2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a;$$

et la formule (b),

$$\cos a = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}a,$$

d'où (525)

$$\sin\frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}};$$

2° La formule (b') donne

$$\cos a = 2\cos^2\frac{1}{2}a - 1,$$

d'où

$$\cos\frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}};$$

3° La formule (c) devient

$$\operatorname{tang} a = \frac{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}a}{1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}a};$$

ce qui revient à l'équation du second degré

$$\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}a + \frac{2}{\operatorname{tang} a}\operatorname{tang}\frac{1}{2}a = 1,$$

d'où l'on tire (526)

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}a = -\frac{1}{\operatorname{tang} a} \pm \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tang}^2 a}+1} = \frac{1}{\operatorname{tang} a}\left(-1 \pm \sqrt{1+\operatorname{tang}^2 a}\right).$$

On a aussi (1107)

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}a = \frac{\sin\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}a} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}},$$

1115. *Pour avoir les expressions trigonométriques de* 3a *en fonction*

de celles de a, il suffit de faire $b=2a$ dans les formules (1), (2), (3) du n° 1111, ce qui donne

$$\sin 3a = \sin a \cos 2a + \cos a \sin 2a,$$
$$\cos 4a = \cos a \cos 2a - \sin a \sin 2a.$$

Remplaçant $\sin 2a$ et $\cos 2a$ par leurs valeurs (a) et (b) du n° 1113, et simplifiant à l'aide de la relation $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$, ces formules deviennent

$$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a, \quad (1)$$
$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a. \quad (2)$$

1116. *En faisant de même* $b = 3a$, *puis* $b = 4a$, et ainsi de suite, *dans les formules du* n° 1111, *on arriverait aux relations qui existent entre les expressions trigonométriques d'un multiple quelconque de* a *et celles de* a.

1117. *En changeant* a *en* $\frac{1}{3}$a, *les formules* (1) *et* (2) du n° 1115 *donnent*

$$\sin a = 3 \sin \frac{1}{3} a - 4 \sin^3 \frac{1}{3} a,$$

$$\cos a = 4 \cos^3 \frac{1}{3} a - 3 \cos \frac{1}{3} a.$$

Formules exprimant les relations qui existent entre les sinus et cosinus d'un angle triple d'un autre et les sinus et cosinus de ce dernier.

1118. *Autres relations entre les expressions trigonométriques, fréquemment employées dans les applications.*

1° En combinant par addition et soustraction les valeurs des sinus et cosinus de $(a+b)$ et $(a-b)$ (1111 et 1112), on obtient

$$2 \sin a \cos b = \sin (a+b) + \sin (a-b),$$
$$2 \cos a \sin b = \sin (a+b) - \sin (a-b),$$
$$2 \cos a \cos b = \cos (a-b) + \cos (a+b),$$
$$2 \sin a \sin b = \cos (a-b) - \cos (a+b).$$

Formules servant à transformer le produit de deux expressions trigonométriques en une somme ou une différence.

2° Faisant dans les formules précédentes $(a+b)=p$ et $(a-b)=q$, d'où (480) $a=\frac{1}{2}(p+q)$ et $b=\frac{1}{2}(p-q)$, elles deviennent

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q),$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{1}{2}(p+q) \sin \frac{1}{2}(p-q),$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q),$$

$$\cos q - \cos p = 2 \sin \frac{1}{2}(p+q) \sin \frac{1}{2}(p-q).$$

Formules d'un fréquent usage, surtout dans les calculs logarithmiques, pour changer une somme ou une différence en un produit.

3° Ces dernières formules donnent par division, et en remarquant que $\frac{\sin A}{\cos A} = \tang A = \frac{1}{\cot A}$: (1107)

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\sin \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q)}{\cos \frac{1}{2}(p+q) \sin \frac{1}{2}(p-q)} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(p+q)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(p-q)},$$

$$\frac{\sin p + \sin q}{\cos p + \cos q} = \frac{\sin \frac{1}{2}(p+q)}{\cos \frac{1}{2}(p+q)} = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(p+q),$$

$$\frac{\sin p + \sin q}{\cos q - \cos p} = \frac{\cos \frac{1}{2}(p-q)}{\sin \frac{1}{2}(p-q)} = \cot \frac{1}{2}(p-q),$$

$$\frac{\sin p - \sin q}{\cos p + \cos q} = \frac{\sin \frac{1}{2}(p-q)}{\cos \frac{1}{2}(p-q)} = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(p-q),$$

$$\frac{\sin p - \sin q}{\cos q - \cos p} = \frac{\cos \frac{1}{2}(p+q)}{\sin \frac{1}{2}(p+q)} = \cot \frac{1}{2}(p+q),$$

$$\frac{\cos p + \cos q}{\cos q - \cos p} = \frac{\cos \frac{1}{2}(p+q)}{\sin \frac{1}{2}(p+q)} \frac{\cos \frac{1}{2}(p-q)}{\sin \frac{1}{2}(p-q)} = \cot \frac{1}{2}(p+q) \cot \frac{1}{2}(p-q).$$

La première de ces formules fait voir le résultat remarquable, que *la somme des sinus de deux angles est à leur différence comme la tangente de la demi-somme de ces angles est à la tangente de leur demi-différence.*

4° Voici encore quelques autres transformations de sommes ou différences en produits :

$$\operatorname{tang} a \pm \operatorname{tang} b = \frac{\sin a}{\cos a} \pm \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cos b},$$

$$\operatorname{séc} a + \operatorname{séc} b = \frac{1}{\cos a} + \frac{1}{\cos b} = \frac{\cos a + \cos b}{\cos a \cos b} = \frac{2\cos\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos a \cos b}.$$

$$\operatorname{séc} a - \operatorname{séc} b = \frac{1}{\cos a} - \frac{1}{\cos b} = \frac{\cos b - \cos a}{\cos a \cos b} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(a-b)\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\cos a \cos b}.$$

$$\sin a + \cos b = \sin a + \sin(90^\circ - b) = 2\sin\left(45^\circ + \frac{a-b}{2}\right)\sin\left(45^\circ + \frac{a+b}{2}\right).$$

$$\sin a - \cos b = \sin a - \sin(90^\circ - b) = -2\sin\left(45^\circ - \frac{a+b}{2}\right)\sin\left(45^\circ - \frac{a-b}{2}\right).$$

$$1 + \sin a = 1 + \cos(90^\circ - a) = 2\cos^2\left(45^\circ - \frac{a}{2}\right),$$

$$1 - \sin a = 1 - \cos(90^\circ - a) = 2\sin^2\left(45^\circ - \frac{a}{2}\right),$$

$$\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} = \sqrt{\frac{2\sin^2\frac{a}{2}}{2\cos^2\frac{a}{2}}} = \operatorname{tang}\frac{a}{2},$$

$$\sqrt{\frac{1-\sin a}{1+\sin a}} = \sqrt{\frac{2\sin^2\left(45^\circ - \frac{a}{2}\right)}{2\cos^2\left(45^\circ - \frac{a}{2}\right)}} = \operatorname{tang}\left(45^\circ - \frac{a}{2}\right),$$

$$1 \pm \operatorname{tang} a = \frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ \pm a)}{\cos a}.$$

Pour $a + b + c = \pi = 180^\circ$, on a :

$$\sin a + \sin b + \sin c = 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2},$$

$$\sin a + \sin b - \sin c = 4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2},$$

$$\cot\frac{a}{2} + \cot\frac{b}{2} + \cot\frac{c}{2} = \cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}\cot\frac{c}{2},$$

$$\sin^2\frac{a}{2} + \sin^2\frac{b}{2} + \sin^2\frac{c}{2} + 2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2} = 1.$$

CALCUL DES TABLES TRIGONOMÉTRIQUES.

1119. Nous avons expliqué au nº 1099 la disposition des tables trigonométriques. Nous allons montrer comment on peut calculer ces tables.

1° A mesure que l'on fait décroître un angle moindre que 90°, le rapport de l'arc qui lui sert de mesure à son sinus diminue, et approche autant que l'on veut de l'unité, qui est sa valeur limite (484).

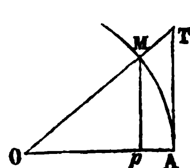


Fig. 252.

Supposant OM ou $r=1$, on a (1092) $Mp=\sin\alpha$, $Op=\cos\alpha$, $AT=\text{tang}\,\alpha$; soit de plus a la longueur de l'arc AM.

On a $\qquad a>\sin\alpha \quad$ et $\quad a<\text{tang}\,\alpha.$

En effet sin α ou Mp étant la moitié de la corde sous-tendant un arc double de l'arc a, on a bien

$$a>\sin\alpha. \qquad (1)$$

De plus, la surface du secteur OAM étant moindre que celle du triangle OAT, on a

$$\frac{1}{2}\,OA\times a<\frac{1}{2}\,OA\times\text{tang}\,\alpha; \qquad (692, 734)$$

d'où

$$a<\text{tang}\,\alpha \quad \text{ou} \quad (\text{n}^\circ\ 1107) \quad a<\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (2)$$

Des inégalités (1) et (2), on tire respectivement

$$\frac{a}{\sin\alpha}>1 \quad \text{et} \quad \frac{a}{\sin\alpha}<\frac{1}{\cos\alpha}.$$

Ce qui fait voir que le rapport de la longueur de l'arc au sinus est compris entre 1 *et la quantité toujours plus grande que l'unité* $\frac{1}{\cos\alpha}$.

Or, comme à mesure que l'angle α diminue $\frac{1}{\cos\alpha}$ décroît et s'approche de plus en plus de l'unité, dont il peut différer d'aussi peu que l'on veut, *il en résulte que* $\frac{a}{\sin\alpha}$, *qui est plus petit que* $\frac{1}{\cos\alpha}$, *en diffère encore moins et peut être considéré comme ayant l'unité pour limite.*

2° Des inégalités

$$a<\text{tang}\,\alpha \quad \text{et} \quad a>\sin\alpha \quad \text{ou} \quad a>\text{tang}\,\alpha\cos\alpha, \qquad (1107)$$

on conclut

$$\frac{a}{\text{tang}\,\alpha}<1 \quad \text{et} \quad \frac{a}{\text{tang}\,\alpha}>\cos\alpha.$$

Ce qui fait voir que le rapport $\frac{a}{\text{tang}\,\alpha}$, *toujours plus grand que* cos α, *est compris entre* 1 *et* cos α, *et a par conséquent l'unité pour limite.*

3° Démontrons maintenant que *la différence entre la longueur* a *de l'arc et le sinus est moindre que le quart du cube de* a.

De l'inégalité (1°) $\frac{1}{2}a<\dfrac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$, on conclut

$$\sin \frac{1}{2} \alpha > \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} \alpha.$$

Multipliant membre à membre cette inégalité par l'équation

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha, \qquad (1114)$$

on a, en remarquant que le facteur commun $\sin \frac{1}{2} \alpha$ disparaît,

$$\sin \alpha > a \cos^2 \frac{1}{2} \alpha,$$

ou

$$\sin \alpha > a \left(1 - \sin^2 \frac{1}{2} \alpha\right), \qquad (1107)$$

ou encore

$$\sin \alpha > a - a \sin^2 \frac{1}{2} \alpha,$$

d'où

$$a - \sin \alpha < a \sin^2 \frac{1}{2} \alpha.$$

Multipliant membre à membre cette inégalité par celle $\sin \frac{1}{2} \alpha < \frac{1}{2} a$ élevée au carré, c'est-à-dire par

$$\sin^2 \frac{1}{2} \alpha < \frac{a^2}{4},$$

on a bien, en supprimant le facteur commun $\sin^2 \frac{1}{2} \alpha$,

$$a - \sin \alpha < \frac{a^3}{4}.$$

Calculons quelle est cette limite d'erreur pour un angle de 10″, qu est le plus petit des tables de Callet.

Le rayon étant 1, l'arc correspondant à 180° est

$$\pi r = \pi = 3,1415926..... \qquad (726$$

et la longueur a de l'arc correspondant à 10″ est (733)

$$a = \frac{3,1415926 ... \times 10}{180 \times 60 \times 60} = 0,000\,048\,481\,368\,110.....$$

d'où

$$\frac{a^3}{4} = 0,000\,000\,000\,000\,032.....$$

Ainsi, pour un angle de 10″, en prenant l'arc pour le sinus, l'erreur est moindre que les trois dixièmes environ d'une unité décimale du treizième ordre. On peut donc poser, avec une erreur moindre qu'une unité décimale du treizième ordre, que l'on a

$$\sin 10'' = 0,000\,048\,481\,368\,1.$$

Avec le même degré d'exactitude, on peut tirer de la formule

$$\cos 10'' = \sqrt{1 - \sin^2 10''}, \qquad (1107)$$
$$\cos 10'' = 0{,}999\,999\,998\,824\,8.$$

4° A l'aide des valeurs de sin 10″, de cos 10″ et des formules

$$\left.\begin{array}{l}\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b\end{array}\right\} \quad . \quad (1111)$$

on peut calculer les sinus et cosinus de tous les angles de 10″ en 10″ jusqu'à 45°.

On aurait la tangente et la cotangente de chacun de ces angles à l'aide des formules

$$\operatorname{tang} a = \frac{\sin a}{\cos a} \quad \text{et} \quad \cot a = \frac{\cos a}{\sin a}. \qquad (1107)$$

5° Les expressions trigonométriques des angles de 0° à 45° donnent, d'après ce qui a été dit n°ˢ 1098 et 1109, celles des angles de 45° à 90°. Enfin, ayant les expressions trigonométriques jusqu'à cette limite, celles des angles supérieurs s'obtiendront d'après ce qui a été dit n° 1095.

On conçoit que cette manière de calculer les expressions trigonométriques est très-longue et pénible; on l'a simplifiée en employant une autre marche, qu'il importe peu d'exposer ici, notre but n'étant pas de mettre à même de calculer des tables qui sont déjà établies aussi complètes que peuvent l'exiger les besoins de la pratique.

Comme, dans la pratique de l'ingénieur, on a ordinairement des degrés d'approximation suffisants, en supposant qu'un angle compris entre deux autres qui ne diffèrent entre eux que d'une minute est égal à celui de ces derniers qui en approche le plus, nous n'avons donné dans notre table que les expressions trigonométriques des angles de minute en minute (1138). Dans le cas où l'on ne se contenterait pas de cette approximation, on aurait recours à la méthode des parties proportionnelles, en opérant comme au numéro suivant pour les tables logarithmiques.

1120. *L'usage des tables logarithmiques* repose sur la résolution des deux questions : 1° étant donné un angle trouver le logarithme d'une de ses expressions trigonométriques; 2° réciproquement, étant donné le logarithme d'une expression trigonométrique, trouver l'angle correspondant. Ces deux questions se résolvent par la même marche que les questions analogues des n°ˢ 400 et 401 sur les nombres.

Avec les tables de Lalande on trouve ainsi (1099) : 1° que

$$\log \sin 25°12'34'' = \bar{1},629\,18 + \frac{0{,}000\,27 \times 34}{60} = \bar{1},629\,18 + 0{,}000\,15 = \bar{1},629\,33.$$

On dispose l'opération de la manière suivante :

$$\begin{array}{lll} \log\sin 25^\circ\,12' & = \bar{1},629\,18 & \\ \text{pour} \qquad 34'' & \qquad 15 & \dfrac{27\times 34}{60}=15 \\ \hline \log\sin 25^\circ\,12'\,34'' & = \bar{1},629\,33 & \end{array}$$

On trouve de même

$$\log\cos 38^\circ 45' 24'' = \bar{1},892\,03 - \frac{0,000\,10\times 24}{60} = \bar{1},892\,03 - 0,000\,04 = \bar{1},891\,99.$$

On écrit

$$\begin{array}{lll} \log\cos 38^\circ\,45' & = \bar{1},892\,03 & \\ \text{pour} \qquad 24'' & \qquad -4 & \dfrac{10\times 24}{60}=4 \\ \hline \log\cos 38^\circ\,45'\,24'' & = \bar{1},891\,99 & \end{array}$$

2° Ayant $\log\sin\alpha = \bar{1},629\,33$, on a

$$\alpha = 25^\circ\,12' + 60'' \times \frac{15}{27} = 25^\circ\,12'\,34''.$$

On dispose ainsi l'opération :

$$\begin{array}{lll} & \log\sin\alpha = \bar{1},629\,33 & \\ \log\sin 25^\circ\,12' & = \bar{1},629\,18 & \\ \text{pour} \qquad 34'' & \qquad 15 & \dfrac{60\times 15}{27}=34 \\ \alpha = 25^\circ\,12'\,34'' & & \end{array}$$

De même, ayant $\log\cos\alpha = \bar{1},891\,99$, on a

$$\alpha = 38^\circ\,45' + 60'' \times \frac{4}{10} = 38^\circ\,45'\,24''.$$

On pose

$$\begin{array}{lll} & \log\cos\alpha = \bar{1},891\,99 & \\ \log\cos 38^\circ\,45' & = \bar{1},892\,03 & \\ \text{pour} \qquad 24'' & \qquad -4 & \dfrac{60\times 4}{10}=24 \\ \alpha = 38^\circ 45'\,24'' & & \end{array}$$

Au 1° et au 2° on opère pour la tangente comme pour le sinus, et pour la cotangente comme pour le cosinus.

Quand on détermine l'angle au moyen des tables de Lalande, en partant du sinus, l'erreur commise est moindre que 1″ pour des angles inférieurs à 12°; au delà de 12°, on n'a plus les secondes exactement; dans le voisinage de :

22° 30° 40° 45° 50° 55° 60° 70° 80°,

l'erreur peut atteindre respectivement :

2″ 3″ 4″ 5″ 6″ 7″ 8″ 12″ 30″;

vers 85° elle peut s'élever à une minute; enfin, dans le voisinage de 88°, comme on voit le même logarithme se rapporter à 3 angles, et que par suite on peut prendre l'un quelconque de ces angles, l'erreur peut s'élever à 3′.

Ainsi les angles voisins de 90° sont très-mal déterminés par leurs sinus. De même les petits angles sont mal déterminés par leurs cosinus. Les tangentes donnent des erreurs beaucoup plus petites : au-dessous de 12° l'erreur est moindre que 1″; vers 27° elle est de 2″, et vers 45° de 2″,4. Au delà de 45° elle diminue pour repasser par les premières valeurs, les différences tabulaires redevenant les mêmes.

Ainsi dans la pratique, autant qu'il sera possible, on devra déterminer les angles au moyen de leurs tangentes ou de leurs cotangentes, de préférence à leurs sinus ou cosinus.

Pour résoudre les deux questions précédentes avec les tables de Callet, on procède comme avec celles de Lalande; seulement le calcul des parties proportionnelles est encore plus simple. On a, par exemple :

1° $$\log \sin 25°\,12'\,34'',8 = \bar{1},629\,3187 + \frac{0,000\,0448 \times 4,8}{10} =$$
$$= \bar{1},629\,3187 + 0,000\,0215 = \bar{1},629\,3402.$$

On dispose ainsi les opérations :

log sin 25° 12′ 30″		$= \bar{1},629\,3187$	44,8
pour	4″,8	215	4,8
log sin 25° 12′ 34″,8		$= \bar{1},629\,3402$	358 4
			179 2
			215,04

On trouve de même

$$\log \cos 25°\,12'\,34'',8 = \bar{1},956\,5358 - \frac{0,000\,0099 \times 4,8}{10} =$$
$$= \bar{1},956\,5358 - 0,000\,0048 = \bar{1},956\,5310.$$

On écrit :

log cos 25° 12′ 30″		$= \bar{1},956\,5358$	9,9
pour	4″,8	— 48	4,8
log cos 25° 12′ 34″,8		$= \bar{1},956\,5310$	79 2
			396
			47,5 2

Ainsi, *pour avoir la quantité dont il faut augmenter ou diminuer le logarithme des tables, on divise la différence tabulaire par* 10, *et on multiplie par le nombre qui indique les secondes et fractions de seconde en excès.*

On opère pour les tangentes comme pour les sinus, et pour les cotangentes comme pour les cosinus.

2° Soit	$\log \sin \alpha$	$= \bar{1},6293402$	2150	448
on a	$\log \sin 25°12'30''$	$= \bar{1},6293187$	3580	4,7
pour	$4'',8$	215	444	

$\alpha = 25°12'34'',8$

Soit encore	$\log \cos \alpha$	$= \bar{1},9565310$	480	99
on a	$\log \cos 25°12'30''$	$= \bar{1},9565358$	840	4,8
pour	$4'',8$	-48	48	

$\alpha = 25°12'34'',8$

Pour avoir le nombre de secondes et fractions de seconde dont il faut augmenter ou diminuer l'angle des tables, on multiplie par 10 la différence entre le logarithme donné et celui des tables, et on divise le produit par la différence tabulaire.

Pour les tangentes on opère comme pour les sinus, et pour les cotangentes comme pour les cosinus.

Table de la limite de l'erreur correspondant à différents angles, en partant du logarithme du sinus :

5°	10°	20°	30°	40°	45°	50°	84°	87°	88°	89°	89°40'
0",005	0",01	0",02	0",03	0",04	0",05	0",1	0",5	1"	2"	5"	10".

De même que les angles qui approchent de 90° sont très-mal déterminés par leurs sinus, les angles très-petits le sont très-mal par leurs cosinus.

Les tangentes et cotangentes ne présentent pas le même inconvénient. L'erreur augmente jusqu'à 45°, où elle est encore moindre que 0",03, puis elle diminue jusqu'à 90°. Ainsi le chiffre des dixièmes de seconde que l'on obtient est exact, et il convient même de conserver le chiffre des centièmes, quoiqu'il puisse être fautif de quelques unités.

PRINCIPES SUR LESQUELS S'APPUIE LA RÉSOLUTION DES TRIANGLES RECTILIGNES.

1121. *Remarque.* Pour abréger, nous désignerons, dans tout ce qui va suivre, les angles des triangles par les lettres A, B, C, placées à leurs sommets, et les côtés respectivement opposés à ces angles par les lettres a, b, c, qu'on écrit vers le milieu de ces côtés. Dans le cas où le triangle est rectangle, la lettre A désigne l'angle droit, et a l'hypoténuse.

1122. THÉORÈME 1. *Dans tout triangle rectangle, chaque côté de l'angle droit est égal à l'hypoténuse multipliée par le cosinus de l'angle adjacent.*

Fig. 253.

b et c pouvant être considérés comme les projections de a sur leurs directions, on a

$$b = a \cos C \quad \text{et} \quad c = a \cos B. \qquad (1106)$$

De ce que les angles B et C sont complémentaires, on a $\cos C = \sin B$

et $\cos B = \sin C$ (1109), et, par suite,

$$b = a \sin B \quad \text{et} \quad c = a \sin C.$$

Ainsi, *dans tout triangle rectangle, chaque côté de l'angle droit est égal à l'hypoténuse multipliée par le cosinus de l'angle adjacent ou par le sinus de l'angle opposé.*

Corollaire. Les deux équations $b = a \sin B$ et $c = a \cos B$ donnent

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\cos B} = \tang B, \qquad (1107)$$

d'où

$$b = c \tang B.$$

On a de même

$$c = b \tang C.$$

Comme on a $\tang B = \cot C$ et $\tang C = \cot B$ (1109), on a donc aussi

$$b = c \cot C \quad \text{et} \quad c = b \cot B.$$

Ainsi, *dans tout triangle rectangle, chaque côté de l'angle droit est égal à l'autre multiplié par la tangente de l'angle opposé au premier ou par la cotangente de l'angle adjacent.*

1123. Théorème 2. *Dans tout triangle rectiligne les sinus des angles sont entre eux comme les côtés opposés.*

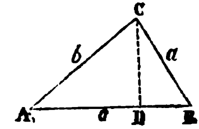


Fig. 254.

Du sommet C abaissant une perpendiculaire CD sur le côté c :

1° Dans le cas où cette perpendiculaire tombe sur le côté c, on a respectivement dans les triangles rectangles ADC et BDC,

$$CD = b \sin A \quad \text{et} \quad CD = a \sin B. \qquad (1122)$$

Égalant ces deux valeurs de CD, on a

$$b \sin A = a \sin B,$$

d'où

$$\sin A : \sin B = a : b. \qquad (312)$$

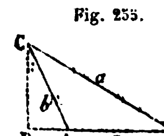


Fig. 255.

2° Dans le cas où la perpendiculaire CD tombe sur le prolongement de c, on a encore dans le triangle ADC,

$$CD = b \sin CAD,$$

ou, puisque les angles CAD et A, qui sont supplémentaires, ont le même sinus (1095),

$$CD = b \sin A.$$

Le triangle BDC donne aussi $CD = a \sin B$.

De ces deux valeurs de CD on conclut encore

$$\sin A : \sin B = a : b.$$

3° Dans le cas où le point D tomberait en A, le triangle serait rectangle, et l'on aurait directement (1°)

$$\text{CD} \quad \text{ou} \quad b = a \sin B;$$

ou bien, en remarquant que $\sin A = 1$,

$$b \sin A = a \sin B;$$

d'où, encore,

$$\sin A : \sin B = a : b.$$

Si, au lieu de prendre le sommet C pour abaisser la perpendiculaire, on avait choisi l'un des deux autres A et B, on aurait eu respectivement

$$\sin B : \sin C = b : c,$$

et

$$\sin C : \sin A = c : a.$$

Ces trois proportions, qui prouvent ce qu'il fallait démontrer, se résument dans la suite de rapports égaux

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

1124. THÉORÈME 3. *Dans tout triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres, moins le double rectangle de ces deux côtés multiplié par le cosinus de l'angle compris entre ces côtés.* Ainsi l'on a, par exemple (*fig.* 255),

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \qquad (1)$$

On démontre en géométrie (709) que, dans tout triangle, le carré d'un côté opposé à un angle aigu est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, moins le double rectangle compris sous l'un de ces côtés et la projection de l'autre sur le premier. On démontre que ce double rectangle, au lieu de se retrancher, s'ajoute quand l'angle opposé au côté considéré est obtus (708). Ainsi les figures 254 et 255 donnent respectivement :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \times \text{AD}, \qquad (2)$$
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c \times \text{AD}. \qquad (3)$$

Dans le triangle rectangle ADC on a, pour la figure 254, $\text{AD} = b \cos A$, et pour la figure 255, $\text{AD} = b \cos \text{DAC}$ ou $\text{AD} = -b \cos A$, puisque A est le supplément de DAC (1095). Ces deux valeurs de AD, substituées dans les formules (2) et (3), les ramènent toutes deux à la formule générale (1).

Quand l'angle A est droit, son cosinus est nul, et cette formule générale donne le résultat bien connu (704)

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

1125. THÉORÈME 4. *La somme algébrique des projections de deux côtés*

d'un triangle sur le troisième est égale à ce troisième côté (1106). Ainsi l'on a *fig.* 254 et 255

$$c = a \cos B + b \cos A.$$

RÉSOLUTION DES TRIANGLES RECTILIGNES RECTANGLES.

1126. *Résoudre un triangle*, c'est, étant données trois de ses six parties, angles ou côtés, déterminer les trois autres. Comme il faut que les trois parties connues déterminent le triangle, il est donc nécessaire qu'une au moins des parties données soit un côté, les trois angles ne déterminant pas le triangle (626).

Les trois inconnues pourront, d'une manière générale, se déduire d'un système de trois équations établies entre les inconnues et les quantités données (476). Ce système découle du n° 1124, et il est

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

A ce système on peut substituer le suivant, qui lui est équivalent, et qu'on déduit du n° 1125

$$a = b \cos C + c \cos B,$$
$$b = a \cos C + c \cos A,$$
$$c = a \cos B + b \cos A.$$

La relation suivante permet de simplifier les calculs relatifs à la résolution des triangles :

$$A + B + C = 180°.$$

1127. Dire qu'un triangle est rectangle, c'est donner un de ses angles; par conséquent, il suffit de connaître deux de ses autres parties pour qu'il soit déterminé (1126).

1er cas. *Étant donnés* (fig. 253) *l'hypoténuse* a *et l'un des angles aigus*, B *par exemple*, *trouver l'angle* C *et les deux côtés* b *et* c.

Le triangle étant rectangle, les angles aigus sont complémentaires, et l'on a

$$C = 90° - B.$$

On a de plus

$$b = a \sin B \quad \text{et} \quad c = a \cos B. \qquad (1122)$$

2e cas. *Étant donnés le côté* b *et l'angle* B, *trouver* C, a *et* c.

$$C = 90° - B.$$

De la relation $b = a \sin B$ (1122), on tire

$$a = \frac{b}{\sin B}.$$

On a aussi (1122, corol.)

$$c = b \operatorname{tang} C \quad \text{ou} \quad c = b \cot B = \frac{b}{\operatorname{tang} B}. \qquad (1109)$$

3e cas. *Étant donnés l'hypoténuse* a *et un côté* b, *trouver* c, B *et* C.

Le triangle étant rectangle, on a (704)

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Si l'on voulait calculer c à l'aide des logarithmes, on donnerait à cette valeur la forme

$$c = \sqrt{(a+b)(a-b)}. \qquad (703)$$

De la relation $b = a \sin B$ (1122), on tire

$$\sin B = \frac{b}{a}.$$

De sin B on conclut B; puis on a

$$C = 90° - B. \quad \text{On a aussi} \quad \cos C = \sin B = \frac{b}{a}.$$

4e cas. *Étant donnés les côtés* b *et* c, *trouver l'hypoténuse* a *et les angles* B *et* C.

Comme on a $b = c \operatorname{tang} B$ (1122, corol.), on en conclut

$$\operatorname{tang} B = \frac{b}{c}. \quad \text{On a aussi} \quad \cot C = \operatorname{tang} B = \frac{b}{c}.$$

Ayant B à l'aide de tang B, on conclut, du reste,

$$C = 90° - B;$$

puis, de la relation $b = a \sin B$ (1122), on tire

$$a = \frac{b}{\sin B}.$$

Pour avoir a, on pourrait poser immédiatement

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

On aurait ensuite déterminé B à l'aide de la relation

$$b = a \sin B.$$

Puis on aurait posé

$$C = 90° - B.$$

Mais ce mode d'opérer conduit à des calculs plus longs que le précédent.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES RECTILIGNES QUELCONQUES.

1128. 1er cas. *On donne du triangle* ABC, *fig.* 254, *un côté* a *et deux angles* A *et* B; *trouver les deux autres côtés* b, c, *et le troisième angle* C.

Dans tout triangle, la somme des trois angles étant égale à deux droits, on a

$$C = 180^\circ - (A + B).$$

D'après le théorème les sinus des angles d'un triangle sont entre eux comme les côtés opposés à ces angles (1123), on a

$$\sin A : \sin B = a : b, \quad \text{et} \quad \sin A : \sin C = a : c;$$

d'où l'on conclut respectivement

$$b = a\frac{\sin B}{\sin A}, \quad \text{et} \quad c = a\frac{\sin C}{\sin A},$$

ou

$$\log b = \log a + \log \sin B - \log \sin A,$$
$$\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A.$$

On calculerait la surface S du triangle au moyen de la formule

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}, \qquad (1132)$$

ou $\log S = 2\log a + \log \sin B + \log \sin C - \log 2 - \log \sin A.$

Application. Soit :

$$a = 6789^m,24, \quad A = 42^\circ 17' 23'',4 \quad \text{et} \quad B = 87^\circ 24' 11'',8.$$

Calcul de C

$$C = 180^\circ - (A + B) = 50^\circ 18' 24'',8;$$

calcul de b

$$\begin{array}{rl} \log a = & 3,831\,8212 \\ \log \sin B = & \bar{1},999\,5538 \\ \hline \log \sin A = & \bar{1},827\,9385 \\ \hline \log b = & 4,003\,4365 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log a = & 3,831\,8212 \\ \log \sin B = & \bar{1},999\,5538 \\ -\log \sin A = & 0,172\,0615 \\ \hline \log b = & 4,003\,4365 \end{array} \quad (1099)$$

$$b = 10\,079^m,44;$$

calcul de c

$$\begin{array}{rl} \log a = & 3,831\,8212 \\ \log \sin C = & \bar{1},886\,1953 \\ \hline \log \sin A = & \bar{1},827\,9385 \\ \hline \log c = & 3,890\,0780 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log a = & 3,831\,8212 \\ \log \sin C = & \bar{1},886\,1953 \\ -\log \sin A = & 0,172\,0615 \\ \hline \log c = & 3,890\,0780 \end{array}$$

$$c = 7763^m,86;$$

calcul de S

$$\begin{array}{rlrl} 2\log a &= 7,663\,6424 & 2\log a &= 7,663\,6424 \\ \log\sin B &= \bar{1},999\,5538 & \log\sin B &= \bar{1},999\,5538 \\ \log\sin C &= \bar{1},886\,1953 & \log\sin C &= \bar{1},886\,1953 \\ \hline \log 2 &= 0,301\,0300 & -\log 2 &= \bar{1},698\,9700 \\ \log\sin A &= \bar{1},827\,9385 & -\log\sin A &= 0,172\,0615 \\ \hline \log S &= 7,420\,4230 & \log S &= 7,420\,4230 \end{array}$$

$$S = 26\,328\,300 \text{ mètres carrés.}$$

Nous avons suivi deux marches pour effectuer les calculs logarithmiques. Dans la première on écrit les vrais logarithmes qui se retranchent, en ayant soin, pour éviter la confusion, de les séparer par un trait de ceux qui s'ajoutent. Puis appliquant la règle 3° page 7, de chaque somme partielle fournie par les chiffres des logarithmes qui s'ajoutent, on retranche successivement les chiffres correspondants des logarithmes qui se retranchent, ce qui fournit les chiffres successifs du logarithme cherché. Ainsi $\log S$ s'obtient en disant 4 et 8, 12, et 3, 15, moins 5, 10; on pose 0 au résultat, et on ajoute 1 à la colonne suivante, qui donne $1+2+3+5=11$, moins 8, 3; on pose 3 au résultat, et l'on continue ainsi de suite en observant toujours la règle de la soustraction (28). Pour les caractéristiques qui sont négatives, on suit les règles relatives à l'addition et à la soustraction des quantités algébriques (421, 422).

Dans la seconde marche, on change le signe de chaque logarithme à retrancher, ce qui ne donne plus que des quantités à ajouter. Ainsi dans le calcul de S, ayant $\log 2 = 0,301\,0300$, on a $-\log 2 = -0,301\,0300 = \bar{1} + 1 - 0,301\,0300 = \bar{1},698\,9700$; de même, ayant $\log\sin A = \bar{1},827\,9385$, on a $-\log\sin A = 1 - 0,827\,9385 = 0,172\,0615$. La valeur des logarithmes changés de signe s'obtient d'après la règle du n° 398, relative au complément d'un nombre.

1129. 2° cas. *On donne deux côtés* a, b, *et l'angle* A *opposé à l'un d'eux, trouver* c, B *et* C (972).

De la proportion

$$\sin A : \sin B = a : b, \qquad (1123)$$

on tire

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}; \qquad (a)$$

on a ensuite

$$C = 180° - (A + B);$$

puis

$$\sin A : \sin C = a : c$$

donne

$$c = a\frac{\sin C}{\sin A}.$$

On a la surface

$$S = \frac{ab \sin C}{2}. \qquad (1132)$$

Remarque. Cette solution demande quelques éclaircissements : la même valeur (a) de sinus B correspondant à deux angles supplémentaires, l'un aigu et l'autre obtus (1096), il convient d'examiner dans quel cas il faudra prendre B aigu ou obtus, ce qui conduit aux remarques suivantes, qui découlent de ce que dans tout triangle deux angles ne peuvent être droits ou obtus (618), et que au plus grand angle est opposé le plus grand côté (603).

Fig. 256.

Fig. 257.

Fig. 258.

1° L'angle donné A étant droit ou obtus, l'angle B est nécessairement aigu. Ayant $A > B$, on doit avoir aussi $a > b$. Il y a alors toujours une solution ; mais il n'y en a qu'une ; c'est ce que fait voir la figure 256.

2° L'angle A étant aigu, si l'on a en même temps $a > b$, d'où $A > B$, il en résulte encore que B est aigu, et il n'y a également qu'une solution. La figure 257 fait voir qu'en effet l'angle A serait obtus dans le deuxième triangle AB'C qui a a et b pour côtés. Dans le cas où A étant aigu on a $a=b$, B' tombe en A, et l'on obtient pour unique solution un triangle isocèle.

3° Soit, comme dans le cas précédent, A aigu, mais $a < b$. Dans ce cas, $B > A$ peut être aigu ou obtus ; il y a alors deux solutions ; c'est ce qu'indique la figure 258. Dans le triangle ABC, qui satisfait à l'énoncé, l'angle B est aigu ; dans le triangle AB'C, qui satisfait également à l'énoncé, $B' = 180° - B$ est obtus.

Il y aura deux solutions tant que $a < b$ sera plus grand que $CD = b \sin A$, c'est-à-dire tant qu'on aura

$$a > b \sin A \quad \text{ou} \quad \frac{b \sin A}{a} < 1.$$

Lorsque $a = CD = b \sin A$, l'arc BB' est tangent à AB au point D, les deux triangles ABC et AB'C coïncident avec le triangle rectangle ADC, et il n'y a plus qu'une solution.

Enfin, si l'on avait $a < CD$ ou $a < b \sin A$, l'arc BB' n'aurait aucun point commun avec AB, et il n'y aurait pas de solution.

Si, au lieu de commencer par déterminer les angles B et C, on avait voulu avoir d'abord le côté c, on aurait posé

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \tag{1124}$$

d'où

$$c^2 - 2b \cos A \times c = a^2 - b^2,$$

et par suite

$$c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 + b^2 \cos^2 A} \tag{526}$$

ou

$$c = b\cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2\sin^2 A}. \qquad (1107)$$

1130. 3e cas. *Connaissant deux côtés* a, b, *et l'angle compris* C, *trouver* c, A, B.

1° On a

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}. \qquad (1124)$$

c étant connu, on pose

$$\sin A = \frac{a\sin C}{c}, \qquad (1123)$$

puis

$$B = 180° - (A + C).$$

2° On peut commencer par déterminer A.

On a

$$\sin A : \sin B = a : b.$$

Dans cette proportion il entre deux inconnues, sin A et sin B; on en fait disparaître une en posant

$$(\sin A + \sin B) : (\sin A - \sin B) = (a + b) : (a - b), \qquad (321)$$

ou, en remplaçant le premier rapport par son égal (1118, 3°),

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}(A + B) : \text{tang}\,\frac{1}{2}(A - B) = (a + b) : (a - b).$$

$\frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{2}(180° - C) = m°$ étant connu, cette proportion ne renferme d'inconnue que $\text{tang}\,\frac{1}{2}(A - B)$, et elle en donne la valeur,

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}(A - B) = \frac{a - b}{a + b}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}(A + B),$$

de laquelle on conclut $\frac{1}{2}(A - B) = n°$. Ayant la demi-somme $m°$ et la demi-différence $n°$ de A et B, on a (480).

$$A = m° + n° \quad \text{et} \quad B = m° - n°.$$

Ayant A et B, on pose (1123)

$$c = \frac{a\sin C}{\sin A}.$$

Cette solution est préférable à la première pour l'emploi des logarithmes (1128).

On déterminerait la surface à l'aide de la formule

$$S = \frac{ab\sin C}{2}. \qquad (1132)$$

1131. 4° cas. *On donne les trois côtés* a, b, c; *déterminer les trois angles* A, B, C.

Posant

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \qquad (1124)$$

on tire

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \qquad (a)$$

Des formules semblables donneraient B et C.

Du reste, ayant déterminé ainsi A et B, on pourrait poser

$$C = 180^\circ - (A + B),$$

ce qui, dans tous les cas, sert de vérification.

La formule (a) peut être remplacée par une autre plus propre à l'emploi des logarithmes (1128).

On a

$$2\sin^2\frac{1}{2}A = 1 - \cos A. \qquad (1114,\ 1^\circ)$$

Remplaçant cos A par sa valeur (a), on a

$$2\sin^2\frac{1}{2}A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}{2bc}$$
$$= \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}, \qquad (702,\ 703)$$

d'où

$$\sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}.$$

On peut simplifier cette formule en faisant le périmètre

$a+b+c = 2p$, d'où $a+b-c = 2(p-c)$ et $a-b+c = 2(p-b)$,

ce qui donne

$$\sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \qquad (b)$$

valeur facile à traduire littéralement.

$\frac{1}{2}$ A étant nécessairement aigu, son sinus donne sa valeur et par suite celle de A.

On aurait de même

$$\sin\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},$$

et

$$\sin\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}.$$

Mais on peut poser, ne serait-ce que comme vérification,

$$C = 180^\circ - (A + B).$$

On se procurerait par une marche semblable $\cos\frac{1}{2}A$ et $\tang\frac{1}{2}A$. Du reste, comme on a

$$\cos\frac{1}{2}A = \sqrt{1-\sin^2\frac{1}{2}A}, \qquad (1107)$$

remplaçant $\sin\frac{1}{2}A$ par sa valeur (b), on a

$$\cos\frac{1}{2}A = \sqrt{1-\frac{(p-b)(p-c)}{bc}};$$

ou, en réduisant au même dénominateur, effectuant les calculs et simplifiant,

$$\cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

On a ensuite (1107, 2°)

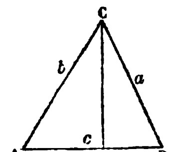
$$\tang\frac{1}{2}A = \frac{\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}A} = \frac{\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Comme pour les sinus, on obtiendrait des formules analogues pour les angles B et C.

La surface du triangle se calculerait au moyen de la formule du 3° du numéro suivant.

1132. *L'aire d'un triangle* peut s'exprimer en fonction, soit de deux côtés et de l'angle compris, soit d'un côté et des angles, soit des trois côtés.

Fig. 259.



1° On a, en désignant l'aire du triangle par S,

$$S = \frac{c \times CD}{2}. \qquad (692)$$

Remplaçant CD par sa valeur $b \sin A$ (1122), on a

$$S = \frac{bc \sin A}{2}. \qquad (a)$$

Ce qui montre que l'*aire d'un triangle est égale à la moitié du produit de deux côtés quelconques multiplié par le sinus de l'angle compris.*

2° Faisant $b = \frac{c \sin B}{\sin C}$ dans l'expression précédente (1123), on a

$$S = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C} = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin (A+B)}.$$

3° Ayant

$$\sin A = 2 \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A, \qquad (1114)$$

remplaçant $\sin \frac{1}{2} A$ et $\cos \frac{1}{2} A$ par leurs valeurs (1131), on a

$$\sin A = 2 \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2 c^2}}.$$

Substituant cette valeur de $\sin A$ dans l'équation (a), il vient

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Pour $a = 200^m$, $b = 180^m$ et $c = 170^m$, on a

$$S = \sqrt{275(275-200)(275-180)(275-170)} = 14343^{mq}.$$

APPLICATIONS.

1133. *Observations.* En trigonométrie, toutes les questions se ramènent à la détermination des triangles, ou mieux à celle des côtés et des angles de ces triangles.

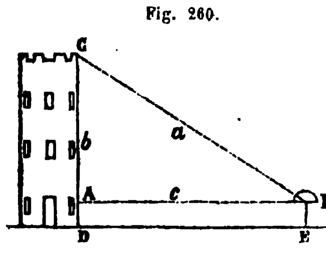
Sur le papier, une droite se trace avec une règle, et un angle se détermine avec le rapporteur (1042); mais pour la triangulation sur le terrain, ces moyens sont insuffisants.

Pour déterminer sur le sol une ligne droite passant par deux points désignés, on plante dans la direction de cette droite des piquets appelés *jalons*, de manière que quand on se place en un des points donnés, et qu'on fixe l'autre, tous les jalons paraissent se confondre en un seul et cachent ce dernier point (6ᵉ *partie*).

Pour mesurer les angles, soit sur le terrain, soit dans l'espace, on emploie divers instruments : le *graphomètre*, la *boussole*, le *cercle répétiteur*..... Nous donnons la description et l'usage de ces instruments dans la 6ᵉ partie (*Lever des plans*).

1134. *Trouver la hauteur* CD *d'un édifice dont le pied est accessible.*

Fig. 260.



Sur le terrain, supposé horizontal, on mesure une base DE à peu près égale à la hauteur de l'édifice afin d'éviter les trop petits angles, soit $DE = c = 10^m$; on place l'instrument en E pour évaluer l'angle B, que nous supposerons de 41°, et soit $BE = AD = 1^m,20$ la hauteur de l'instrument. Cela fait, le problème est ramené à déterminer le côté b du triangle rectangle ABC, dont on connaît le côté c et l'angle B. Or on

a (1122, corol.)

$$b = c \text{ tang B} = 10 \times \text{tang } 41° = 10 \times 0,86929 = 8^m,693;$$

donc $$CD = 8^m,693 + 1^m,20 = 9^m,893.$$

Dans le cas où le terrain n'est pas horizontal, un coup de niveau, si l'instrument à mesurer les angles n'est pas disposé à cet effet, donne le point A; par suite on a AD, que l'on ajoute à AC, qui se détermine comme dans le cas précédent.

1135. *Trouver la distance* AC *du point* A *où l'on est placé, au point inaccessible, mais visible,* C.

Fig. 261.

On mesure une base AB de 100 mètres, par exemple; puis, à l'aide du graphomètre, on détermine les angles A et B, soit A = 65° et B = 42°. Le problème est alors ramené à déterminer le côté b d'un triangle quelconque dont on connaît le côté c et les angles adjacents A et B (1128).

On a d'abord

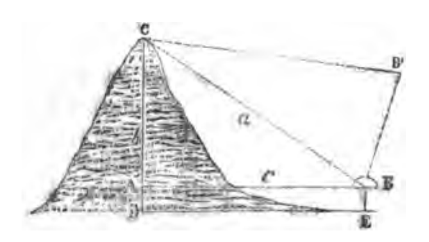
$$C = 180° - (A + B) = 180° - (65° + 42°) = 73°.$$

Puis $$\sin C : \sin B = c : b,$$

d'où $$b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{100 \times 0,669}{0,956} = 70^m.$$

1136. *Déterminer la hauteur d'un édifice dont le pied est inaccessible, ou d'une montagne.*

Fig. 262.



Dans ce cas, on ne peut, dans le triangle rectangle ABC, mesurer que l'angle B, qui est de 43 degrés par exemple, et cette donnée ne suffit pas pour calculer AC.

Alors on commence par déterminer la distance BC du point B, où l'on se trouve, au point C considéré comme inaccessible, en opérant comme dans le cas précédent. Ainsi on mesure une base BB' sur le sol, et on détermine les angles que fait cette base avec les directions BC et B'C; alors, dans le triangle BB'C, connaissant la base BB' et les angles adjacents, on détermine BC comme dans le cas précédent.

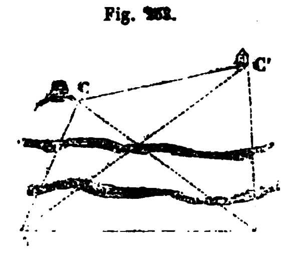
Ayant BC ou $a = 500^m$, par exemple, on a (1122)

$$b' = a \sin B = 500 \times 0{,}682 = 341^{m}.$$

et, par suite, $CD = 341 + 1{,}20 = 342^{m}{,}20.$

1137. *Trouver la distance de deux points inaccessibles C et C'.*

Fig. 282.



On détermine les distances AC et AC' du point A à chacun des points inaccessibles C et C', en opérant comme au n° 1135; puis, mesurant l'angle CAC', on a, dans le triangle CAC', les deux côtés AC, AC', et l'angle compris; on détermine alors le côté CC' comme il a été indiqué au n° 1130.

1° *Détermination de* AC. On mesure la base $AB = 100^{m}$, par exemple; puis l'angle $BAC = 66°$, et $ABC = 37°$; d'où $ACB = 180° - (66° + 37°) = 77°$. On a alors

$$\sin ACB : \sin ABC = AB : AC,$$

d'où
$$AC = \frac{AB \times \sin ABC}{\sin ACB} = \frac{100 \times 0{,}6018}{0{,}9744} = 61^{m}{,}76.$$

2° *Détermination de* AC'. On mesure les angles $BAC' = 37°$ et $ABC' = 87°$; d'où

$$AC'B = 180° - (37° + 87°) = 56°.$$

On a alors, dans le triangle ABC',

$$\sin AC'B : \sin ABC' = AB : AC',$$

d'où

$$AC' = \frac{AB \times \sin ABC'}{\sin AC'B} = \frac{100 \times 0{,}9986}{0{,}829} = 120^{m}{,}46.$$

3° *Détermination de l'angle* CAC'. Quand les quatre points ABCC' sont dans un même plan, on a $CAC' = BAC - BAC' = 66° - 37° = 29°$. Si ces quatre points n'étaient pas dans un même plan, on mesurerait directement cet angle.

4° *Détermination de* CC'. On a dans le triangle ACC' (1130)

$$CC' = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AC'}^2 - 2 \times AC \times AC' \times \cos CAC'},$$

ou

$$CC' = \sqrt{61{,}76^2 + 120{,}46^2 - 2 \times 61{,}76 \times 120{,}46 \times 0{,}87462} = 72^{m}{,}88.$$

On aurait pu déterminer CC' en suivant la marche 2° du n° 1130.

1138. *Table des valeurs naturelles des expressions trigonométriques, des angles successifs de minute en minute.*

0°

′	Sinus.	Cosinus.	Tangente.	Cotangente.	
0	0.0000000	1.0000000	0.0000000	Infinie.	60
1	0.0002909	0.9999996	0.0002909	3437.74667	59
2	05818	99998	05818	1718.87319	58
3	08727	99996	08727	1145.91530	57
4	11636	99993	11636	859.43630	56
5	14544	99989	14544	687.54887	55
6	17453	99984	17453	572.95721	54
7	20362	99979	20362	491.10600	53
8	23271	99973	23271	429.71757	52
9	26180	99966	26180	381.97099	51
10	29089	99958	29089	343.77371	50
11	0.0031998	0.9999949	0.0031998	312.52137	49
12	34906	99939	34907	286.47773	48
13	37815	99928	37816	264.44080	47
14	40724	99917	40725	245.55198	46
15	43633	99905	43633	229.18166	45
16	46542	99892	46542	214.85762	44
17	49451	99878	49451	202.21875	43
18	52360	99863	52360	190.98419	42
19	55268	99847	55269	180.93220	41
20	58177	99830	58178	171.88540	40
21	0.0061086	0.9999813	0.0061087	163.70019	39
22	63995	99795	63996	156.25918	38
23	66904	99776	66905	149.46501	37
24	69813	99756	69814	143.23712	36
25	72721	99736	72723	137.50745	35
26	75630	99714	75632	132.21851	34
27	78539	99692	78541	127.32134	33
28	81448	99668	81450	122.77396	32
29	84357	99644	84360	118.54018	31
30	87265	99619	87269	114.58865	30
31	0.0090174	0.9999593	0.0090178	110.89205	29
32	93083	99566	93087	107.42648	28
33	95992	99539	95996	104.17093	27
34	98900	99511	98905	101.10690	26
35	0.0101809	99482	0.0101814	98.217943	25
36	04718	99452	04723	95.489475	24
37	07627	99421	07633	92.908487	23
38	10535	99389	10542	90.463336	22
39	13444	99356	13451	88.143572	21
40	16353	99323	16361	85.939791	20
41	0.0119261	0.9999289	0.0119270	83.843507	19
42	22170	99254	22179	81.847041	18
43	25079	99218	25088	79.943430	17
44	27987	99181	27998	78.126342	16
45	30896	99143	30907	76.390009	15
46	33805	99104	33817	74.729165	14
47	36713	99065	36726	73.139991	13
48	39622	99025	39635	71.615070	12
49	42530	98984	42545	70.153346	11
50	45439	98942	45454	68.750087	10
51	0.0148348	0.9998899	0.0148364	67.401854	9
52	51256	98855	51273	66.105473	8
53	54165	98811	54183	64.858007	7
54	57073	98766	57093	63.656741	6
55	59982	98720	60002	62.499154	5
56	62890	98673	62912	61.382905	4
57	65799	98625	65821	60.305820	3
58	68707	98576	68731	59.265872	2
59	71616	98527	71641	58.261174	1
60	74524	98477	74551	57.289962	0
	Cosinus	Sinus.	Cotang.	Tangente.	′

89

1°

′	Sinus.	Cosinus.	Tangente.	Cotang.	
0	0.0174524	0.9998477	0.0174551	57.289962	60
1	77432	98426	77460	56.350590	59
2	80341	98374	80370	55.441517	58
3	83249	98321	83280	54.561330	57
4	86158	98267	86190	53.708587	56
5	89066	98212	89100	52.882109	55
6	91974	98157	92010	52.080673	54
7	94883	98101	94920	51.303157	53
8	97791	98044	97830	50.548506	52
9	0.0200699	97986	0.0200740	49.815726	51
10	03608	97927	03650	49.103881	50
11	0.0206516	0.9997867	0.0206560	48.412084	49
12	09424	97806	09470	47.739501	48
13	12332	97745	12380	47.085343	47
14	15241	97683	15291	46.448862	46
15	18149	97620	18201	45.829351	45
16	21057	97556	21111	45.226141	44
17	23965	97491	24021	44.638596	43
18	26873	97425	26932	44.066113	42
19	29781	97359	29842	43.508122	41
20	32690	97292	32753	42.964077	40
21	0.0235598	0.9997224	0.0235663	42.433464	39
22	38506	97155	38574	41.915790	38
23	41414	97085	41484	41.410588	37
24	44322	97014	44395	40.917412	36
25	47230	96943	47305	40.435837	35
26	50138	96871	50216	39.965460	34
27	53046	96798	53127	39.505895	33
28	55954	96724	56038	39.056771	32
29	58862	96649	58948	38.617738	31
30	61769	96573	61859	38.188459	30
31	0.0264677	0.9996496	0.0264770	37.768613	29
32	67585	96419	67681	37.357892	28
33	70493	96341	70592	36.956001	27
34	73401	96262	7350	36.562659	26
35	76309	96182	76414	36.177596	25
36	79216	96101	79325	35.800553	24
37	82124	96019	82236	35.431282	23
38	85032	95936	85148	35.069546	22
39	87940	95853	88059	34.715115	21
40	90847	95769	90970	34.367771	20
41	0.0293755	0,9995684	0.0293882	34.027303	19
42	96662	95598	96794	33.693509	18
43	99570	95511	99705	33.366194	17
44	0.0302478	95424	0.0302616	33.045173	16
45	05385	95336	05528	32.730264	15
46	08293	95247	08439	32.421295	14
47	11200	95157	11351	32.118099	13
48	14108	95066	14263	31.820516	12
49	17015	94974	17174	31.528392	11
50	19922	94881	20086	31.241577	10
51	0.0322830	0.9994788	0.0322998	0 959928	9
52	25737	94694	25910	30.683307	8
53	28644	94599	28822	30.411580	7
54	31552	94503	31734	30.144619	6
55	34459	94406	34646	29.882299	5
56	37366	94308	37558	29.624499	4
57	40273	94209	40471	29.371106	3
58	43181	94109	43383	29.122005	2
59	46088	94009	46295	28.877089	1
60	48995	93908	49208	28.636253	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	′

88°

2°

′	Sinus.	Cosinus.	Tangente.	Cotang.	
0	0.034899	0.999391	0.034921	28.636253	60
1	5190	9381	5212	28.399397	59
2	5481	9370	5503	28.166422	58
3	5772	9360	5795	27.937233	57
4	6062	9350	6086	27.711740	56
5	6353	9339	6377	27.489853	55
6	6644	9328	6668	27.271486	54
7	6934	9318	6960	27.056557	53
8	7225	9307	7251	26.844984	52
9	7516	9296	7542	26.636650	51
10	780·	9285	7834	26.431600	50
11	0.038097	0.999274	0.038125	26.2296 8	49
12	8388	9263	8416	26.030736	48
13	8678	9252	8707	25.834823	47
14	8969	9240	8999	25.641832	46
15	9259	9229	9290	25.451700	45
16	9550	9218	9581	25.264361	44
17	9841	9206	9873	25.079757	43
18	0.040132	9194	0.040164	24.897826	42
19	0422	9183	0456	24.718512	41
20	0713	9171	0747	24.541758	40
21	0.041004	0.999159	0.041038	24.367509	39
22	1294	9147	1330	24.195714	38
23	1585	9135	1621	24.026320	37
24	1876	9123	1912	23.859277	36
25	2166	9111	2204	23.694537	35
26	2457	9098	2495	23.532052	34
27	2748	9086	2787	23.371777	33
28	3038	9073	3078	23.213666	32
29	3329	9061	3370	23.057677	31
30	3619	9048	3661	22.903765	30
31	0.043910	0.999036	0.043952	22.751892	29
32	4201	9023	4244	22.602015	28
33	4491	9010	4535	22.454096	27
34	4782	8997	4827	22.308097	26
35	5072	8984	5118	22.163980	25
36	5363	8971	5410	22.021710	24
37	5654	8957	5701	21.881251	23
38	5944	8944	5993	21.742569	22
39	6235	8931	6284	21.605630	21
40	6525	8917	6576	21.470401	20
41	0.046816	0.998904	0.046867	21.336851	19
42	7106	8890	7159	21.204949	18
43	7397	8876	7450	21.074664	17
44	7688	8862	7742	20.945966	16
45	7978	8848	8033	20.818828	15
46	8269	8834	8325	20.693220	14
47	8559	8820	8617	20.569115	13
48	8850	8806	8908	20.446486	12
49	9140	8792	9200	20.325307	11
50	9431	8778	9491	20.205553	10
51	0.049721	0.998763	0.049783	20.087199	9
52	0.050012	8749	0.050075	19.970219	8
53	0302	8734	0366	19.854591	7
54	0593	8719	0658	19.740291	6
55	0883	8705	0950	19.627296	5
56	1174	8690	1241	19.515584	4
57	1464	8675	1533	19.405133	3
58	1755	8660	1824	19.295922	2
59	2045	8645	2116	19.187930	1
60	2336	8629	2408	19.081137	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	′

87°

3°

′	Sinus.	Cosinus.	Tangente	Cotang.	
0	0.052336	0.998629	0.052408	19.081137	60
1	2626	8614	2699	18.975523	59
2	2917	8599	2991	18.871068	58
3	3207	8584	3283	18.767754	57
4	3498	8568	3575	18.665562	56
5	3788	8552	3866	18.564473	55
6	4079	8537	4158	18.464471	54
7	4369	8521	4450	18.365537	53
8	4660	8505	4742	18.267654	52
9	4950	8489	5033	18.170807	51
10	5241	8473	5325	18.074977	50
11	0.055531	0.998457	0.055617	17.980150	49
12	5822	8441	5909	17.886310	48
13	6112	8425	6201	17.793442	47
14	6402	8408	6492	17.701529	46
15	6693	8392	6784	17.610559	45
16	6983	8375	7076	17.520516	44
17	7274	8359	7368	17.431385	43
18	7564	8342	7660	17.343155	42
19	7854	8325	7952	17.255809	41
20	8145	8308	8243	17.169337	40
21	0.058435	0.998291	0.058535	17.083723	39
22	8726	8274	8827	16.998957	38
23	9016	8257	9119	16.915025	37
24	9306	8240	9411	16.831915	36
25	9597	8223	9703	16.749614	35
26	9887	8205	9995	16.668112	34
27	0.060178	8188	0.060287	16.587396	33
28	0468	8170	0579	16.507455	32
29	0758	8153	0871	16.428279	31
30	1049	8135	1163	16.349856	30
31	0.061339	0.998117	0.061455	16.272174	29
32	1629	8099	1747	16.195225	28
33	1920	8081	2039	16.118998	27
34	2210	8063	2331	16.043482	26
35	2500	8045	2623	15.968667	25
36	2791	8027	2915	15.894545	24
37	3081	8008	3207	15.821104	23
38	3371	7990	3499	15.748337	22
39	3661	7972	3791	15.676233	21
40	3952	7953	4083	15.604784	20
41	0.064242	0.997934	0.064375	15.533981	19
42	4532	7916	4667	15.463814	18
43	4823	7897	4959	15.394276	17
44	5113	7878	5251	15.325358	16
45	5403	7859	5543	15.257052	15
46	5693	7840	5836	15.189349	14
47	5984	7821	6128	15.122242	13
48	6274	7801	6420	15.055725	12
49	6564	7782	6712	14.989784	11
50	6854	7763	7004	14.924417	10
51	0.067145	0.997743	0.067297	14.859615	9
52	7435	7724	7589	14.795372	8
53	7725	7704	7881	14.731679	7
54	8015	7684	8173	14.668529	6
55	8306	7664	8465	14.605916	5
56	8596	7644	8758	14.543833	4
57	8886	7624	9050	14.482273	3
58	9176	7604	9342	14.421230	2
59	9466	7584	9635	14.360696	1
60	9757	7564	9927	14.300666	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente	′

88°

4°						5°					
′	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.		′	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.06976	0.99756	0.06993	14.30067	60	0	0.08716	0.99619	0.08749	11.43005	60
1	0.07005	754	0.07022	24113	59	1	745	617	778	39189	59
2	034	752	051	18209	58	2	774	614	807	35397	58
3	063	750	080	12354	57	3	803	612	837	31630	57
4	092	748	110	06546	56	4	831	609	866	27889	56
5	121	746	139	00786	55	5	860	607	895	24171	55
6	150	744	168	13.95072	54	6	889	604	925	20478	54
7	179	742	197	89405	53	7	918	602	954	16809	53
8	208	740	227	83783	52	8	947	599	983	13164	52
9	237	738	256	78206	51	9	976	596	0.09013	09542	51
10	266	736	285	72674	50	10	0.09005	594	042	05943	50
11	0.07295	0.99734	0.07314	13.67186	49	11	0.09034	0.99591	0.09071	11.02367	49
12	324	731	344	61741	48	12	063	588	101	10.98815	48
13	353	729	373	56339	47	13	092	586	130	95285	47
14	382	727	402	50980	46	14	121	583	159	91778	46
15	411	725	431	45663	45	15	150	580	189	88292	45
16	440	723	461	40387	44	16	179	578	218	84829	44
17	469	721	490	35152	43	17	208	575	247	81387	43
18	498	719	519	29957	42	18	237	572	277	77967	42
19	527	716	548	24803	41	19	266	570	306	74569	41
20	556	714	578	19688	40	20	295	567	335	71191	40
21	0.07585	0.99712	0.07607	13.14613	39	21	0.09324	0.99564	0.09365	10.67835	39
22	614	710	636	09576	38	22	353	562	394	64199	38
23	643	708	665	04577	37	23	382	559	423	61184	37
24	672	705	695	12.99616	36	24	411	556	453	57890	36
25	701	703	724	94692	35	25	440	553	482	54615	35
26	730	701	753	89806	34	26	469	551	511	51361	34
27	759	699	782	84956	33	27	498	548	541	48126	33
28	788	696	812	80142	32	28	527	545	570	44911	32
29	817	694	841	75363	31	29	556	542	600	41716	31
30	846	692	870	70621	30	30	585	540	629	38540	30
31	0.07875	0.99689	0.07899	12.65913	29	31	0.09614	0.99537	0.09658	10.35383	29
32	904	687	929	61239	28	32	642	534	688	32245	28
33	933	685	958	56600	27	33	671	531	717	29126	27
34	962	683	987	51994	26	34	700	528	746	26025	26
35	991	680	0.08017	47422	25	35	729	526	776	22913	25
36	0.08020	678	046	42883	24	36	758	523	805	19879	24
37	049	676	075	38377	23	37	787	520	834	16833	23
38	078	673	104	33903	22	38	816	517	864	13805	22
39	107	671	134	29461	21	39	845	514	893	10795	21
40	136	668	163	25051	20	40	874	511	923	07803	20
41	0.08165	0.99666	0.08192	12.20672	19	41	0.09903	0.99508	0.09952	10.04828	19
42	194	664	222	16324	18	42	932	506	981	01871	18
43	223	661	251	12006	17	43	961	503	0.10011	9.98931	17
44	252	659	280	07719	16	44	990	500	040	96007	16
45	281	657	309	03462	15	45	0.10019	497	069	93101	15
46	310	654	339	11.99286	14	46	048	494	099	90211	14
47	339	652	368	95037	13	47	077	491	128	87338	13
48	368	649	397	90868	12	48	106	488	158	84482	12
49	397	647	427	86728	11	49	135	485	187	84641	11
50	426	644	456	82617	10	50	164	482	216	78817	10
51	0.08455	0.99642	0.08486	11.78538	9	51	0.10192	0.99479	0.10246	9.76009	9
52	484	639	514	74478	8	52	221	476	275	73217	8
53	513	637	544	70450	7	53	250	473	305	70441	7
54	542	635	573	66449	6	54	279	470	334	67680	6
55	571	632	602	62476	5	55	308	467	363	64935	5
56	600	630	632	58529	4	56	337	464	393	62205	4
57	629	627	661	54609	3	57	366	461	422	59490	3
58	658	624	690	50715	2	58	395	458	452	56791	2
59	687	622	720	46847	1	59	424	455	481	54106	1
60	716	619	749	43005	0	60	453	452	510	51436	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	′		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	′
				85°						84°	

6°

′	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.10453	0.99452	0.10510	9.51436	60
1	482	449	540	48781	59
2	511	446	569	46141	58
3	540	443	599	43515	57
4	569	440	628	40904	56
5	597	437	658	38307	55
6	626	434	687	35724	54
7	655	431	716	33155	53
8	684	428	746	30599	52
9	713	424	775	28058	51
10	742	421	805	25530	50
11	0.10771	0.99418	0.10834	9.23016	49
12	800	415	863	20516	48
13	829	412	893	18028	47
14	858	409	922	15554	46
15	887	406	952	13093	45
16	916	402	981	10646	44
17	945	399	0.11011	08211	43
18	973	396	040	05789	42
19	0.11002	393	070	03379	41
20	031	390	099	00983	40
21	0.11060	0.99386	0.11128	8.98598	39
22	089	383	158	96227	38
23	118	380	187	93867	37
24	147	377	217	91520	36
25	176	374	246	89185	35
26	205	370	276	86862	34
27	234	367	305	84551	33
28	263	364	335	82252	32
29	291	360	364	79964	31
30	320	357	394	77689	30
31	0.11349	0.99354	0.11423	8.75425	29
32	378	351	453	73172	28
33	407	347	482	70931	27
34	436	344	511	68701	26
35	465	341	541	66482	25
36	494	337	570	64275	24
37	523	334	600	62078	23
38	552	331	629	59893	22
39	580	327	659	57718	21
40	609	324	688	55555	20
41	0.11638	0.99320	0.11718	8.53402	19
42	667	317	747	51259	18
43	696	314	777	49128	17
44	725	310	806	47007	16
45	754	307	836	44896	15
46	783	303	865	42795	14
47	812	300	895	40705	13
48	840	297	924	38625	12
49	869	293	954	36555	11
50	898	290	983	34496	10
51	0.11927	0.99286	0.12013	8.32446	9
52	956	283	042	30406	8
53	985	279	072	28376	7
54	0.12014	276	101	26355	6
55	043	272	131	24345	5
56	071	269	160	22345	4
57	100	265	190	20352	3
58	129	262	219	18370	2
59	158	258	249	16398	1
60	187	255	278	14435	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	′

83°

7°

′	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.12187	0.99255	0.12278	8.14435	60
1	216	251	308	12481	59
2	245	248	338	10536	58
3	274	244	367	08600	57
4	302	240	397	06674	56
5	331	237	426	04756	55
6	360	233	456	02848	54
7	389	230	485	00948	53
8	418	226	515	7.99058	52
9	447	222	544	97176	51
10	476	219	574	95302	50
11	0.12504	0.99215	0.12603	7.93438	49
12	533	211	633	91582	48
13	562	208	662	89734	47
14	591	204	692	87895	46
15	620	200	722	86064	45
16	649	197	751	84242	44
17	678	193	781	82428	43
18	706	189	810	80622	42
19	735	186	840	78825	41
20	764	182	869	77035	40
21	0.12793	0.99178	0.12899	7.75254	39
22	822	175	929	73480	38
23	851	171	958	71715	37
24	880	167	988	69957	36
25	908	163	0.13017	68208	35
26	937	160	047	66466	34
27	966	156	076	64732	33
28	995	152	106	63005	32
29	0.13024	148	136	61287	31
30	053	144	165	59575	30
31	0.13081	0.99141	0.13195	7.57872	29
32	110	137	224	56176	28
33	139	133	254	54487	27
34	168	129	284	52806	26
35	197	125	313	51132	25
36	226	122	343	49465	24
37	254	118	372	47806	23
38	283	114	402	46154	22
39	312	110	432	44509	21
40	341	106	461	42871	20
41	0.13370	0.99102	0.13491	7.41240	19
42	399	098	520	39616	18
43	427	094	550	37999	17
44	456	091	580	36389	16
45	485	087	609	34786	15
46	514	083	639	33190	14
47	543	079	669	31600	13
48	572	075	698	30018	12
49	600	071	728	28442	11
50	629	067	758	26873	10
51	0.13658	0.99063	0.13787	7.25310	9
52	687	059	817	23754	8
53	716	055	847	22204	7
54	744	051	876	20661	6
55	773	047	906	19125	5
56	802	043	935	17594	4
57	831	039	965	16071	3
58	860	035	995	14553	2
59	889	031	0.14024	13042	1
60	917	027	054	11537	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	′

82°

8°

′	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.13917	0.99027	0.14054	7.11537	60
1	946	023	084	10038	59
2	975	019	113	08546	58
3	0.14004	015	143	07059	57
4	033	011	173	05579	56
5	061	006	202	41105	55
6	090	002	232	02637	54
7	119	0,98998	262	01174	53
8	148	994	291	6.99718	52
9	177	990	321	98268	51
10	205	986	351	96825	50
11	0.14234	0.98982	0.14381	6 95385	49
12	263	978	410	93952	48
13	292	973	440	92525	47
14	320	969	470	91104	46
15	349	965	499	89688	45
16	378	961	529	88278	44
17	407	957	559	86874	43
18	436	953	588	85475	42
19	464	948	618	84082	41
20	493	944	648	82694	40
21	0.14522	0.98940	0.14678	6.81312	39
22	551	936	707	79956	38
23	580	931	737	78564	37
24	608	927	767	77199	36
25	637	923	796	75838	35
26	666	919	826	74483	34
27	695	914	856	73133	33
28	723	910	886	71789	32
29	752	906	915	70450	31
30	781	902	945	69116	30
31	0.14810	0.98897	0.14975	6.67787	29
32	838	893	0.15005	66463	28
33	867	889	034	65144	27
34	896	884	064	63831	26
35	925	880	094	62523	25
36	954	876	124	61219	24
37	982	871	153	59921	23
38	0.15011	867	183	58627	22
39	040	863	213	57339	21
40	069	858	243	56055	20
41	0.15097	0.98854	0.15272	6 54777	19
42	126	849	302	53503	18
43	155	845	332	52234	17
44	184	841	362	50970	16
45	212	836	391	49710	15
46	241	832	421	48456	14
47	270	827	451	47206	13
48	299	823	481	45961	12
49	327	818	511	44720	11
50	356	814	540	43484	10
51	0.15385	0.98809	0.15570	6.42253	9
52	414	805	600	41026	8
53	442	800	630	39804	7
54	471	796	660	38587	6
55	500	791	689	37374	5
56	529	787	719	36165	4
57	557	782	749	34961	3
58	586	778	779	33761	2
59	615	773	809	32566	1
60	643	769	838	31375	0
	Cosinus	Sinus	Cotang	Tang	′

81°

9°

′	Sinus.	Cosinus	Tang.	Cotang.	
0	0.15643	0.98769	0.15838	6.31375	60
1	672	764	868	30189	59
2	701	760	898	29007	58
3	730	755	928	27829	57
4	758	751	958	26655	56
5	787	746	988	25486	55
6	816	741	0.16017	24321	54
7	845	737	047	23160	53
8	873	732	077	22003	52
9	902	728	107	20851	51
10	931	723	137	19703	50
11	0.15959	0.98718	0.16167	6.18559	49
12	988	714	196	17419	48
13	0.16017	709	226	16283	47
14	046	704	256	15151	46
15	074	700	286	14023	45
16	103	695	316	12899	44
17	132	690	346	11779	43
18	160	686	376	10664	42
19	189	681	406	09552	41
20	218	676	435	08444	40
21	0.16246	0.98671	0.16465	6 07340	39
22	275	667	495	06240	38
23	304	662	525	05143	37
24	333	657	555	04051	36
25	361	652	565	02962	35
26	390	648	615	01878	34
27	419	643	645	00797	33
28	447	638	674	5.99720	32
29	476	633	704	98646	31
30	505	629	734	97576	30
31	0.16533	0.98624	0.16764	5.96510	29
32	562	619	794	95448	28
33	591	614	824	94390	27
34	620	609	854	93335	26
35	648	604	884	92283	25
36	677	600	914	91235	24
37	706	595	944	90191	23
38	734	590	974	89151	22
39	763	585	0.17004	88114	21
40	792	580	033	87080	20
41	0 16820	0.98575	0.17063	5.86051	19
42	849	570	093	85024	18
43	878	565	123	84001	17
44	906	561	153	82982	16
45	935	556	183	81966	15
46	964	551	213	80953	14
47	992	546	243	79941	13
48	0.17021	541	273	78938	12
49	050	536	303	77936	11
50	078	531	333	76937	10
51	0.17107	0.98526	0.17363	5.75941	9
52	136	521	393	74949	8
53	164	516	423	73960	7
54	193	511	453	72974	6
55	222	506	483	71992	5
56	250	501	513	71013	4
57	279	496	543	70037	3
58	308	491	573	69061	2
59	336	486	603	68094	1
60	365	481	633	67128	0
	Cosinus	Sinus.	Cotang.	Tang.	′

80°

10°						11°					
′	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.		′	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang	
0	0 17365	0.98481	0.17633	5.67128	60	0	0.19081	0.98163	0.19438	5 14455	60
1	394	476	663	66165	59	1	109	157	468	13658	59
2	422	471	693	65205	58	2	138	152	498	1286	58
3	451	466	723	64248	57	3	167	146	529	12069	57
4	479	461	753	63295	56	4	195	140	559	112.9	56
5	508	455	683	62314	55	5	224	135	589	10490	55
6	537	450	813	61397	54	6	252	129	619	09704	54
7	565	445	843	60452	53	7	281	124	649	08921	53
8	594	440	873	59511	52	8	309	118	680	08139	52
9	623	435	903	58573	51	9	338	112	710	07360	51
10	654	430	933	57638	50	10	366	107	740	06584	50
11	0.17680	0.98425	0.17963	5.56706	49	11	0.19395	0 98101	0.19770	5.05809	49
12	708	420	993	55777	48	12	423	096	801	05037	48
13	737	414	0.18023	54851	47	13	452	090	831	04267	47
14	766	409	053	53927	46	14	480	084	861	03499	46
15	794	404	083	53007	45	15	509	079	891	02734	45
16	823	399	113	52090	44	16	538	073	921	01971	44
17	852	394	143	51176	43	17	566	067	952	01210	43
18	880	389	173	50264	42	18	595	061	982	00451	42
19	909	383	203	49356	41	19	623	056	0.20012	4.99695	41
20	937	378	233	48451	40	20	652	050	042	98940	40
21	0.17966	0.98373	0.18263	5.47548	39	21	0.19680	0.98044	0.20073	4 98188	39
22	995	368	293	46648	38	22	709	039	103	97438	38
23	0,18023	362	323	45751	37	23	737	033	133	96690	37
24	052	357	353	44857	36	24	766	027	164	95945	36
25	081	352	383	43966	35	25	794	021	194	95201	35
26	109	347	414	43077	34	26	823	016	224	94460	34
27	138	341	444	42192	33	27	851	010	254	93721	33
28	166	336	474	41309	32	28	880	004	285	92984	32
29	195	331	504	40429	31	29	908	0.97998	315	92249	31
30	224	325	534	39552	30	30	937	992	345	91516	30
31	0.18252	0.98320	0.18564	5.38677	29	31	0.19965	0.97987	0.20376	4 90785	29
32	281	315	594	37805	28	32	994	981	406	90056	28
33	309	310	624	36936	27	33	0.20022	975	436	89330	27
34	338	304	654	36070	26	34	051	969	466	88605	26
35	367	299	684	25206	25	35	079	963	497	87882	25
36	395	294	714	34345	24	36	108	958	527	87162	24
37	424	288	745	33487	23	37	136	952	557	86444	23
38	452	283	775	32631	22	38	165	946	588	85727	22
39	481	277	805	31778	21	39	193	940	618	85013	21
40	510	272	835	30928	20	40	222	934	648	84300	20
41	0.18538	0.98267	0.18865	5.30080	19	41	0.20250	0.97928	0.20679	4.83590	19
42	567	261	895	29235	18	42	279	922	709	82882	18
43	595	256	925	28393	17	43	307	916	739	82175	17
44	624	250	955	27553	16	44	336	910	770	81471	16
45	652	245	986	26715	15	45	364	905	800	80769	15
46	681	240	0,19016	25880	14	46	393	899	830	80068	14
47	710	234	046	25048	13	47	421	893	861	79370	13
48	738	229	076	24218	12	48	450	887	891	78673	12
49	767	223	106	23391	11	49	478	881	921	77978	11
50	795	218	136	22566	10	50	507	875	952	77286	10
51	0 18824	0.98212	0.19166	5.21744	9	51	0.20535	0.97869	0.20982	4.76595	9
52	852	207	197	20925	8	52	563	863	0.21013	75906	8
53	881	201	227	20107	7	53	592	857	043	75219	7
54	910	196	257	19293	6	54	620	851	073	74534	6
55	938	190	287	18480	5	55	649	845	104	73851	5
56	967	185	317	17671	4	56	677	839	134	73170	4
57	995	179	347	16863	3	57	706	833	164	72490	3
58	0 19024	174	378	16058	2	58	734	827	195	71813	2
59	052	168	408	15256	1	59	763	821	225	71137	1
60	081	163	438	14455	0	60	791	815	256	70463	9
	Cosinus.	Sinus	Cotang.	Tang.	′		Cosinus.	Sinus.	Cotang	Tang	′
				79°						78°	

12°

′	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.20791	0.97815	0.21256	4.70463	60
1	820	809	286	4.69791	59
2	848	803	316	9121	58
3	877	797	347	8452	57
4	905	790	377	7786	56
5	933	784	408	7121	55
6	962	778	438	6458	54
7	990	772	469	5797	53
8	0.21019	766	499	5138	52
9	047	760	529	4480	51
10	076	754	560	3825	50
11	0.21104	0.97748	0.21590	4.63171	49
12	132	742	621	2518	48
13	161	735	651	1868	47
14	189	729	682	1219	46
15	218	723	712	0572	45
16	246	717	743	4.59927	44
17	275	711	773	9283	43
18	303	705	804	8641	42
19	331	698	834	8001	41
20	360	692	864	7363	40
21	0.21388	0.97686	0.21895	4.56726	39
22	417	680	925	6091	38
23	445	673	956	5458	37
24	474	667	986	4826	36
25	502	661	0.22017	4196	35
26	530	655	047	3568	34
27	559	648	078	2941	33
28	587	642	108	2316	32
29	616	636	139	1693	31
30	644	630	169	1071	30
31	0.21672	0.97623	0.22200	4.50451	29
32	701	617	230	4.49832	28
33	729	611	261	9215	27
34	758	604	292	8600	26
35	786	598	322	7986	25
36	814	592	353	7374	24
37	843	585	383	6764	23
38	871	579	414	6155	22
39	899	573	444	5548	21
40	928	566	475	4942	20
41	0.21956	0.97560	0.22505	4.44338	19
42	985	553	536	3735	18
43	0.22013	547	567	3134	17
44	041	541	597	2534	16
45	070	534	628	1936	15
46	098	528	658	1340	14
47	126	521	689	0745	13
48	155	515	719	0152	12
49	183	508	750	4.39560	11
50	212	502	781	8969	10
51	0.22240	0.97496	0.22811	4.38381	9
52	268	489	842	7793	8
53	297	483	872	7207	7
54	325	476	903	6623	6
55	353	470	934	6040	5
56	382	463	964	5459	4
57	410	457	995	4879	3
58	438	450	0.23026	4300	2
59	467	444	056	3723	1
60	495	437	087	3148	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	′

77°

13°

′	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.22495	0.97437	0.23087	4.33148	60
1	523	430	117	2573	59
2	552	424	148	2001	58
3	580	417	179	1430	57
4	608	411	209	0860	56
5	637	404	240	0291	55
6	665	398	271	4.29724	54
7	693	391	301	9159	53
8	722	384	332	8595	52
9	750	378	363	8032	51
10	778	371	393	7471	50
11	0.22807	0.97365	0.23424	4.26911	49
12	835	358	455	6352	48
13	863	351	485	5795	47
14	892	345	516	5239	46
15	920	338	547	4685	45
16	948	331	578	4132	44
17	977	325	608	3580	43
18	0.23005	318	639	3030	42
19	033	311	670	2481	41
20	062	304	700	1933	40
21	0.23090	0.97298	0.23731	4.21387	39
22	118	291	762	0842	38
23	146	284	793	0298	37
24	175	278	823	4.19756	36
25	203	271	854	9215	35
26	231	264	885	8675	34
27	260	257	916	8137	33
28	288	251	946	7600	32
29	316	244	977	7064	31
30	345	237	0,24008	6530	30
31	0.23373	0.97230	0.24039	4.15997	29
32	401	223	069	5465	28
33	429	217	100	4934	27
34	458	210	131	4405	26
35	486	203	162	3877	25
36	514	196	193	3350	24
37	542	189	223	2825	23
38	571	182	254	2301	22
39	599	176	285	1778	21
40	627	169	316	1256	20
41	0.23656	0.97162	0.24347	4.10736	19
42	684	155	377	0216	18
43	712	148	408	4.09699	17
44	740	141	439	9182	16
45	769	134	470	8666	15
46	797	127	501	8152	14
47	825	120	532	7639	13
48	853	113	562	7127	12
49	882	106	593	6616	11
50	910	100	624	6107	10
51	0.23938	0.97093	0.24655	4.05599	9
52	966	086	686	5092	8
53	995	079	717	4586	7
54	0.24023	072	747	4081	6
55	051	065	778	3578	5
56	079	058	809	3076	4
57	108	051	840	2574	3
58	136	044	871	2074	2
59	164	037	902	1576	1
60	192	030	933	1078	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	′

76°

14° | 15°

'	Sinus	Cosinus.	Tang.	Cotang.		'	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	'
0	0.24192	0.97030	0.24933	4.01078	60	0	0.25882	0.96593	0.26795	3.73205	60
1	220	023	964	0582	59	1	910	585	826	2771	59
2	249	015	995	0086	58	2	938	578	857	2338	58
3	277	008	0.25026	3.99592	57	3	966	570	888	1907	57
4	305	001	056	9099	56	4	994	562	920	1476	56
5	333	0.96994	087	8607	55	5	0.26022	555	951	1046	55
6	361	987	118	8117	54	6	050	547	982	0616	54
7	390	980	149	7627	53	7	079	540	0.27013	0188	53
8	418	973	180	7139	52	8	107	532	044	3.69761	52
9	446	966	211	6651	51	9	135	524	076	9335	51
10	474	959	242	6165	50	10	163	517	107	8909	50
11	0.24503	0.96952	0.25273	3.95680	49	11	0.26191	0.96509	0.27138	3.68485	49
12	531	945	304	5196	48	12	219	502	169	8061	48
13	559	937	335	4713	47	13	247	494	201	7638	47
14	587	930	366	4232	46	14	275	486	232	7217	46
15	615	923	397	3751	45	15	303	479	263	6796	45
16	644	916	428	3271	44	16	331	471	294	6376	44
17	672	909	459	2793	43	17	359	463	326	5957	43
18	700	902	490	2316	42	18	387	456	357	5538	42
19	728	894	521	1839	41	19	415	448	388	5121	41
20	756	887	552	1364	40	20	443	440	419	4705	40
21	0.24784	0.96880	0.25583	3.90890	39	21	0.26471	0.96433	0.27451	3.64289	39
22	813	873	614	0417	38	22	500	425	482	3874	38
23	841	866	645	3.89945	37	23	528	417	513	3461	37
24	869	859	676	9474	36	24	556	410	545	3048	36
25	897	851	707	9004	35	25	584	402	576	2636	35
26	925	844	738	8536	34	26	612	394	607	2224	34
27	953	837	769	8068	33	27	640	386	638	1814	33
28	982	829	800	7601	32	28	668	379	670	1405	32
29	0.25010	822	831	7136	31	29	696	371	701	0996	31
30	038	815	862	6671	30	30	724	363	732	0588	30
31	0.25066	0.96807	0.25893	3.86208	29	31	0.26752	0.96355	0.27764	3.60181	29
32	094	800	924	5745	28	32	780	347	795	3.59775	28
33	122	793	955	5284	27	33	808	340	826	9370	27
34	151	786	986	4824	26	34	836	332	858	8966	26
35	179	778	0.26017	4364	25	35	864	324	889	8562	25
36	207	771	048	3906	24	36	892	316	920	8160	24
37	235	764	079	3449	23	37	920	308	952	7758	23
38	263	756	110	2992	22	38	948	301	983	7357	22
39	291	749	141	2537	21	39	976	293	0.28015	6957	21
40	320	742	172	2083	20	40	0.27004	285	046	6557	20
41	0.25348	0.96734	0.26203	3.81630	19	41	0.27032	0.96277	0.28077	3.56159	19
42	376	727	235	1177	18	42	060	269	109	5761	18
43	404	719	266	0726	17	43	088	261	140	5364	17
44	432	712	297	0276	16	44	116	253	172	4968	16
45	460	705	328	3.79827	15	45	144	246	203	4573	15
46	488	697	359	9378	14	46	172	238	234	4179	14
47	516	690	390	8931	13	47	200	230	266	3785	13
48	545	682	421	8485	12	48	228	222	297	3393	12
49	573	675	452	8040	11	49	256	214	329	3001	11
50	601	667	483	7595	10	50	284	206	360	2609	10
51	0.25629	0.96660	0.26515	3.77152	9	51	0.27312	0.96198	0.28391	3.52219	9
52	657	653	546	6709	8	52	340	190	423	1829	8
53	685	645	577	6268	7	53	368	182	454	1441	7
54	713	638	608	5828	6	54	396	174	486	1053	6
55	741	630	639	5388	5	55	424	166	517	0666	5
56	769	623	670	4950	4	56	452	158	549	0279	4
57	798	615	701	4512	3	57	480	150	580	3.49894	3
58	826	608	733	4075	2	58	508	142	612	9509	2
59	854	600	764	3640	1	59	536	134	643	9125	1
60	882	593	795	3205	0	60	564	126	675	8741	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	'		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	'

75° | 74°

16°

′	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.27564	0.96126	0.28675	3.48741	60
1	592	118	706	8359	59
2	620	110	738	7977	58
3	648	102	769	7595	57
4	676	094	800	7216	56
5	704	086	832	6837	55
6	731	078	864	6458	54
7	759	070	895	6080	53
8	787	062	927	5703	52
9	815	054	958	5327	51
10	843	046	990	4951	50
11	0.27871	0.96037	0.29021	3.44576	49
12	899	029	053	4202	48
13	927	021	084	3829	47
14	955	013	116	3456	46
15	983	005	147	3084	45
16	0.28011	0.95997	179	2713	44
17	039	989	210	2343	43
18	067	981	242	1973	42
19	095	972	274	1604	41
20	123	964	305	1236	40
21	0.28150	0.95956	0.29337	3.40869	39
22	178	948	368	0502	38
23	206	940	400	0136	37
24	234	931	432	3.39771	36
25	262	923	463	9406	35
26	290	915	495	9042	34
27	318	907	526	8679	33
28	346	898	558	8317	32
29	374	890	590	7955	31
30	402	882	621	7594	30
31	0 28429	0.95874	0.29653	3.37234	29
32	457	865	685	6875	28
33	485	857	716	6516	27
34	513	849	748	6158	26
35	541	841	780	5800	25
36	569	832	811	5443	24
37	597	824	843	5087	23
38	625	816	875	4732	22
39	652	807	906	4377	21
40	680	799	938	4023	20
41	0.28708	0.95791	0.29970	3.33670	19
42	736	782	0.30001	3317	18
43	764	774	033	2965	17
44	792	766	065	2614	16
45	820	757	097	2264	15
46	847	749	128	1914	14
47	875	740	160	1565	13
48	903	732	192	1216	12
49	931	724	224	0868	11
50	959	715	255	0521	10
51	0.28987	0.95707	0.30287	3.30174	9
52	0.29015	698	319	3.29829	8
53	042	690	351	9483	7
54	070	681	382	9139	6
55	098	673	414	8795	5
56	126	664	446	8452	4
57	154	656	478	8109	3
58	182	647	509	7767	2
59	209	639	541	7426	1
60	237	630	573	7085	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	′

73°

17°

′	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.29237	0.95630	0.30573	3.27085	60
1	265	622	605	6745	59
2	293	613	637	6406	58
3	321	605	669	6067	57
4	348	596	700	5729	56
5	376	588	732	5392	55
6	404	579	764	5055	54
7	432	571	796	4719	53
8	460	562	828	4383	52
9	487	554	860	4048	51
10	515	545	891	3714	50
11	0.29543	0.95536	0.30923	3.23381	49
12	571	528	955	3048	48
13	599	519	987	2715	47
14	626	511	0.31019	2384	46
15	654	502	051	2053	45
16	682	493	083	1722	44
17	710	485	115	1392	43
18	737	476	147	1063	42
19	765	467	178	0734	41
20	793	459	210	0406	40
21	0.29821	0.95450	0.31242	3.20079	39
22	849	441	274	3.19752	38
23	876	433	306	9426	37
24	904	424	338	9100	36
25	932	415	370	8775	35
26	960	407	402	8451	34
27	987	398	434	8127	33
28	0.30015	389	466	7801	32
29	043	380	498	7481	31
30	071	372	530	7159	30
31	0.30098	0.95363	0.31562	3.16838	29
32	126	354	594	6517	28
33	154	345	626	6197	27
34	182	337	658	5877	26
35	209	328	690	5558	25
36	237	319	722	5240	24
37	265	310	754	4922	23
38	292	301	786	4605	22
39	320	293	818	428	21
40	348	284	850	3972	20
41	0.30376	0.95275	0.31882	3.13656	19
42	403	266	914	3341	18
43	431	257	946	3027	17
44	459	248	978	2713	16
45	486	240	0.32010	2400	15
46	514	231	042	2087	14
47	542	222	074	1775	13
48	570	213	107	1464	12
49	597	204	139	1153	11
50	625	195	171	0842	10
51	0.30653	0.95186	0.32203	3.10532	9
52	680	177	235	0223	8
53	708	168	267	3 09914	7
54	736	159	299	9606	6
55	763	150	331	9298	5
56	791	142	363	8991	4
57	819	133	396	8685	3
58	846	124	428	8379	2
59	874	115	460	8073	1
60	902	106	492	7768	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	′

72°

18°

'	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.30902	0.95106	0.32492	3.07768	60
1	929	097	524	7454	59
2	957	088	556	7160	58
3	985	079	588	6857	57
4	0.31012	070	621	6554	56
5	040	061	653	6252	55
6	068	052	685	5950	54
7	095	043	717	5649	53
8	123	033	749	5349	52
9	151	024	782	5049	51
10	178	015	814	4749	50
11	0.31206	0.95006	0.32846	3.04450	49
12	233	0.94997	878	4152	48
13	261	988	911	3854	47
14	289	979	943	3556	46
15	316	970	975	3260	45
16	344	961	0.33007	2963	44
17	372	952	040	2667	43
18	399	943	072	2372	42
19	427	933	104	2077	41
20	454	924	136	1783	40
21	0.31482	0.94915	0.33169	3.01489	39
22	510	906	201	1196	38
23	537	897	233	0903	37
24	565	888	266	0611	36
25	592	878	298	0319	35
26	620	869	330	0028	34
27	648	860	363	2.99738	33
28	675	851	395	9447	32
29	703	842	427	9158	31
30	730	832	460	8869	30
31	0.31758	0.94823	0.33492	2.98580	29
32	786	814	524	8292	28
33	813	805	557	8004	27
34	841	795	589	7717	26
35	868	786	621	7430	25
36	896	777	654	7144	24
37	923	768	686	6858	23
38	951	758	718	6573	22
39	979	749	751	6288	21
40	0.32006	740	783	6004	20
41	0.32034	0.94730	0.33816	2.95720	19
42	061	721	848	5437	18
43	089	712	881	5155	17
44	116	702	913	4872	16
45	144	693	945	4590	15
46	171	684	978	4309	14
47	199	674	0.34010	4028	13
48	227	665	043	3748	12
49	254	656	075	3468	11
50	282	646	108	3189	10
51	0.32309	0.94637	0.34140	2.92910	9
52	337	627	173	2632	8
53	364	618	205	2354	7
54	392	609	238	2076	6
55	419	599	270	1799	5
56	447	590	303	1523	4
57	474	580	335	1246	3
58	502	571	368	0971	2
59	529	561	400	0696	1
60	557	552	433	0421	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	'

71°

19°

'	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.32557	0.94552	0.34433	2.90421	60
1	584	542	465	0147	59
2	612	533	498	2.89873	58
3	639	523	530	9600	57
4	667	514	563	9327	56
5	694	504	596	9055	55
6	722	495	628	8783	54
7	749	485	661	8511	53
8	777	476	693	8240	52
9	804	466	726	7970	51
10	832	457	758	7700	50
11	0.32859	0.94447	0.34791	2.87430	49
12	887	438	824	7161	48
13	914	428	856	6892	47
14	942	418	889	6624	46
15	969	409	922	6356	45
16	997	399	954	6089	44
17	0.33024	390	987	5822	43
18	051	380	0.35019	5555	42
19	079	370	052	5289	41
20	106	361	085	5023	40
21	0.33134	0.94351	0.35117	2.84758	39
22	161	342	150	4494	38
23	189	332	183	4229	37
24	216	322	216	3965	36
25	244	313	248	3702	35
26	271	303	281	3439	34
27	298	293	314	3176	33
28	326	284	346	2914	32
29	353	274	379	2653	31
30	381	264	412	2391	30
31	0.33408	0.94254	0.35445	2.82130	29
32	436	245	477	1870	28
33	463	235	510	1610	27
34	490	225	543	1350	26
35	518	215	576	1091	25
36	545	206	608	0833	24
37	573	196	641	0574	23
38	600	186	674	0316	22
39	627	176	707	0059	21
40	655	167	740	2.79802	20
41	0.33682	0.94157	0.35772	2.79545	19
42	710	147	805	9289	18
43	737	137	838	9033	17
44	764	127	871	8778	16
45	792	118	904	8523	15
46	819	108	937	8269	14
47	846	098	969	8014	13
48	874	088	0.36002	7761	12
49	901	078	035	7507	11
50	929	068	068	7254	10
51	0.33956	0.94058	0.36101	2.77002	9
52	983	049	134	6750	8
53	0.34011	039	167	6498	7
54	038	029	199	6247	6
55	065	019	232	5996	5
56	093	009	265	5746	4
57	120	0.93999	298	5496	3
58	147	989	331	5246	2
59	175	979	364	4997	1
60	202	969	397	4748	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	'

70°

20°

′	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.34202	0.93969	0.36397	2.74748	60
1	229	959	430	4499	59
2	257	949	463	4251	58
3	284	939	496	4004	57
4	311	929	529	3756	56
5	339	919	562	3509	55
6	366	909	595	3263	54
7	393	899	628	3017	53
8	421	889	661	2771	52
9	448	879	694	2526	51
10	475	869	727	2281	50
11	0.34502	0.93859	0.36760	2.72036	49
12	530	849	793	1792	48
13	557	839	826	1548	47
14	584	829	859	1305	46
15	612	819	892	1062	45
16	639	809	925	0819	44
17	666	799	958	0577	43
18	694	789	991	0335	42
19	721	779	0.37024	0094	41
20	748	769	057	2.69853	40
21	0.34775	0.93759	0.37090	2.69612	39
22	803	748	123	9371	38
23	830	738	157	9131	37
24	857	728	190	8892	36
25	884	718	223	8653	35
26	912	708	256	8414	34
27	939	698	289	8175	33
28	966	688	322	7937	32
29	993	677	355	7700	31
30	0.35021	667	388	7462	30
31	0.35048	0.93657	0.37422	2.67225	29
32	075	647	455	6989	28
33	102	637	488	6752	27
34	130	626	521	6516	26
35	157	616	554	6281	25
36	184	606	588	6046	24
37	211	596	621	5811	23
38	239	585	654	5576	22
39	266	575	687	5342	21
40	293	565	720	5109	20
41	0.35320	0.93555	0.37754	2.64875	19
42	347	544	787	4642	18
43	375	534	820	4410	17
44	402	524	853	4177	16
45	429	514	887	3945	15
46	456	503	920	3714	14
47	483	493	953	3483	13
48	511	483	986	3252	12
49	538	472	0.38020	3021	11
50	565	462	053	2791	10
51	0.35592	0.93452	0.38086	2.62561	9
52	619	441	120	2332	8
53	647	431	153	2103	7
54	674	420	186	1874	6
55	701	410	220	1646	5
56	728	400	253	1418	4
57	755	389	286	1190	3
58	782	379	320	0963	2
59	810	368	353	0736	1
60	837	358	386	0509	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	′

69°

21°

′	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.35837	0.93358	0.38386	2.60509	60
1	864	348	420	0283	59
2	891	337	453	0057	58
3	918	327	487	2.59831	57
4	945	316	520	9606	56
5	973	306	553	9381	55
6	0.36000	295	587	9156	54
7	027	285	620	8932	53
8	054	274	654	8708	52
9	081	264	687	8484	51
10	108	253	721	8261	50
11	0.36135	0.93243	0.38754	2.58038	49
12	162	232	787	7815	48
13	190	222	821	7593	47
14	217	211	854	7371	46
15	244	201	888	7150	45
16	271	190	921	6928	44
17	298	180	955	6707	43
18	325	169	988	6487	42
19	352	159	0.39022	6266	41
20	379	148	055	6046	40
21	0.36406	0.93137	0.39089	2.55827	39
22	433	127	122	5608	38
23	461	116	156	5389	37
24	488	106	190	5170	36
25	515	095	223	4952	35
26	542	084	257	4734	34
27	569	074	290	4516	33
28	596	063	324	4299	32
29	623	052	357	4082	31
30	650	042	391	3865	30
31	0.36677	0.93031	0.39425	2.53648	29
32	704	020	458	3432	28
33	731	010	492	3217	27
34	758	0.92999	525	3001	26
35	785	988	559	2786	25
36	812	978	593	2571	24
37	839	967	626	2357	23
38	867	956	660	2142	22
39	894	945	694	1929	21
40	921	935	727	1715	20
41	0.36948	0.92924	0.39761	2.51502	19
42	975	913	795	1289	18
43	0.37002	902	829	1076	17
44	029	892	862	0864	16
45	056	881	896	0652	15
46	083	870	930	0440	14
47	110	859	963	0229	13
48	137	849	997	0018	12
49	164	838	0.40031	2.49807	11
50	191	827	065	9597	10
51	0.37218	0.92816	0.40098	2.49386	9
52	245	805	132	9177	8
53	272	794	166	8967	7
54	299	784	200	8758	6
55	326	773	234	8549	5
56	353	762	267	8340	4
57	380	751	301	8132	3
58	407	740	335	7924	2
59	434	729	369	7716	1
60	461	718	403	7509	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	′

68°

22°

'	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.37461	0.92718	0.40403	2.47509	60
1	488	707	436	7302	59
2	515	697	470	7095	58
3	542	686	504	6888	57
4	569	675	538	6682	56
5	595	664	572	6476	55
6	622	653	606	6270	54
7	649	642	640	6065	53
8	676	631	674	5860	52
9	703	620	707	5655	51
10	730	609	741	5451	50
11	0.37757	0.92598	0.40775	2.45246	49
12	784	587	809	5043	48
13	811	576	843	4839	47
14	838	565	877	4636	46
15	865	554	911	4433	45
16	892	543	945	4230	44
17	919	532	979	4027	43
18	946	521	0.41013	3825	42
19	973	510	047	3623	41
20	999	499	081	3422	40
21	0.38026	0.92488	0.41115	2.43220	39
22	053	477	149	3019	38
23	080	466	183	2819	37
24	107	455	217	2618	36
25	134	444	251	2418	35
26	161	432	285	2218	34
27	188	421	319	2019	33
28	215	410	353	1819	32
29	241	399	387	1620	31
30	268	388	421	1422	30
31	0.38295	0.92377	0.41455	2.41223	29
32	322	366	490	1025	28
33	349	355	524	0827	27
34	376	343	558	0629	26
35	403	332	592	0432	25
36	430	321	626	0235	24
37	456	310	660	0038	23
38	483	299	694	2.39841	22
39	510	287	728	9645	21
40	537	276	763	9449	20
41	0.38564	0.92265	0.41797	2.39253	19
42	591	254	831	9058	18
43	617	243	865	8863	17
44	644	231	899	8668	16
45	671	220	933	8473	15
46	698	209	968	8279	14
47	725	198	0.42002	8084	13
48	752	186	036	7891	12
49	778	175	070	7697	11
50	805	164	105	7504	10
51	0.38832	0.92152	0.42139	2.37311	9
52	859	141	173	7118	8
53	886	130	207	6925	7
54	912	119	242	6733	6
55	939	107	276	6541	5
56	966	096	310	6349	4
57	993	085	345	6158	3
58	0.39020	073	379	5967	2
59	046	062	413	5776	1
60	073	050	447	5585	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	'

67°

23°

'	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.39073	0.92050	0.42447	2.35585	60
1	100	039	482	5395	59
2	127	028	516	5205	58
3	153	016	551	5015	57
4	180	005	585	4825	56
5	207	0.91994	619	4636	55
6	234	982	654	4447	54
7	260	971	688	4258	53
8	287	959	722	4069	52
9	314	948	757	3881	51
10	341	936	791	3693	50
11	0.39368	0.91925	0.42826	2.33505	49
12	394	914	860	3317	48
13	421	902	894	3130	47
14	448	891	929	2943	46
15	474	879	963	2756	45
16	501	868	998	2570	44
17	528	856	0.43032	2383	43
18	555	845	067	2197	42
19	581	833	101	2012	41
20	608	822	136	1826	40
21	0.39635	0.91810	0.43170	2.31641	39
22	661	799	205	1456	38
23	688	787	239	1271	37
24	715	775	274	1086	36
25	741	764	308	0902	35
26	768	752	343	0718	34
27	795	741	378	0534	33
28	822	729	412	0351	32
29	848	718	447	0167	31
30	875	706	481	2.29984	30
31	0.39902	0.91694	0.43516	2.29801	29
32	928	683	550	9619	28
33	955	671	585	9437	27
34	982	660	620	9254	26
35	0.40008	648	654	9073	25
36	035	636	689	8891	24
37	062	625	724	8710	23
38	088	613	758	8528	22
39	115	601	793	8348	21
40	141	590	828	8167	20
41	0.40168	0.91578	0.43862	2.27987	19
42	195	566	897	7806	18
43	221	555	932	7626	17
44	248	543	966	7447	16
45	275	531	0.44001	7267	15
46	301	519	036	7088	14
47	328	508	071	6909	13
48	355	496	105	6730	12
49	381	484	140	6552	11
50	408	472	175	6374	10
51	0.40434	0.91461	0.44210	2.26196	9
52	461	449	244	6018	8
53	488	437	279	5840	7
54	514	425	314	5663	6
65	541	414	349	5486	5
56	567	402	384	5309	4
57	594	390	418	5132	3
58	621	378	453	4956	2
59	647	366	488	4780	1
60	674	355	523	4604	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	'

66°

24°

'	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.40674	0.91355	0.44523	2.24604	60
1	700	343	558	4428	59
2	727	331	593	4252	58
3	753	319	627	4077	57
4	780	307	662	3902	56
5	806	295	697	3727	55
6	833	283	732	3553	54
7	860	272	767	3378	53
8	886	260	802	3204	52
9	913	248	837	3030	51
10	939	236	872	2857	50
11	0.40966	0.91224	0.44907	2.22683	49
12	992	212	942	2510	48
13	0.41019	200	977	2337	47
14	045	188	0.45012	2164	46
15	072	176	047	1992	45
16	098	164	082	1819	44
17	125	152	117	1647	43
18	151	140	152	1475	42
19	178	128	187	1304	41
20	205	116	222	1132	40
21	0.41231	0.91104	0.45257	2.20961	39
22	257	092	292	0790	38
23	284	080	327	0619	37
24	310	068	362	0449	36
25	337	056	397	0278	35
26	363	044	432	0108	34
27	390	032	467	2.19938	33
28	416	020	502	9769	32
29	443	008	538	9599	31
30	469	0.90996	573	9430	30
31	0.41496	0.90984	0.45608	2.19261	29
32	522	972	643	9092	28
33	549	960	678	8923	27
34	575	948	713	8755	26
35	602	936	748	8587	25
36	628	924	784	8419	24
37	655	911	819	8251	23
38	681	899	854	8084	22
39	707	887	889	7916	21
40	734	875	924	7749	20
41	0.41760	0.90863	0.45960	2.17582	19
42	787	851	995	7416	18
43	813	839	0.46030	7249	17
44	840	826	065	7083	16
45	866	814	101	6917	15
46	892	802	136	6751	14
47	919	790	171	6585	13
48	945	778	206	6420	12
49	972	766	242	6255	11
50	998	753	277	6090	10
51	0.42024	0.90741	0.46312	2.15925	9
52	051	729	348	5760	8
53	077	717	383	5596	7
54	104	704	418	5432	6
55	130	692	454	5268	5
56	156	680	489	5104	4
57	183	668	525	4940	3
58	209	655	560	4777	2
59	235	643	595	4614	1
60	262	631	631	4451	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	'

25°

'	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.42262	0.90631	0.46631	2.14451	60
1	288	618	666	4288	59
2	315	606	702	4125	58
3	341	594	737	3963	57
4	367	582	773	3801	56
5	394	569	808	3639	55
6	420	557	843	3477	54
7	446	545	879	3316	53
8	473	532	914	3154	52
9	499	520	950	2993	51
10	525	507	985	2832	50
11	0.42552	0.90495	0.47021	2.12671	49
12	578	483	056	2511	48
13	604	470	092	2350	47
14	631	458	128	2190	46
15	657	416	163	2030	45
16	683	433	199	1871	44
17	709	421	231	1711	43
18	736	408	270	1552	42
19	762	396	305	1392	41
20	788	383	341	1233	40
21	0.42815	0.90371	0.47377	2.11075	39
22	841	358	412	0916	38
23	867	346	448	0758	37
24	894	334	483	0600	36
25	920	321	519	0441	35
26	946	309	555	0284	34
27	972	296	590	0126	33
28	999	284	626	2.09969	32
29	0.43025	271	662	9811	31
30	051	259	698	9654	30
31	0.43077	0.90246	0.47733	2.09498	29
32	104	233	769	9341	28
33	130	221	805	9186	27
34	156	208	840	9030	26
35	182	196	876	8872	25
36	209	183	912	8716	24
37	235	171	948	8560	23
38	261	158	984	8405	22
39	287	116	0.48019	8250	21
40	313	133	055	8094	20
41	0.43340	0.90120	0.48091	2.07939	19
42	366	108	127	7785	18
43	392	095	163	7630	17
44	418	082	198	7476	16
45	445	070	234	7321	15
46	471	057	270	7167	14
47	497	045	306	7014	13
48	523	032	342	6860	12
49	519	019	378	6706	11
50	575	007	414	6553	10
51	0.43602	0.89994	0.48450	2.06400	9
52	628	981	486	6247	8
53	654	968	521	6094	7
54	680	956	557	5942	6
55	706	943	593	5790	5
56	732	930	629	5637	4
57	759	918	665	5485	3
58	785	905	701	5333	2
59	811	892	737	5182	1
60	837	879	773	5030	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	'

64°

26°

'	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang	
0	0.43837	0.89879	0.48773	2.05030	60
1	863	867	809	4875	59
2	889	854	845	4728	58
3	916	841	881	4577	57
4	942	828	917	4426	56
5	968	816	953	4276	55
6	994	803	989	4125	54
7	0.44020	790	0.49026	3975	53
8	046	777	062	3825	52
9	072	764	098	3675	51
10	098	752	134	3526	50
11	0.44124	0.89739	0.49170	2.03376	49
12	151	726	206	3227	48
13	177	713	242	3078	47
14	203	700	278	2929	46
15	229	687	315	2780	45
16	255	674	351	2631	44
17	281	662	387	2483	43
18	307	649	423	2335	42
19	333	636	459	2187	41
20	359	623	495	2039	40
21	0.44385	0.89610	0.49532	2.01891	39
22	411	597	568	1743	38
23	437	584	604	1596	37
24	464	571	640	1449	36
25	490	558	677	1302	35
26	516	545	713	1155	34
27	542	532	749	1008	33
28	568	519	786	0862	32
29	594	506	822	0715	31
30	620	493	858	0569	30
31	0.44646	0.89480	0.49894	2.00423	29
32	672	467	931	0277	28
33	698	454	967	0131	27
34	724	441	0.50004	1.99986	26
35	750	428	040	9841	25
36	776	415	076	9695	24
37	802	402	113	9550	23
38	828	389	149	9406	22
39	854	376	185	9261	21
40	880	363	222	9116	20
41	0.44906	0.89350	0.50258	1.98972	19
42	932	337	295	8828	18
43	958	324	331	8684	17
44	984	311	368	8540	16
45	0.45010	298	404	8396	15
46	036	285	441	8253	14
47	062	272	477	8110	13
48	088	259	514	7966	12
49	114	245	550	7823	11
50	140	232	587	7680	10
51	0.45166	0.89219	0.50623	1.97538	9
52	192	206	660	7395	8
53	218	193	696	7253	7
54	243	180	733	7111	6
55	269	167	769	6969	5
56	295	153	806	6827	4
57	321	140	843	6685	3
58	347	127	879	6544	2
59	373	114	916	6402	1
60	399	101	953	6261	0
	Cosinus	Sinus.	Cotang.	Tang.	'

63°

27°

'	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang	
0	0.45399	0.89101	0.50953	1.96261	60
1	425	087	989	6120	59
2	451	074	0.51026	5979	58
3	477	061	063	5838	57
4	503	048	099	5698	56
5	529	035	136	5557	55
6	554	021	173	5417	54
7	580	008	209	5277	53
8	606	0.88995	246	5137	52
9	632	981	283	4997	51
10	658	968	319	4858	50
11	0.45684	0.88955	0.51356	1.94718	49
12	710	942	393	4579	48
13	736	928	430	4410	47
14	762	915	467	4301	46
15	787	902	503	4162	45
16	813	888	540	4023	44
17	839	875	577	3885	43
18	865	862	614	3746	42
19	891	848	651	3608	41
20	917	835	688	3470	40
21	0.45942	0.88822	0.51724	1.93332	39
22	968	808	761	3195	38
23	994	795	798	3057	37
24	0.46020	782	835	2920	36
25	046	768	872	2782	35
26	072	755	909	2645	34
27	097	741	946	2508	33
28	123	728	983	2371	32
29	149	715	0.52020	2235	31
30	175	701	057	2098	30
31	0.46201	0.88688	0.52094	1.91962	29
32	226	674	131	1826	28
33	252	661	168	1690	27
34	278	647	205	1554	26
35	304	634	242	1418	25
36	330	620	279	1282	24
37	355	607	316	1147	23
38	381	593	353	1012	22
39	407	580	390	0876	21
40	433	566	427	0741	20
41	0.46458	0.88553	0.52464	1.90607	19
42	484	539	501	0472	18
43	510	526	538	0337	17
44	536	512	575	0203	16
45	561	499	613	0069	15
46	587	485	650	1.89935	14
47	613	472	687	9801	13
48	639	458	724	9667	12
49	664	445	761	9533	11
50	690	431	798	9400	10
51	0.46716	0.88417	0.52836	1.89266	9
52	742	404	873	9133	8
53	767	390	910	9000	7
54	793	377	947	8867	6
55	819	363	985	8734	5
56	844	349	0,53022	8602	4
57	870	336	059	8469	3
58	896	322	096	8337	2
59	921	308	134	8205	1
60	947	295	171	8073	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	'

62°

4°

'	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.06976	0.99756	0.06993	14.30067	60
1	0.07005	754	0.07022	24113	59
2	034	752	051	18209	58
3	063	750	080	12364	57
4	092	748	110	06546	56
5	121	746	139	00786	55
6	150	744	168	13.95072	54
7	179	742	197	89405	53
8	208	740	227	83783	52
9	237	738	256	78206	51
10	266	736	285	72674	50
11	0.07295	0.99734	0.07314	13.67186	49
12	324	731	344	61741	48
13	353	729	373	56339	47
14	382	727	402	50980	46
15	411	725	431	45663	45
16	440	723	461	40387	44
17	469	721	490	35152	43
18	498	719	519	29957	42
19	527	716	548	24803	41
20	556	714	578	19688	40
21	0.07585	0.99712	0.07607	13.14613	39
22	614	710	636	09576	38
23	643	708	665	04577	37
24	672	705	695	12.99616	36
25	701	703	724	94692	35
26	730	701	753	89806	34
27	759	699	782	84956	33
28	788	696	812	80142	32
29	817	694	841	75363	31
30	846	692	870	70621	30
31	0.07875	0.99689	0.07899	12.65913	29
32	904	687	929	61239	28
33	933	685	958	56600	27
34	962	683	987	51994	26
35	991	680	0.08017	47422	25
36	0.08020	678	046	42883	24
37	049	676	075	38377	23
38	078	673	104	33904	22
39	107	671	134	29464	21
40	136	668	163	25051	20
41	0.08165	0.99666	0.08192	12.20672	19
42	194	664	222	16324	18
43	223	661	251	12008	17
44	252	659	280	07719	16
45	281	657	309	03462	15
46	310	654	339	11.99236	14
47	339	652	368	95037	13
48	368	649	397	90868	12
49	397	647	427	86728	11
50	426	644	456	82617	10
51	0.08455	0.99642	0.08485	11.78533	9
52	484	639	514	74478	8
53	513	637	544	70450	7
54	542	635	573	66449	6
55	571	632	602	62476	5
56	600	630	632	58529	4
57	629	627	661	54609	3
58	658	624	690	50715	2
59	687	622	720	46847	1
60	716	619	749	43005	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	'

85°

5°

'	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.08716	0.99619	0.08749	11.43005	60
1	745	617	778	39189	59
2	774	614	807	35397	58
3	803	612	837	31630	57
4	831	609	866	27889	56
5	860	607	895	24171	55
6	889	604	925	20478	54
7	918	602	954	16809	53
8	947	599	983	13164	52
9	976	596	0.09013	09542	51
10	0.09005	594	042	05943	50
11	0.09034	0.99591	0.09071	11.02367	49
12	063	588	101	10.98815	48
13	092	586	130	95285	47
14	121	583	159	91778	46
15	150	580	189	88292	45
16	179	578	218	84829	44
17	208	575	247	81387	43
18	237	572	277	77967	42
19	266	570	306	74569	41
20	295	567	335	71191	40
21	0.09324	0.99564	0.09365	10.67835	39
22	353	562	394	64499	38
23	382	559	423	61184	37
24	411	556	453	57890	36
25	440	553	482	54615	35
26	469	551	511	51361	34
27	498	548	541	48126	33
28	527	545	570	44911	32
29	556	542	600	41716	31
30	585	540	629	38540	30
31	0.09614	0.99537	0.09658	10.35383	29
32	643	534	688	32245	28
33	671	531	717	29126	27
34	700	528	746	26025	26
35	729	526	776	22943	25
36	758	523	805	19879	24
37	787	520	834	16833	23
38	816	517	864	13805	22
39	845	514	893	10795	21
40	874	511	923	07803	20
41	0.09903	0.99508	0.09952	10.04828	19
42	932	506	981	01871	18
43	961	503	0.10011	9.98931	17
44	990	500	040	96007	16
45	0.10019	497	069	93101	15
46	048	494	099	90211	14
47	077	491	128	87338	13
48	106	488	158	84482	12
49	135	485	187	81641	11
50	164	482	216	78817	10
51	0.10192	0.99479	0.10246	9.76009	9
52	221	476	275	73217	8
53	250	473	305	70441	7
54	279	470	334	67680	6
55	308	467	363	64935	5
56	337	464	393	62205	4
57	366	461	422	59490	3
58	395	458	452	56791	2
59	424	455	481	54106	1
60	453	452	510	51436	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tangente.	'

84°

6°

'	Sinus	Cosinus	Tang	Cotang	
0	0.10453	0.99452	0.10510	9.51436	60
1	482	449	540	48781	59
2	511	446	569	46141	58
3	540	443	599	43515	57
4	569	440	628	40904	56
5	597	437	658	38307	55
6	626	434	687	35724	54
7	655	431	716	33155	53
8	684	428	746	30599	52
9	713	424	775	28058	51
10	742	421	805	25530	50
11	0.10771	0.99418	0.10834	9.23016	49
12	800	415	863	20516	48
13	829	412	893	18028	47
14	858	409	922	15554	46
15	887	406	952	13093	45
16	916	402	981	10646	44
17	945	399	0.11011	08211	43
18	973	396	040	05789	42
19	0.11002	393	070	03379	41
20	031	390	099	00983	40
21	0.11060	0.99386	0.11128	8.98598	39
22	089	383	158	96227	38
23	118	380	187	93867	37
24	147	377	217	91520	36
25	176	374	246	89185	35
26	205	370	276	86862	34
27	234	367	305	84551	33
28	263	364	335	82252	32
29	291	360	364	79964	31
30	320	357	394	77689	30
31	0.11349	0.99354	0.11423	8.75425	29
32	378	351	453	73172	28
33	407	347	482	70931	27
34	436	344	511	68701	26
35	465	341	541	66482	25
36	494	337	570	64275	24
37	523	334	600	62078	23
38	552	331	629	59893	22
39	580	327	659	57718	21
40	609	324	688	55555	20
41	0.11638	0.99320	0.11718	8.53402	19
42	667	317	747	51259	18
43	696	314	777	49128	17
44	725	310	806	47007	16
45	754	307	836	44896	15
46	783	303	865	42795	14
47	812	300	895	40705	13
48	840	297	924	38625	12
49	869	293	954	36555	11
50	898	290	983	34496	10
51	0.11927	0.99286	0.12013	8.32446	9
52	956	283	042	30406	8
53	985	279	072	28376	7
54	0.12014	276	101	26355	6
55	043	272	131	24345	5
56	071	269	160	22345	4
57	100	265	190	20352	3
58	129	262	219	18370	2
59	158	258	249	16398	1
60	187	255	278	14435	0
	Cosinus	Sinus	Cotang	Tang	'

83°

7°

'	Sinus	Cosinus	Tang	Cotang	
0	0.12187	0.99255	0.12278	8.14435	60
1	216	251	308	12481	59
2	245	248	338	10536	58
3	274	244	367	08600	57
4	302	240	397	06674	56
5	331	237	426	04756	55
6	360	233	456	02848	54
7	389	230	485	00948	53
8	418	226	515	7.99058	52
9	447	222	544	97176	51
10	476	219	574	95302	50
11	0.12504	0.99215	0.12603	7.93438	49
12	533	211	633	91582	48
13	562	208	662	89734	47
14	591	204	692	87895	46
15	620	200	722	86064	45
16	649	197	751	84242	44
17	678	193	781	82428	43
18	706	189	810	80622	42
19	735	186	840	78825	41
20	764	182	869	77035	40
21	0.12793	0.99178	0.12899	7.75254	39
22	822	175	929	73480	38
23	851	171	958	71715	37
24	880	167	988	69957	36
25	908	163	0,13017	68208	35
26	937	160	047	66466	34
27	966	156	076	64732	33
28	995	152	106	63005	32
29	0,13024	148	136	61287	31
30	053	144	165	59575	30
31	0.13081	0.99141	0.13195	7.57872	29
32	110	137	224	56176	28
33	139	133	254	54487	27
34	168	129	284	52806	26
35	197	125	313	51132	25
36	226	122	343	49465	24
37	254	118	372	47806	23
38	283	114	402	46154	22
39	312	110	432	44509	21
40	341	106	461	42871	20
41	0.13370	0.99102	0.13491	7.41240	19
42	399	098	520	39616	18
43	427	094	550	37999	17
44	456	091	580	36389	16
45	485	087	609	34786	15
46	514	083	639	33190	14
47	543	079	669	31600	13
48	572	075	698	30018	12
49	600	071	728	28442	11
50	629	067	758	26873	10
51	0.13658	0.99063	0.13787	7.25310	9
52	687	059	817	23754	8
53	716	055	847	22204	7
54	744	051	876	20661	6
55	773	047	906	19125	5
56	802	043	935	17594	4
57	831	039	965	16071	3
58	860	035	995	14553	2
59	889	031	0,14024	13042	1
60	917	027	054	11537	0
	Cosinus	Sinus	Cotang	Tang	'

82°

8° | 9°

′	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.		′	Sinus.	Cosinus	Tang.	Cotang.	
0	0.13917	0.99027	0.14054	7.11537	60	0	0.15643	0.98769	0.15838	6.31375	60
1	946	023	084	10038	59	1	672	764	868	30169	59
2	975	019	113	08516	58	2	701	760	898	29007	58
3	0.14004	015	143	07059	57	3	730	755	928	27829	57
4	033	011	173	05579	56	4	758	751	958	26655	56
5	061	006	202	41105	55	5	787	746	988	25486	55
6	090	002	232	02637	54	6	816	741	0.16017	24321	54
7	119	0,98998	262	01174	53	7	845	737	047	23160	53
8	148	994	291	6.99718	52	8	873	732	077	22003	52
9	177	990	321	98268	51	9	902	728	107	20851	51
10	205	986	351	96823	50	10	931	723	137	19703	50
11	0.14234	0.98982	0.14381	6 95385	49	11	0.15959	0.98718	0.16167	6.18559	49
12	263	978	410	93952	48	12	988	714	196	17419	48
13	292	973	440	92525	47	13	0.16017	709	226	16283	47
14	320	969	470	91104	46	14	046	704	256	15151	46
15	349	965	499	89688	45	15	074	700	286	14023	45
16	378	961	529	88278	44	16	103	695	316	12899	44
17	407	957	559	86874	43	17	132	690	346	11779	43
18	436	953	588	85475	42	18	160	686	376	10664	42
19	464	948	618	84082	41	19	189	681	406	09552	41
20	493	944	648	82694	40	20	218	676	435	08444	40
21	0.14522	0.98940	0.14678	6.81312	39	21	0.16246	0.98671	0.16465	6 07340	39
22	551	936	707	79936	38	22	275	667	495	06240	38
23	580	931	737	78564	37	23	304	662	525	05143	37
24	608	927	767	77199	36	24	333	657	555	04051	36
25	637	923	796	75838	35	25	361	652	565	02962	35
26	666	919	826	74483	34	26	390	648	615	01878	34
27	695	914	856	73133	33	27	419	643	645	00797	33
28	723	910	886	71789	32	28	447	638	674	5.99720	32
29	752	906	915	70450	31	29	476	633	704	98646	31
30	781	902	945	69116	30	30	505	629	734	97576	30
31	0.14810	0.98897	0.14975	6.67787	29	31	0.16533	0.98624	0.16764	5.96510	29
32	838	893	0.15005	66463	28	32	562	619	794	95418	28
33	867	889	034	65144	27	33	591	614	824	94390	27
34	896	884	064	63831	26	34	620	609	854	93335	26
35	925	880	094	62523	25	35	648	604	884	92283	25
36	954	876	124	61219	24	36	677	600	914	91235	24
37	982	871	153	59921	23	37	706	595	944	90191	23
38	0.15011	867	183	58627	22	38	734	590	974	89151	22
39	040	863	213	57339	21	39	763	585	0.17004	88114	21
40	069	858	243	56055	20	40	792	580	033	87080	20
41	0.15097	0.98854	0.15272	6 54777	19	41	0 16820	0.98575	0.17063	5.86051	19
42	126	849	302	53503	18	42	849	570	093	85024	18
43	155	845	332	52234	17	43	878	565	123	84001	17
44	184	841	362	50970	16	44	906	561	153	82982	16
45	212	836	391	49710	15	45	935	556	183	81966	15
46	241	832	421	48456	14	46	964	551	213	80953	14
47	270	827	451	47206	13	47	992	546	243	79944	13
48	299	823	481	45961	12	48	0.17021	541	273	78938	12
49	327	818	511	44720	11	49	050	536	303	77936	11
50	356	814	540	43484	10	50	078	531	333	76937	10
51	0.15385	0.98809	0.15570	6.42253	9	51	0.17107	0.98526	0.17363	5.75941	9
52	414	805	600	41026	8	52	136	521	393	74949	8
53	442	800	630	39804	7	53	164	516	423	73960	7
54	471	796	660	38587	6	54	193	511	453	72974	6
55	500	791	689	37374	5	55	222	506	483	71992	5
56	529	787	719	36165	4	56	250	501	513	71013	4
57	557	782	749	34961	3	57	279	496	543	70037	3
58	586	778	779	33761	2	58	308	491	573	69064	2
59	615	773	809	32566	1	59	336	486	603	68094	1
60	643	769	838	31375	0	60	365	481	633	67128	0
	Cosinus	Sinus	Cotang	Tang	′		Cosinus	Sinus.	Cotang.	Tang.	′

81° | 80°

10°

′	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.17365	0.98481	0.17633	5.67128	60
1	394	476	663	66165	59
2	422	471	693	65205	58
3	451	466	723	64248	57
4	479	461	753	63295	56
5	508	455	683	62344	55
6	537	450	813	61397	54
7	565	445	843	60452	53
8	594	440	873	59511	52
9	623	435	903	58573	51
10	654	430	933	57638	50
11	0.17680	0.98425	0.17963	5.56706	49
12	708	420	993	55777	48
13	737	414	0.18023	54851	47
14	766	409	053	53927	46
15	794	404	083	53007	45
16	823	399	113	52090	44
17	852	394	143	51176	43
18	880	389	173	50264	42
19	909	383	203	49356	41
20	937	378	233	48451	40
21	0.17966	0.98373	0.18263	5.47548	39
22	995	368	293	46648	38
23	0,18023	362	323	45751	37
24	052	357	353	44857	36
25	081	352	383	43966	35
26	109	347	414	43077	34
27	138	341	444	42192	33
28	166	336	474	41309	32
29	195	331	504	40429	31
30	224	325	534	39552	30
31	0.18252	0.98320	0.18564	5.38677	29
32	281	315	594	37805	28
33	309	310	624	36936	27
34	338	304	654	36070	26
35	367	299	684	25206	25
36	395	294	714	34345	24
37	424	288	745	33487	23
38	452	283	775	32631	22
39	481	277	805	31778	21
40	510	272	835	30928	20
41	0.18538	0.98267	0.18865	5.30080	19
42	567	261	895	29235	18
43	595	256	925	28393	17
44	624	250	955	27553	16
45	652	245	986	26715	15
46	681	240	0,19016	25880	14
47	710	234	046	25048	13
48	738	229	076	24218	12
49	767	223	106	23391	11
50	795	218	136	22566	10
51	0.18824	0.98212	0.19166	5.21744	9
52	852	207	197	20925	8
53	881	201	227	20107	7
54	910	196	257	19293	6
55	938	190	287	18480	5
56	967	185	317	17671	4
57	995	179	347	16863	3
58	0.19024	174	378	16058	2
59	052	168	408	15256	1
60	081	163	438	14455	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	′

79°

11°

′	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.19081	0.98163	0.19438	5.14455	60
1	109	157	468	13658	59
2	138	152	498	12866	58
3	167	146	529	12069	57
4	195	140	559	11279	56
5	224	135	589	10490	55
6	252	129	619	09704	54
7	281	124	649	08921	53
8	309	118	680	08139	52
9	338	112	710	07360	51
10	366	107	740	06584	50
11	0.19395	0 98101	0.19770	5.05809	49
12	423	096	801	05037	48
13	452	090	831	04267	47
14	480	084	861	03499	46
15	509	079	891	02734	45
16	538	073	921	01971	44
17	566	067	952	01210	43
18	595	061	982	00451	42
19	623	056	0.20012	4.99695	41
20	652	050	042	98940	40
21	0.19680	0.98044	0.20073	4 98188	39
22	709	039	103	97438	38
23	737	033	133	96690	37
24	766	027	164	95945	36
25	794	021	194	95201	35
26	823	016	224	94460	34
27	851	010	254	93721	33
28	880	004	285	92984	32
29	908	0.97998	315	92249	31
30	937	992	345	91516	30
31	0.19965	0.97987	0.20376	4 90785	29
32	994	981	406	90056	28
33	0.20022	975	436	89330	27
34	051	969	466	88605	26
35	079	963	497	87882	25
36	108	958	527	87162	24
37	136	952	557	86444	23
38	165	946	588	85727	22
39	193	940	618	85013	21
40	222	934	648	84300	20
41	0.20250	0.97928	0.20679	4.83590	19
42	279	922	709	82882	18
43	307	916	739	82175	17
44	336	910	770	81471	16
45	364	905	800	80769	15
46	393	899	830	80068	14
47	421	893	861	79370	13
48	450	887	891	78673	12
49	478	881	921	77978	11
50	507	875	952	77286	10
51	0.20535	0.97869	0.20982	4.76595	9
52	563	863	0.21013	75906	8
53	592	857	043	75219	7
54	620	851	073	74534	6
55	649	845	104	73851	5
56	677	839	134	73170	4
57	706	833	164	72490	3
58	734	827	195	71813	2
59	763	821	225	71137	1
60	791	815	256	70463	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	′

78°

12°

′	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.20791	0.97815	0.21256	4.70463	60
1	820	809	286	4.69791	59
2	848	803	316	9121	58
3	877	797	347	8452	57
4	905	790	377	7786	56
5	933	784	408	7121	55
6	962	778	438	6458	54
7	990	772	469	5797	53
8	0.21019	766	499	5138	52
9	047	760	529	4480	51
10	076	754	560	3825	50
11	0.21104	0.97748	0.21590	4.63171	49
12	132	742	621	2518	48
13	161	735	651	1868	47
14	189	729	682	1219	46
15	218	723	712	0572	45
16	246	717	743	4.59927	44
17	275	711	773	9283	43
18	303	705	804	8641	42
19	331	698	834	8001	41
20	360	692	864	7363	40
21	0.21388	0.97686	0.21895	4.56726	39
22	417	680	925	6091	38
23	445	673	956	5458	37
24	474	667	986	4826	36
25	502	661	0.22017	4196	35
26	530	655	047	3568	34
27	559	648	078	2941	33
28	587	642	108	2316	32
29	616	636	139	1693	31
30	644	630	169	1071	30
31	0.21672	0.97623	0.22200	4.50451	29
32	701	617	230	4.49832	28
33	729	611	261	9215	27
34	758	604	292	8600	26
35	786	598	322	7986	25
36	814	592	353	7374	24
37	843	585	383	6764	23
38	871	579	414	6155	22
39	899	573	444	5548	21
40	928	566	475	4942	20
41	0.21956	0.97560	0.22505	4.44338	19
42	985	553	536	3735	18
43	0.22013	547	567	3134	17
44	041	541	597	2534	16
45	070	534	628	1936	15
46	098	528	658	1340	14
47	126	521	689	0745	13
48	155	515	719	0152	12
49	183	508	750	4.39560	11
50	212	502	781	8969	10
51	0.22240	0.97496	0.22811	4.38381	9
52	268	489	842	7793	8
53	297	483	872	7207	7
54	325	476	903	6623	6
55	353	470	934	6040	5
56	382	463	964	5459	4
57	410	457	995	4879	3
58	438	450	0.23026	4300	2
59	467	444	056	3723	1
60	495	437	087	3148	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	′

77°

13°

′	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.22495	0.97437	0.23087	4.33148	60
1	523	430	117	2573	59
2	552	424	148	2001	58
3	580	417	179	1430	57
4	608	411	209	0860	56
5	637	404	240	0291	55
6	665	398	271	4.29724	54
7	693	391	301	9159	53
8	722	384	332	8595	52
9	750	378	363	8032	51
10	778	371	393	7471	50
11	0.22807	0.97365	0.23424	4.26911	49
12	835	358	455	6352	48
13	863	351	485	5795	47
14	892	345	516	5239	46
15	920	338	547	4685	45
16	948	331	578	4132	44
17	977	325	608	3580	43
18	0.23005	318	639	3030	42
19	033	311	670	2481	41
20	062	304	700	1933	40
21	0.23090	0.97298	0.23731	4.21387	39
22	118	291	762	0842	38
23	146	284	793	0298	37
24	175	278	823	4.19756	36
25	203	271	854	9215	35
26	231	264	885	8675	34
27	260	257	916	8137	33
28	288	251	946	7600	32
29	316	244	977	7064	31
30	345	237	0,24008	6530	30
31	0.23373	0.97230	0.24039	4.15997	29
32	401	223	069	5465	28
33	429	217	100	4934	27
34	458	210	131	4405	26
35	486	203	162	3877	25
36	514	196	193	3350	24
37	542	189	223	2825	23
38	571	182	254	2301	22
39	599	176	285	1778	21
40	627	169	316	1256	20
41	0.23656	0.97162	0.24347	4.10736	19
42	684	155	377	0216	18
43	712	148	408	4.09699	17
44	740	141	439	9182	16
45	769	134	470	8666	15
46	797	127	501	8152	14
47	825	120	532	7639	13
48	853	113	562	7127	12
49	882	106	593	6616	11
50	910	100	624	6107	10
51	0.23938	0.97093	0.24655	4.05599	9
52	966	086	686	5092	8
53	995	079	717	4686	7
54	0.24023	072	747	4081	6
55	051	065	778	3578	5
56	079	058	809	3076	4
57	108	051	840	2574	3
58	136	044	871	2074	2
59	164	037	902	1576	1
60	192	030	933	1078	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	′

76°

14°

'	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.24192	0.97030	0.24933	4.01078	60
1	220	023	964	0582	59
2	249	015	995	0086	58
3	277	008	0.25026	3.99592	57
4	305	001	056	9099	56
5	333	0.96994	087	8607	55
6	361	987	118	8117	54
7	390	980	149	7627	53
8	418	973	180	7139	52
9	446	966	211	6651	51
10	474	959	242	6165	50
11	0.24503	0.96952	0.25273	3.95680	49
12	531	945	304	5196	48
13	559	937	335	4713	47
14	587	930	366	4232	46
15	615	923	397	3751	45
16	644	916	428	3271	44
17	672	909	459	2793	43
18	700	902	490	2316	42
19	728	894	521	1839	41
20	756	887	552	1364	40
21	0.24784	0.96880	0.25583	3.90890	39
22	813	873	614	0417	38
23	841	866	645	3.89945	37
24	869	859	676	9474	36
25	897	851	707	9004	35
26	925	844	738	8536	34
27	953	837	769	8068	33
28	982	829	800	7601	32
29	0.25010	822	831	7136	31
30	038	815	862	6671	30
31	0.25066	0.96807	0.25893	3.86208	29
32	094	800	924	5745	28
33	122	793	955	5284	27
34	151	786	986	4824	26
35	179	778	0.26017	4364	25
36	207	771	048	3906	24
37	235	764	079	3449	23
38	263	756	110	2992	22
39	291	749	141	2537	21
40	320	742	172	2083	20
41	0.25348	0.96734	0.26203	3.81630	19
42	376	727	235	1177	18
43	404	719	266	0726	17
44	432	712	297	0276	16
45	460	705	328	3.79827	15
46	488	697	359	9378	14
47	516	690	390	8931	13
48	545	682	421	8485	12
49	573	675	452	8040	11
50	601	667	483	7595	10
51	0.25629	0.96660	0.26515	3.77152	9
52	657	653	546	6709	8
53	685	645	577	6268	7
54	713	638	608	5828	6
55	741	630	639	5388	5
56	769	623	670	4950	4
57	798	615	701	4512	3
58	826	608	733	4075	2
59	854	600	764	3640	1
60	882	593	795	3205	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	'

75°

15°

'	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	'
0	0.25882	0.96593	0.26795	3.73205	60
1	910	585	826	2771	59
2	938	578	857	2338	58
3	966	570	888	1907	57
4	994	562	920	1476	56
5	0.26022	555	951	1046	55
6	050	547	982	0616	54
7	079	540	0.27013	0188	53
8	107	532	044	3.69761	52
9	135	524	076	9335	51
10	163	517	107	8909	50
11	0.26191	0.96509	0.27138	3.68485	49
12	219	502	169	8061	48
13	247	494	201	7638	47
14	275	486	232	7217	46
15	303	479	263	6796	45
16	331	471	294	6376	44
17	359	463	326	5957	43
18	387	456	357	5538	42
19	415	448	388	5121	41
20	443	440	419	4705	40
21	0.26471	0.96433	0.27451	3.64289	39
22	500	425	482	3874	38
23	528	417	513	3461	37
24	556	410	545	3048	36
25	584	402	576	2636	35
26	612	394	607	2224	34
27	640	386	638	1814	33
28	668	379	670	1405	32
29	696	371	701	0996	31
30	724	363	732	0588	30
31	0.26752	0.96355	0.27764	3.60181	29
32	780	347	795	3.59775	28
33	808	340	826	9370	27
34	836	332	858	8966	26
35	864	324	889	8562	25
36	892	316	920	8160	24
37	920	308	952	7758	23
38	948	301	983	7357	22
39	976	293	0.28015	6957	21
40	0.27004	285	046	6557	20
41	0.27032	0.96277	0.28077	3.56159	19
42	060	269	109	5761	18
43	088	261	140	5364	17
44	116	253	172	4968	16
45	144	246	203	4573	15
46	172	238	234	4179	14
47	200	230	266	3785	13
48	228	222	297	3393	12
49	256	214	329	3001	11
50	284	206	360	2609	10
51	0.27312	0.96198	0.28391	3.52219	9
52	340	190	423	1829	8
53	368	182	454	1441	7
54	396	174	486	1053	6
55	424	166	517	0666	5
56	452	158	549	0279	4
57	480	150	580	3.49894	3
58	508	142	612	9509	2
59	536	134	643	9125	1
60	564	126	675	8741	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	

74°

16°

′	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.27564	0.96126	0.28675	3.48741	60
1	592	118	706	8359	59
2	620	110	738	7977	58
3	648	102	769	7595	57
4	676	094	800	7216	56
5	704	086	832	6837	55
6	731	078	864	6458	54
7	759	070	895	6080	53
8	787	062	927	5703	52
9	815	054	958	5327	51
10	843	046	990	4951	50
11	0.27871	0.96037	0.29021	3.44576	49
12	899	029	053	4202	48
13	927	021	084	3829	47
14	955	013	116	3456	46
15	983	005	147	3084	45
16	0.28011	0.95997	179	2713	44
17	039	989	210	2343	43
18	067	981	242	1973	42
19	095	972	274	1604	41
20	123	964	305	1236	40
21	0.28150	0.95956	0.29337	3.40869	39
22	178	948	368	0502	38
23	206	940	400	0136	37
24	234	931	432	3.39771	36
25	262	923	463	9406	35
26	290	915	495	9042	34
27	318	907	526	8679	33
28	346	898	558	8317	32
29	374	890	590	7955	31
30	402	882	621	7594	30
31	0 28429	0.95874	0.29653	3.37234	29
32	457	865	685	6875	28
33	485	857	716	6516	27
34	513	849	748	6158	26
35	541	841	780	5800	25
36	569	832	811	5443	24
37	597	824	843	5087	23
38	625	816	875	4732	22
39	652	807	906	4377	21
40	680	799	938	4023	20
41	0.28708	0.95791	0.29970	3.33670	19
42	736	782	0.30001	3317	18
43	764	774	033	2965	17
44	792	766	065	2614	16
45	820	757	097	2264	15
46	847	749	128	1914	14
47	875	740	160	1565	13
48	903	732	192	1216	12
49	931	724	224	0868	11
50	959	715	255	0521	10
51	0.28987	0,95707	0.30287	3.30174	9
52	0.29015	698	319	3.29829	8
53	042	690	351	9483	7
54	070	681	382	9139	6
55	098	673	414	8795	5
56	126	664	446	8452	4
57	154	656	478	8109	3
58	182	647	509	7767	2
59	209	639	541	7426	1
60	237	630	573	7085	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	′

73°

17°

′	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.292[illegible]7	0.956[illegible]0	0.30573	3.27085	60
1	265	622	605	6745	59
2	293	613	637	6406	58
3	321	605	669	6067	57
4	348	596	700	5729	56
5	376	588	732	5392	55
6	404	579	764	5055	54
7	432	571	796	4719	53
8	460	562	828	4383	52
9	487	554	860	4048	51
10	515	545	891	3714	50
11	0.29543	0.95536	0.30923	3.23381	49
12	571	528	955	3048	48
13	599	519	987	2715	47
14	626	511	0.31019	2384	46
15	654	502	051	2053	45
16	682	493	083	1722	44
17	710	485	115	1392	43
18	737	476	147	1063	42
19	765	467	178	0734	41
20	793	459	210	0406	40
21	0.29821	0.95450	0.31242	3.20079	39
22	849	441	274	3.19752	38
23	876	433	306	9426	37
24	904	424	338	9100	36
25	932	415	370	8775	35
26	960	407	402	8451	34
27	987	398	434	8127	33
28	0.30015	389	466	7801	32
29	043	380	498	7181	31
30	071	372	530	71[illegible]9	30
31	0.30098	0.95363	0.31562	3.16838	29
32	126	354	594	6517	28
33	154	345	626	6197	27
34	182	337	658	5877	26
35	209	328	690	5558	25
36	237	319	722	5240	24
37	265	310	754	4922	23
38	292	301	786	4605	22
39	320	293	818	428	21
40	348	284	850	3972	20
41	0.30376	0.95275	0.31882	3.13656	19
42	403	266	914	3341	18
43	431	257	946	3027	17
44	459	248	978	2713	16
45	486	240	0 32010	2400	15
46	514	231	042	2087	14
47	542	222	074	1775	13
48	570	213	107	1464	12
49	597	204	139	1153	11
50	625	195	171	0842	10
51	0.30653	0.95186	0.32203	3.105[illegible]2	9
52	680	177	235	0223	8
53	708	168	267	3 09914	7
54	736	159	299	9[illegible]06	6
55	763	150	331	9298	5
56	791	142	363	8991	4
57	819	133	396	8685	3
58	846	124	428	8379	2
59	874	115	460	8073	1
60	902	106	492	7768	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	′

72°

18°

'	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.30902	0.95106	0.32492	3.07768	60
1	929	097	524	7464	59
2	957	088	556	7160	58
3	985	079	588	6857	57
4	0.31012	070	621	6554	56
5	040	061	653	6252	55
6	068	052	685	5950	54
7	095	043	717	5649	53
8	123	033	749	5349	52
9	151	024	782	5049	51
10	178	015	814	4749	50
11	0.31206	0.95006	0.32846	3.04450	49
12	233	0.94997	878	4152	48
13	261	988	911	3854	47
14	289	979	943	3556	46
15	316	970	975	3260	45
16	344	961	0.33007	2963	44
17	372	952	040	2667	43
18	399	943	072	2372	42
19	427	933	104	2077	41
20	454	924	136	1783	40
21	0.31482	0.94915	0.33169	3.01489	39
22	510	906	201	1196	38
23	537	897	233	0903	37
24	565	888	266	0611	36
25	592	878	298	0319	35
26	620	869	330	0028	34
27	648	860	363	2.99738	33
28	675	851	395	9447	32
29	703	842	427	9158	31
30	730	832	460	8869	30
31	0.31758	0.94823	0.33492	2.98580	29
32	786	814	524	8292	28
33	813	805	557	8004	27
34	841	795	589	7717	26
35	868	786	621	7430	25
36	896	777	654	7144	24
37	923	768	686	6858	23
38	951	758	718	6573	22
39	979	749	751	6288	21
40	0.32006	740	783	6004	20
41	0.32034	0.94730	0.33816	2.95720	19
42	061	721	848	5437	18
43	089	712	881	5155	17
44	116	702	913	4872	16
45	144	693	945	4590	15
46	171	684	978	4309	14
47	199	674	0.34010	4028	13
48	227	665	043	3748	12
49	254	656	075	3468	11
50	282	646	108	3189	10
51	0.32309	0.94637	0.34140	2.92910	9
52	337	627	173	2632	8
53	364	618	205	2354	7
54	392	609	238	2076	6
55	419	599	270	1799	5
56	447	590	303	1523	4
57	474	580	335	1246	3
58	502	571	368	0971	2
59	529	561	400	0696	1
60	557	552	433	0421	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	'

71°

19°

'	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.32557	0.94552	0.34433	2.90421	60
1	584	542	465	0147	59
2	612	533	498	2.89873	58
3	639	523	530	9600	57
4	667	514	563	9327	56
5	694	504	596	9055	55
6	722	495	628	8783	54
7	749	485	661	8511	53
8	777	476	693	8240	52
9	804	466	726	7970	51
10	832	457	758	7700	50
11	0.32859	0.94447	0.34791	2.87430	49
12	887	438	824	7161	48
13	914	428	856	6892	47
14	942	418	889	6624	46
15	969	409	922	6356	45
16	997	399	954	6089	44
17	0.33024	390	987	5822	43
18	051	380	0.35019	5555	42
19	079	370	052	5289	41
20	106	361	085	5023	40
21	0.33134	0.94351	0.35117	2.84758	39
22	161	342	150	4494	38
23	189	332	183	4229	37
24	216	322	216	3965	36
25	244	313	248	3702	35
26	271	303	281	3439	34
27	298	293	314	3176	33
28	326	284	346	2914	32
29	353	274	379	2653	31
30	381	264	412	2391	30
31	0.33408	0.94254	0.35445	2.82130	29
32	436	245	477	1870	28
33	463	235	510	1610	27
34	490	225	543	1350	26
35	518	215	576	1091	25
36	545	206	608	0833	24
37	573	196	641	0574	23
38	600	186	674	0316	22
39	627	176	707	0059	21
40	655	167	740	2.79802	20
41	0.33682	0.94157	0.35772	2.79545	19
42	710	147	805	9289	18
43	737	137	838	9033	17
44	764	127	871	8778	16
45	792	118	904	8523	15
46	819	108	937	8269	14
47	846	098	969	8014	13
48	874	088	0.36002	7761	12
49	901	078	035	7507	11
50	929	068	068	7254	10
51	0.33956	0.94058	0.36101	2.77002	9
52	983	049	134	6750	8
53	0.34011	039	167	6498	7
54	038	029	199	6247	6
55	065	019	232	5996	5
56	093	009	265	5746	4
57	120	0.93999	298	5496	3
58	147	989	331	5246	2
59	175	979	364	4997	1
60	202	969	397	4748	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	'

70°

20°

′	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.34202	0.93969	0.36397	2.74748	60
1	229	959	430	4499	59
2	257	949	463	4251	58
3	284	939	496	4004	57
4	311	929	529	3756	56
5	339	919	562	3509	55
6	366	909	595	3263	54
7	393	899	628	3017	53
8	421	889	661	2771	52
9	448	879	694	2526	51
10	475	869	727	2281	50
11	0.34503	0.93859	0.36760	2.72036	49
12	530	849	793	1792	48
13	557	839	826	1548	47
14	584	829	859	1305	46
15	612	819	892	1062	45
16	639	809	925	0819	44
17	666	799	958	0577	43
18	694	789	991	0335	42
19	721	779	0.37024	0094	41
20	748	769	057	2,69853	40
21	0.34775	0.93759	0.37090	2.69612	39
22	803	748	123	9371	38
23	830	738	157	9131	37
24	857	728	190	8892	36
25	884	718	223	8658	35
26	912	708	256	8414	34
27	939	698	289	8175	33
28	966	688	322	7937	32
29	993	677	355	7700	31
30	0.35021	667	388	7462	30
31	0.35048	0.93657	0.37422	2.67225	29
32	075	647	455	6989	28
33	102	637	488	6752	27
34	130	626	521	6516	26
35	157	616	554	6281	25
36	184	606	588	6046	24
37	211	596	621	5811	23
38	239	585	654	5576	22
39	266	575	687	5342	21
40	293	565	720	5109	20
41	0.35320	0.93555	0.37754	2.64875	19
42	347	544	787	4642	18
43	375	534	820	4410	17
44	402	524	853	4177	16
45	429	514	887	3945	15
46	456	503	920	3714	14
47	483	493	953	3483	13
48	511	483	986	3252	12
49	538	472	0.38020	3021	11
50	565	462	053	2791	10
51	0.35592	0.93452	0.38086	2.62561	9
52	619	441	120	2332	8
53	647	431	153	2103	7
54	674	420	186	1874	6
55	701	410	220	1646	5
56	728	400	253	1418	4
57	755	389	286	1190	3
58	782	379	320	0963	2
59	810	368	353	0736	1
60	837	358	386	0509	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	′

69°

21°

′	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.35837	0.93358	0.38386	2.60509	60
1	864	348	420	0283	59
2	891	337	453	0057	58
3	918	327	487	2.59831	57
4	945	316	520	9606	56
5	973	306	553	9381	55
6	0.36000	295	587	9156	54
7	027	285	620	8932	53
8	054	274	654	8708	52
9	081	264	687	8484	51
10	108	253	721	8261	50
11	0.36135	0.93243	0.38754	2.58038	49
12	162	232	787	7815	48
13	190	222	821	7593	47
14	217	211	854	7371	46
15	244	201	888	7150	45
16	271	190	921	6928	44
17	298	180	955	6707	43
18	325	169	988	6487	42
19	352	159	0.39022	6266	41
20	379	148	055	6046	40
21	0.36406	0.93137	0.39089	2.55827	39
22	433	127	122	5608	38
23	461	116	156	5389	37
24	488	106	190	5170	36
25	515	095	223	4952	35
26	542	084	257	4734	34
27	569	074	290	4516	33
28	596	063	324	4299	32
29	623	052	357	4082	31
30	650	042	391	3865	30
31	0.36677	0.93031	0.39425	2.53648	29
32	704	020	458	3432	28
33	731	010	492	3217	27
34	758	0.92999	526	3001	26
35	785	988	559	2786	25
36	812	978	593	2571	24
37	839	967	626	2357	23
38	867	956	660	2142	22
39	894	945	694	1929	21
40	921	935	727	1715	20
41	0.36948	0.92924	0.39761	2.51502	19
42	975	913	795	1289	18
43	0.37002	903	829	1076	17
44	029	892	862	0864	16
45	056	881	896	0652	15
46	083	870	930	0440	14
47	110	859	963	0229	13
48	137	849	997	0018	12
49	164	838	0.40031	2.49807	11
50	191	827	065	9597	10
51	0.37218	0.92816	0.40098	2.49386	9
52	245	805	132	9177	8
53	272	794	166	8967	7
54	299	784	200	8758	6
55	326	773	234	8549	5
56	353	762	267	8340	4
57	380	751	301	8132	3
58	407	740	335	7924	2
59	434	729	369	7716	1
60	461	718	403	7509	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	′

68°

22°

'	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.37461	0.92718	0.40403	2.47509	60
1	488	707	436	7302	59
2	515	697	470	7095	58
3	542	686	504	6888	57
4	569	675	538	6682	56
5	595	664	572	6476	55
6	622	653	606	6270	54
7	649	642	640	6065	53
8	676	631	674	5860	52
9	703	620	707	5655	51
10	730	609	741	5451	50
11	0.37757	0.92598	0.40775	2.45246	49
12	784	587	809	5043	48
13	811	576	843	4839	47
14	838	565	877	4636	46
15	865	554	911	4433	45
16	892	543	945	4230	44
17	919	532	979	4027	43
18	946	521	0.41013	3825	42
19	973	510	047	3623	41
20	999	499	081	3422	40
21	0.38026	0.92488	0.41115	2.43220	39
22	053	477	149	3019	38
23	080	466	183	2819	37
24	107	455	217	2618	36
25	134	444	251	2418	35
26	161	432	285	2218	34
27	188	421	319	2019	33
28	215	410	353	1819	32
29	241	399	387	1620	31
30	268	388	421	1422	30
31	0.38295	0.92377	0.41455	2.41223	29
32	322	366	490	1025	28
33	349	355	524	0827	27
34	376	343	558	0629	26
35	403	332	592	0432	25
36	430	321	626	0235	24
37	456	310	660	0038	23
38	483	299	694	2.39841	22
39	510	287	728	9645	21
40	537	276	763	9449	20
41	0.38564	0.92265	0.41797	2.39253	19
42	591	254	831	9058	18
43	617	243	865	8863	17
44	644	231	899	8668	16
45	671	220	933	8473	15
46	698	209	968	8279	14
47	725	198	0.42002	8084	13
48	752	186	036	7891	12
49	778	175	070	7697	11
50	805	164	105	7504	10
51	0.38832	0.92152	0.42139	2.37311	9
52	859	141	173	7118	8
53	886	130	207	6925	7
54	912	119	242	6733	6
55	939	107	276	6541	5
56	966	096	310	6349	4
57	993	085	345	6158	3
58	0.39020	073	379	5967	2
59	046	062	413	5776	1
60	073	050	447	5585	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	'

67°

23°

'	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.39073	0.92050	0.42447	2.35585	60
1	100	039	482	5395	59
2	127	028	516	5205	58
3	153	016	551	5015	57
4	180	005	585	4825	56
5	207	0.91994	619	4636	55
6	234	982	654	4447	54
7	260	971	688	4258	53
8	287	959	722	4069	52
9	314	948	757	3881	51
10	341	936	791	3693	50
11	0.39368	0.91925	0.42826	2.33505	49
12	394	914	860	3317	48
13	421	902	894	3130	47
14	448	891	929	2943	46
15	474	879	963	2756	45
16	501	868	998	2570	44
17	528	856	0.43032	2383	43
18	555	845	067	2197	42
19	581	833	101	2012	41
20	608	822	136	1826	40
21	0.39635	0.91810	0.43170	2.31641	39
22	661	799	205	1456	38
23	688	787	239	1271	37
24	715	775	274	1086	36
25	741	764	308	0902	35
26	768	752	343	0718	34
27	795	741	378	0534	33
28	822	729	412	0351	32
29	848	718	447	0167	31
30	875	706	481	2.29984	30
31	0.39902	0.91694	0.43516	2.29801	29
32	928	683	550	9619	28
33	955	671	585	9437	27
34	982	660	620	9254	26
35	0.40008	648	654	9073	25
36	035	636	689	8891	24
37	062	625	724	8710	23
38	088	613	758	8528	22
39	115	601	793	8348	21
40	141	590	828	8167	20
41	0.40168	0.91578	0.43862	2.27987	19
42	195	566	897	7806	18
43	221	555	932	7626	17
44	248	543	966	7447	16
45	275	531	0.44001	7267	15
46	301	519	036	7088	14
47	328	508	071	6909	13
48	355	496	105	6730	12
49	381	484	140	6552	11
50	408	472	175	6374	10
51	0.40434	0.91461	0.44210	2.26196	9
52	461	449	244	6018	8
53	488	437	279	5840	7
54	514	425	314	5663	6
55	541	414	349	5486	5
56	567	402	384	5309	4
57	594	390	418	5132	3
58	621	378	453	4956	2
59	647	366	488	4780	1
60	674	355	523	4604	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	'

66°

24°

'	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.40674	0.91355	0.44523	2.24604	60
1	700	343	558	4428	59
2	727	331	593	4252	58
3	753	319	627	4077	57
4	780	307	662	3902	56
5	806	295	697	3727	55
6	833	283	732	3553	54
7	860	272	767	3378	53
8	886	260	802	3204	52
9	913	248	837	3030	51
10	939	236	872	2857	50
11	0.40966	0.91224	0.44907	2.22683	49
12	992	212	942	2510	48
13	0.41019	200	977	2337	47
14	045	188	0.45012	2164	46
15	072	176	047	1992	45
16	098	164	082	1819	44
17	125	152	117	1647	43
18	151	141	152	1475	42
19	178	128	187	1304	41
20	205	116	222	1132	40
21	0.41231	0.91104	0.45257	2.20961	39
22	257	092	292	0790	38
23	284	080	327	0619	37
24	310	068	362	0449	36
25	337	056	397	0278	35
26	363	044	432	0108	34
27	390	032	467	2.19938	33
28	416	020	502	9769	32
29	443	008	538	9599	31
30	469	0.90996	573	9430	30
31	0.41496	0.90984	0.45608	2.19261	29
32	522	972	643	9092	28
33	549	960	678	8923	27
34	575	948	713	8755	26
35	602	936	748	8587	25
36	628	924	784	8419	24
37	655	911	819	8251	23
38	681	899	854	8084	22
39	707	887	889	7916	21
40	734	875	924	7749	20
41	0.41760	0.90863	0.45960	2.17582	19
42	787	851	995	7416	18
43	813	839	0.46030	7249	17
44	840	826	065	7083	16
45	866	814	101	6917	15
46	892	802	136	6751	14
47	919	790	171	6585	13
48	945	778	206	6420	12
49	972	766	242	6255	11
50	998	753	277	6090	10
51	0.42024	0.90741	0.46312	2.15925	9
52	051	729	348	5760	8
53	077	717	383	5596	7
54	104	704	418	5432	6
55	130	692	454	5268	5
56	156	680	489	5104	4
57	183	668	525	4940	3
58	209	655	560	4777	2
59	235	643	595	4614	1
60	262	631	631	4451	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	'

25°

'	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.42262	0.90631	0.46631	2.14451	60
1	288	618	666	4288	59
2	315	606	702	4125	58
3	341	594	737	3963	57
4	367	582	773	3801	56
5	394	569	808	3639	55
6	420	557	843	3477	54
7	446	545	879	3316	53
8	473	532	914	3154	52
9	499	520	950	2993	51
10	525	507	985	2832	50
11	0.42552	0.90495	0.47021	2.12671	49
12	578	483	056	2511	48
13	604	470	092	2350	47
14	631	458	128	2190	46
15	657	446	163	2030	45
16	683	433	199	1871	44
17	709	421	234	1711	43
18	736	408	270	1552	42
19	762	396	305	1392	41
20	788	383	341	1233	40
21	0.42815	0.90371	0.47377	2.11075	39
22	841	358	412	0916	38
23	867	346	448	0758	37
24	894	334	483	0600	36
25	920	321	519	0442	35
26	946	309	555	0284	34
27	972	296	590	0126	33
28	999	284	626	2.09969	32
29	0.43025	271	662	9811	31
30	051	259	698	9654	30
31	0.43077	0.90246	0.47733	2.09498	29
32	104	233	769	9341	28
33	130	221	805	9184	27
34	156	208	840	9028	26
35	182	196	876	8872	25
36	209	183	912	8716	24
37	235	171	948	8560	23
38	261	158	984	8405	22
39	287	146	0.48019	8250	21
40	313	133	055	8094	20
41	0.43340	0.90120	0.48091	2.07939	19
42	366	108	127	7785	18
43	392	095	163	7630	17
44	418	082	198	7476	16
45	445	070	234	7321	15
46	471	057	270	7167	14
47	497	045	306	7014	13
48	523	032	342	6860	12
49	549	019	378	6706	11
50	575	007	414	6553	10
51	0.43602	0.89994	0.48450	2.06400	9
52	628	981	486	6247	8
53	654	968	521	6094	7
54	680	956	557	5942	6
55	706	943	593	5790	5
56	732	930	629	5637	4
57	759	918	665	5485	3
58	785	905	701	5333	2
59	811	892	737	5182	1
60	837	879	773	5030	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	'

64°

26°

'	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang	
0	0.43837	0.89879	0.48773	2.05030	60
1	863	867	809	4876	59
2	889	854	845	4728	58
3	916	841	881	4577	57
4	942	828	917	4426	56
5	968	816	953	4276	55
6	994	803	989	4125	54
7	0.44020	790	0 49026	3975	53
8	046	777	062	3825	52
9	072	764	098	3675	51
10	09	752	134	3526	50
11	0.44124	0.89739	0.49170	2 03376	49
12	151	726	206	3227	48
13	177	713	242	3078	47
14	203	700	278	2929	46
15	229	687	315	2780	45
16	255	674	351	2631	44
17	281	662	387	2483	43
18	307	649	423	2335	42
19	333	636	459	2187	41
20	359	623	495	2039	40
21	0.44385	0.89610	0 49532	2.01891	39
22	411	597	568	1743	38
23	437	584	604	1596	37
24	464	571	640	1449	36
25	490	558	677	1302	35
26	516	545	713	1155	34
27	542	532	749	1008	33
28	568	519	786	0862	32
29	594	506	822	0715	31
30	620	493	858	0569	30
31	0.44646	0.89480	0.49894	2.00423	29
32	672	467	931	0277	28
33	698	454	967	0131	27
34	724	441	0.50004	1.99986	26
35	750	428	040	9841	25
36	776	415	076	9695	24
37	802	402	113	9550	23
38	828	389	149	9406	22
39	854	376	185	9261	21
40	880	363	222	9116	20
41	0.44906	0.89350	0.50258	1.98972	19
42	932	337	295	8828	18
43	958	324	331	8684	17
44	984	311	368	8540	16
45	0.45010	298	404	8396	15
46	036	285	441	8253	14
47	062	272	477	8110	13
48	088	259	514	7966	12
49	114	245	550	7823	11
50	140	232	587	7680	10
51	0.45166	0.89219	0.50623	1.97538	9
52	192	206	660	7395	8
53	218	193	696	7253	7
54	243	180	733	7111	6
55	269	167	769	6969	5
56	295	153	806	6827	4
57	321	140	843	6685	3
58	347	127	879	6544	2
59	373	114	916	6402	1
60	399	101	953	6261	0
	Cosinus	Sinus.	Cotang.	Tang.	'

63°

27°

'	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang	
0	0.45399	0.89101	0.50953	1.96261	60
1	425	087	989	6120	59
2	451	074	0 51026	5979	58
3	477	061	063	5838	57
4	503	048	099	5698	56
5	529	035	136	5557	55
6	554	021	173	5417	54
7	580	008	209	5277	53
8	606	0 88995	246	5137	52
9	632	981	283	4997	51
10	658	968	319	4858	50
11	0.45684	0.88955	0.51356	1.94718	49
12	710	942	393	4579	48
13	736	928	430	4410	47
14	762	915	467	4301	46
15	787	902	503	4162	45
16	813	888	540	4023	44
17	839	875	577	3885	43
18	865	862	614	3746	42
19	891	848	651	3608	41
20	917	835	688	3470	40
21	0.45942	0.88822	0.51724	1.93332	39
22	968	808	761	3195	38
23	994	795	798	3057	37
24	0.46020	782	835	2920	36
25	046	768	872	2782	35
26	072	755	909	2645	34
27	097	741	946	2508	33
28	123	728	983	2371	32
29	149	715	0 52020	2235	31
30	175	701	057	2098	30
31	0.46201	0.88688	0.52094	1.91962	29
32	226	674	131	1826	28
33	252	661	168	1690	27
34	278	647	205	1554	26
35	304	634	242	1418	25
36	330	620	279	1282	24
37	355	607	316	1147	23
38	381	593	353	1012	22
39	407	580	390	0876	21
40	433	566	427	0741	20
41	0.46458	0.88553	0.52464	1.90607	19
42	484	539	501	0472	18
43	510	526	538	0337	17
44	536	512	575	0203	16
45	561	499	613	0069	15
46	587	485	650	1.89935	14
47	613	472	687	9801	13
48	639	458	724	9667	12
49	664	445	761	9533	11
50	690	431	798	9400	10
51	0.46716	0.88417	0.52836	1.89266	9
52	742	404	873	9133	8
53	767	390	910	9000	7
54	793	377	947	8867	6
55	819	363	985	8734	5
56	844	349	0,53022	8602	4
57	870	336	059	8469	3
58	896	322	096	8337	2
59	921	308	134	8205	1
60	947	295	171	8073	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	'

62°

28°

′	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.46947	0.88295	0.53171	1.88073	60
1	973	281	208	7941	59
2	999	267	246	7809	58
3	0.47024	254	283	7677	57
4	050	240	320	7546	56
5	076	226	358	7415	55
6	101	213	395	7283	54
7	127	199	432	7152	53
8	152	185	470	7021	52
9	178	172	507	6891	51
10	204	158	545	6760	50
11	0.47229	0.88144	0.53582	1.86630	49
12	255	130	620	6499	48
13	281	117	657	6369	47
14	306	103	694	6239	46
15	332	089	732	6109	45
16	358	075	769	5979	44
17	383	062	807	5850	43
18	409	048	844	5720	42
19	434	034	882	5591	41
20	460	020	920	5462	40
21	0.47486	0.88006	0.53957	1.85333	39
22	511	0.87993	995	5204	38
23	537	979	0.54032	5075	37
24	562	965	070	4946	36
25	588	951	107	4818	35
26	614	937	145	4689	34
27	639	923	183	4561	33
28	665	909	220	4433	32
29	690	896	258	4305	31
30	716	882	296	4177	30
31	0.47741	0.87868	0.54333	1.84049	29
32	767	854	371	3922	28
33	793	840	409	3794	27
34	818	826	446	3667	26
35	844	812	484	3540	25
36	869	798	522	3413	24
37	895	784	560	3286	23
38	920	770	597	3159	22
39	946	756	635	3033	21
40	971	743	673	2906	20
41	0.47997	0.87729	0.54711	1.82780	19
42	0.48022	715	748	2654	18
43	048	701	786	2528	17
44	073	687	824	2402	16
45	099	673	862	2276	15
46	124	659	900	2150	14
47	150	645	938	2025	13
48	175	631	975	1899	12
49	201	617	0.55013	1774	11
50	226	603	051	1649	10
51	0.48252	0.87589	0.55089	1.81524	9
52	277	575	127	1399	8
53	303	560	165	1274	7
54	328	546	208	1149	6
55	354	532	241	1025	5
56	379	518	279	0901	4
57	405	504	317	0777	3
58	430	490	355	0653	2
59	456	476	393	0529	1
60	481	462	431	0405	0
	Cosinus	Sinus	Cotang	Tang.	′

61°

29°

′	Sinus.	Cosinus	Tang.	Cotang	
0	0.48481	0.87462	0.55431	1.80405	60
1	506	448	469	0281	59
2	532	434	507	0158	58
3	557	420	545	0034	57
4	583	405	583	1.79911	56
5	608	391	621	9788	55
6	634	377	659	9665	54
7	659	363	697	9542	53
8	684	349	736	9419	52
9	710	335	774	9296	51
10	735	321	812	9174	50
11	0.48761	0.87306	0.55850	1.79051	49
12	786	292	888	8929	48
13	811	278	926	8807	47
14	837	264	964	8685	46
15	862	250	0.56003	8563	45
16	887	235	041	8441	44
17	913	221	079	8319	43
18	938	207	117	8198	42
19	964	193	156	8077	41
20	989	178	194	7955	40
21	0.49014	0.87164	0.56232	1.77834	39
22	040	150	270	7713	38
23	065	136	309	7592	37
24	090	121	347	7471	36
25	116	107	385	7351	35
26	141	093	424	7230	34
27	166	079	462	7110	33
28	192	064	500	6990	32
29	217	050	539	6869	31
30	242	036	577	6749	30
31	0.49268	0.87021	0.56616	1.76629	29
32	293	007	654	6510	28
33	318	0.86993	693	6390	27
34	344	978	731	6271	26
35	369	964	770	6151	25
36	394	949	808	6032	24
37	419	935	846	5913	23
38	445	921	885	5794	22
39	470	906	923	5675	21
40	495	892	962	5556	20
41	0.49521	0.86878	0.57000	1.75437	19
42	546	863	039	5319	18
43	571	849	078	5200	17
44	596	834	116	5082	16
45	621	820	155	4964	15
46	647	805	193	4846	14
47	672	791	232	4728	13
48	697	777	271	4610	12
49	723	762	309	4492	11
50	748	748	348	4375	10
51	0.49773	0.86733	0.57386	1.74257	9
52	798	719	425	4140	8
53	824	704	464	4022	7
54	849	690	503	3905	6
55	874	675	541	3788	5
56	899	661	580	3671	4
57	924	646	619	3555	3
58	950	632	658	3438	2
59	975	617	696	3321	1
60	0.50000	603	735	3205	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	′

60°

30°

'	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.50000	0.86603	0.57735	1.73205	60
1	025	588	774	3089	59
2	050	573	813	2973	58
3	076	559	851	2857	57
4	101	544	890	2741	56
5	126	530	929	2625	55
6	151	515	968	2509	54
7	176	501	0.58007	2393	53
8	201	486	046	2278	52
9	227	471	085	2163	51
10	252	457	124	2047	50
11	0.50277	0.86442	0.58162	1.71932	49
12	302	427	201	1817	48
13	327	413	240	1702	47
14	352	398	279	1588	46
15	377	384	318	1473	45
16	403	369	357	1358	44
17	428	354	396	1244	43
18	453	340	435	1129	42
19	478	325	474	1015	41
20	503	310	513	0901	40
21	0.50528	0.86295	0.58552	1.70787	39
22	553	281	591	0673	38
23	578	266	631	0560	37
24	603	251	670	0446	36
25	628	237	709	0332	35
26	654	222	748	0219	34
27	679	207	787	0106	33
28	704	192	826	1.69992	32
29	729	178	865	9879	31
30	754	163	904	9766	30
31	0.50779	0.86148	0.58944	1.69653	29
32	804	133	983	9541	28
33	829	119	0.59022	9428	27
34	854	104	061	9315	26
35	879	089	101	9203	25
36	904	074	140	9091	24
37	929	059	179	8979	23
38	954	045	218	8866	22
39	979	030	258	8754	21
40	0.51004	015	297	8643	20
41	0.51029	0.86000	0.59336	1.68531	19
42	054	0.85985	376	8419	18
43	079	970	415	8308	17
44	104	956	454	8196	16
45	129	941	494	8085	15
46	154	926	533	7974	14
47	179	911	573	7863	13
48	204	896	612	7752	12
49	229	881	651	7641	11
50	254	866	691	7530	10
51	0.51279	0.85851	0.59730	1.67419	9
52	304	836	770	7309	8
53	329	821	809	7198	7
54	354	806	849	7088	6
55	379	792	888	6978	5
56	404	777	928	6867	4
57	429	762	967	6757	3
58	454	747	0.60007	6647	2
59	479	732	046	6538	1
60	504	717	086	6428	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	'

59°

31°

'	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.51504	0.85717	0.60086	1.66428	60
1	529	702	126	6318	59
2	554	687	165	6209	58
3	579	672	205	6099	57
4	604	657	245	5990	56
5	628	642	284	5881	55
6	653	627	324	5772	54
7	678	612	364	5663	53
8	703	597	403	5554	52
9	728	582	443	5445	51
10	753	567	483	5337	50
11	0.51778	0.85551	0.60522	1.65228	49
12	803	536	562	5120	48
13	828	521	602	5011	47
14	852	506	642	4903	46
15	877	491	681	4795	45
16	902	476	721	4687	44
17	927	461	761	4579	43
18	952	446	801	4471	42
19	977	431	841	4363	41
20	0.52002	416	881	4256	40
21	0.52026	0.85400	0.60921	1.64148	39
22	051	385	960	4041	38
23	076	370	0.61000	3934	37
24	101	355	040	3826	36
25	126	340	080	3719	35
26	151	325	120	3612	34
27	175	310	160	3505	33
28	200	294	200	3398	32
29	225	279	240	3292	31
30	250	264	280	3185	30
31	0.52275	0.85249	0.61320	1.63079	29
32	299	234	360	2972	28
33	324	218	400	2866	27
34	349	203	440	2760	26
35	374	188	480	2654	25
36	399	173	520	2548	24
37	423	157	561	2442	23
38	448	142	601	2336	22
39	473	127	641	2230	21
40	498	112	681	2125	20
41	0.52522	0.85096	0.61721	1.62019	19
42	547	081	761	1914	18
43	572	066	801	1808	17
44	597	051	842	1703	16
45	622	035	882	1598	15
46	646	020	922	1493	14
47	671	005	962	1388	13
48	696	0.84989	0.62003	1283	12
49	720	974	043	1179	11
50	745	959	083	1074	10
51	0.52770	0.84943	0.62124	1.60970	9
52	794	928	164	0865	8
53	819	913	204	0761	7
54	844	897	245	0657	6
55	869	882	285	0553	5
56	893	866	325	0449	4
57	918	851	366	0345	3
58	943	836	406	0241	2
59	967	820	446	0137	1
60	992	805	487	0033	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	'

58°

32°

′	Sinus.	Cosinus	Tang	Cotang	
0	0.52992	0.84805	0.62487	1.60033	60
1	0.53017	789	527	1.59930	59
2	041	774	568	9826	58
3	066	759	608	9723	57
4	091	743	649	9620	56
5	115	728	689	9517	55
6	140	712	730	9414	54
7	164	697	770	9311	53
8	189	681	811	9208	52
9	214	666	852	9105	51
10	238	650	892	9002	50
11	0.53263	0.84635	0.62933	1.58900	49
12	288	619	973	8797	48
13	312	604	0.63014	8695	47
14	337	588	055	8593	46
15	361	573	095	8490	45
16	386	557	136	8388	44
17	411	542	177	8286	43
18	435	526	217	8184	42
19	460	511	258	8083	41
20	484	495	299	7981	40
21	0.53509	0.84480	0.63340	1.57879	39
22	534	464	380	7778	38
23	558	448	421	7676	37
24	583	433	462	7575	36
25	607	417	503	7474	35
26	632	402	544	7372	34
27	656	386	584	7271	33
28	681	370	625	7170	32
29	705	355	666	7069	31
30	730	339	707	6969	30
31	0.53754	0.84324	0.63748	1.56868	29
32	779	308	789	6767	28
33	804	292	830	6667	27
34	828	277	871	6566	26
35	853	261	912	6466	25
36	877	245	953	6366	24
37	902	230	994	6265	23
38	926	214	0.64035	6165	22
39	951	198	076	6065	21
40	975	182	117	5966	20
41	0.54000	0.84167	0.64158	1.55866	19
42	024	151	199	5766	18
43	049	135	240	5666	17
44	073	120	281	5567	16
45	097	104	322	5467	15
46	122	088	363	5368	14
47	146	072	404	5269	13
48	171	057	446	5170	12
49	195	041	487	5071	11
50	220	025	528	4972	10
51	0.54244	0.84009	0.64569	1.54873	9
52	269	0.83994	610	4774	8
53	293	978	652	4675	7
54	317	962	693	4576	6
55	342	946	734	4478	5
56	366	930	775	4379	4
57	391	915	817	4281	3
58	415	899	858	4183	2
59	439	883	899	4085	1
60	461	867	941	3986	0
	Cosinus.	Sinus	Cotang.	Tang.	′

57°

33°

′	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.54464	0.83867	0.64941	1.53986	60
1	488	851	982	3888	59
2	513	835	0.65023	3791	58
3	537	819	065	3693	57
4	561	804	106	3595	56
5	586	788	148	3497	55
6	610	772	189	3400	54
7	635	756	231	3302	53
8	659	740	272	3205	52
9	683	724	314	3107	51
10	708	708	355	3010	50
11	0.54732	0.83692	0.65397	1.52913	49
12	756	676	438	2816	48
13	781	660	480	2719	47
14	805	645	521	2622	46
15	829	629	563	2525	45
16	854	613	604	2429	44
17	878	597	646	2332	43
18	902	581	688	2235	42
19	927	565	729	2139	41
20	951	549	771	2043	40
21	0.54975	0.83533	0.65813	1.51946	39
22	999	517	854	1850	38
23	0.55021	501	896	1754	37
24	048	485	938	1658	36
25	072	469	980	1562	35
26	097	453	0.66021	1466	34
27	121	437	063	1370	33
28	145	421	105	1275	32
29	169	405	147	1179	31
30	194	389	189	1084	30
31	0.55218	0.83373	0.66230	1.50988	29
32	242	356	272	0893	28
33	266	340	314	0797	27
34	291	324	356	0702	26
35	315	308	398	0607	25
36	339	292	440	0512	24
37	363	276	482	0417	23
38	388	260	524	0322	22
39	412	244	566	0228	21
40	436	228	608	0133	20
41	0.55460	0.83212	0.66650	1.50038	19
42	484	195	692	1.49944	18
43	509	179	734	9849	17
44	533	163	776	9755	16
45	557	147	818	9661	15
46	581	131	860	9566	14
47	605	115	902	9472	13
48	630	098	944	9378	12
49	654	082	986	9284	11
50	678	066	0.67028	9190	10
51	0.55702	0.83050	0.67071	1.49097	9
52	726	034	113	9003	8
53	750	017	155	8909	7
54	775	001	197	8816	6
55	799	0.82985	239	8722	5
56	823	969	282	8629	4
57	847	953	324	8536	3
58	871	936	366	8442	2
59	895	920	409	8349	1
60	919	904	451	8256	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	′

56°

34°

'	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.55919	0.82904	0.67451	1.48256	60
1	943	887	493	8163	59
2	968	871	536	8070	58
3	992	855	578	7977	57
4	0,56016	839	620	7885	56
5	040	822	663	7792	55
6	064	806	705	7699	54
7	088	790	748	7607	53
8	112	773	790	7514	52
9	136	757	832	7422	51
10	160	741	875	7330	50
11	0.56184	0.82724	0.67917	1.47238	49
12	208	708	960	7146	48
13	232	692	0.68002	7054	47
14	256	675	045	6962	46
15	280	659	088	6870	45
16	305	643	130	6778	44
17	329	626	173	6686	43
18	353	610	215	6595	42
19	377	593	258	6503	41
20	401	577	301	6411	40
21	0.56425	0.82561	0.68343	1.46320	39
22	449	544	386	6229	38
23	473	528	429	6137	37
24	497	511	471	6046	36
25	521	495	514	5955	35
26	545	478	557	5864	34
27	569	462	599	5773	33
28	593	446	642	5682	32
29	617	429	685	5592	31
30	641	413	728	5501	30
31	0.56665	0.82396	0.68771	1.45410	29
32	689	380	814	5320	28
33	713	363	857	5229	27
34	736	347	900	5139	26
35	760	330	942	5048	25
36	784	314	985	4958	24
37	808	297	0.69028	4868	23
38	832	281	071	4778	22
39	856	264	114	4688	21
40	880	248	157	4598	20
41	0.56904	0.82231	0.69200	1.44508	19
42	928	214	243	4418	18
43	952	198	286	4329	17
44	976	181	329	4239	16
45	0.57000	165	372	4149	15
46	024	148	416	4060	14
47	047	132	459	3970	13
48	071	115	502	3881	12
49	095	09	545	3792	11
50	119	082	588	3703	10
51	0.57143	0.82065	0.69631	1.43614	9
52	167	048	675	3525	8
53	191	032	718	3436	7
54	215	015	761	3347	6
55	238	0.81999	804	3258	5
56	262	982	847	3169	4
57	286	965	891	3080	3
58	310	949	934	2992	2
59	334	932	977	2903	1
60	358	915	0.70021	2815	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	'

55°

35°

'	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.57358	0.81915	0.70021	1.42815	60
1	381	899	064	2726	59
2	405	882	107	2638	58
3	429	865	151	2550	57
4	453	848	194	2462	56
5	477	832	238	2374	55
6	501	815	281	2286	54
7	524	798	325	2198	53
8	548	781	368	2110	52
9	572	765	412	2022	51
10	596	748	455	1934	50
11	0.57619	0.81731	0.70499	1.41847	49
12	643	714	542	1759	48
13	667	698	586	1672	47
14	691	681	629	1584	46
15	715	664	673	1497	45
16	738	647	717	1409	44
17	762	631	760	1322	43
18	786	614	804	1235	42
19	809	597	848	1148	41
20	833	580	891	1061	40
21	0.57857	0.81563	0.70935	1.40974	39
22	881	546	979	0887	38
23	904	530	0.71023	0800	37
24	928	513	066	0714	36
25	952	496	110	0627	35
26	976	479	154	0540	34
27	999	462	198	0454	33
28	0.58023	445	242	0367	32
29	047	428	285	0281	31
30	070	412	329	0195	30
31	0.58094	0.81395	0.71373	1.40109	29
32	118	378	417	0022	28
33	141	361	461	1.39936	27
34	165	344	505	9850	26
35	189	327	549	9764	25
36	212	310	593	9679	24
37	236	293	637	9593	23
38	260	276	681	9507	22
39	283	259	725	9421	21
40	307	242	769	9336	20
41	0.58330	0.81225	0.71813	1.39250	19
42	354	208	857	9165	18
43	378	191	901	9079	17
44	401	174	946	8994	16
45	425	157	990	8909	15
46	449	140	0.72034	8824	14
47	472	123	078	8738	13
48	496	106	122	8654	12
49	519	089	166	8568	11
50	543	072	211	8484	10
51	0.58567	0.81055	0.72255	1.38399	9
52	590	038	299	8314	8
53	614	021	344	8229	7
54	637	004	388	8145	6
55	661	0.80987	432	8060	5
56	684	970	477	7976	4
57	708	953	521	7891	3
58	731	936	565	7807	2
59	755	919	610	7722	1
60	779	902	654	7638	0
	Cosinus	Sinus.	Cotang.	Tang.	'

54°

36°

'	Sinus.	Cosinus	Tang.	Cotang.	
0	0.58779	0.80902	0.72654	1.37638	60
1	802	885	699	7554	59
2	826	867	743	7470	58
3	849	850	788	7386	57
4	873	833	832	7302	56
5	896	816	877	7218	55
6	920	799	921	7134	54
7	943	782	966	7050	53
8	967	765	0.73010	6967	52
9	990	748	055	6883	51
10	0.59014	730	100	6800	50
11	0.59037	0.80713	0.73144	1.36716	49
12	061	696	189	6633	48
13	084	679	234	6549	47
14	108	662	278	6466	46
15	131	644	323	6383	45
16	154	627	368	6300	44
17	178	610	413	6217	43
18	201	593	457	6133	42
19	225	576	502	6051	41
20	248	558	547	5968	40
21	0.59272	0.80541	0.73592	1.35885	39
22	295	524	637	5802	38
23	318	507	681	5719	37
24	342	489	726	5637	36
25	365	0.80472	771	5554	35
26	389	455	816	5472	34
27	412	438	861	5389	33
28	435	420	906	5307	32
29	459	403	951	5224	31
30	482	386	996	5142	30
31	0.59506	0.80368	0.74041	1.35060	29
32	529	351	086	4978	28
33	552	334	131	4896	27
34	576	316	176	4814	26
35	599	299	221	4732	25
36	622	282	267	4650	24
37	646	264	312	4568	23
38	669	247	357	4487	22
39	693	230	402	4405	21
40	716	212	447	4323	20
41	0.59739	0.80195	0.74492	1.34242	19
42	763	178	538	4160	18
43	786	160	583	4079	17
44	809	143	628	3998	16
45	832	125	674	3916	15
46	856	108	719	3835	14
47	879	091	764	3754	13
48	902	073	810	3673	12
49	926	056	855	3592	11
50	949	038	900	3511	10
51	0.59972	0.80021	0.74946	1.33430	9
52	995	003	991	3349	8
53	0.60019	0.79986	0.75037	3268	7
54	042	968	082	3187	6
55	065	951	128	3107	5
56	089	934	173	3026	4
57	112	916	219	2946	3
58	135	899	264	2865	2
59	158	881	310	2785	1
60	181	864	355	2704	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	'

53°

37°

'	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.60181	0.79864	0.75355	1.32704	60
1	205	846	401	2624	59
2	228	829	447	2544	58
3	251	811	492	2464	57
4	274	793	538	2384	56
5	298	776	584	2304	55
6	321	758	629	2224	54
7	344	741	675	2144	53
8	367	723	721	2064	52
9	390	706	767	1984	51
10	414	688	812	1904	50
11	0.60437	0.79671	0.75858	1.31825	49
12	460	653	904	1745	48
13	483	635	950	1666	47
14	506	618	996	1586	46
15	529	600	0.76042	1507	45
16	553	583	088	1427	44
17	576	565	134	1348	43
18	599	547	180	1269	42
19	622	530	226	1190	41
20	645	512	272	1110	40
21	0.60668	0.79494	0.76318	1.31031	39
22	691	477	364	0952	38
23	714	459	410	0873	37
24	738	441	456	0795	36
25	761	424	502	0716	35
26	784	406	548	0637	34
27	807	388	594	0558	33
28	830	371	640	0480	32
29	853	353	686	0401	31
30	876	335	733	0323	30
31	0.60899	0.79318	0.76779	1.30244	29
32	922	300	825	0166	28
33	945	282	871	0087	27
34	968	264	918	0009	26
35	991	247	964	1.29931	25
36	0.61015	229	0.77010	9853	24
37	038	211	057	9775	23
38	061	193	103	9696	22
39	084	176	149	9618	21
40	107	158	196	9541	20
41	0.61130	0.79140	0.77242	1.29463	19
42	153	122	289	9385	18
43	176	105	335	9307	17
44	199	087	382	9229	16
45	222	069	428	9152	15
46	245	051	475	9074	14
47	268	033	521	8997	13
48	291	015	568	8919	12
49	314	0.78998	615	8842	11
50	337	980	661	8764	10
51	0.61360	0.78962	0.77708	1.28687	9
52	383	944	754	8610	8
53	406	926	801	8533	7
54	429	908	848	8456	6
55	451	891	895	8379	5
56	474	873	941	8302	4
57	497	855	988	8225	3
58	520	837	0.78035	8148	2
59	543	819	082	8071	1
60	566	804	129	7994	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	'

52°

38°

'	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.61566	0.78801	0.78129	1.27994	60
1	589	783	175	7917	59
2	612	765	222	7841	58
3	635	747	269	7764	57
4	658	729	316	7688	56
5	681	711	363	7611	55
6	704	693	410	7535	54
7	726	676	457	7458	53
8	749	658	504	7382	52
9	772	640	551	7306	51
10	795	622	598	7230	50
11	0.61818	0.78604	0.78645	1.27153	49
12	841	586	692	7077	48
13	864	568	739	7001	47
14	887	550	786	6925	46
15	909	532	834	6849	45
16	932	514	881	6774	44
17	955	496	928	6698	43
18	978	478	975	6622	42
19	0.62001	460	0.79022	6546	41
20	024	442	070	6471	40
21	0.62046	0.78424	0.79117	1.26395	39
22	069	405	164	6319	38
23	092	387	212	6244	37
24	115	369	259	6169	36
25	138	351	306	6093	35
26	160	333	354	6018	34
27	183	315	401	5943	33
28	206	297	449	5867	32
29	229	279	496	5792	31
30	251	261	544	5717	30
31	0.62274	0.78243	0.79591	1.25642	29
32	297	225	639	5567	28
33	320	206	686	5492	27
34	342	188	734	5417	26
35	365	170	781	5343	25
36	388	152	829	5268	24
37	411	134	877	5193	23
38	433	116	924	5118	22
39	456	098	972	5044	21
40	479	079	0.80020	4969	20
41	0.62502	0.78061	0.80067	1.24895	19
42	524	043	115	4820	18
43	547	025	163	4746	17
44	570	007	211	4672	16
45	592	0.77988	258	4597	15
46	615	970	306	4523	14
47	638	952	354	4449	13
48	660	934	402	4375	12
49	683	916	450	4301	11
50	706	897	498	4227	10
51	0.62728	0.77879	0.80546	1.24153	9
52	751	861	594	4079	8
53	774	843	642	4005	7
54	796	824	690	3931	6
55	819	806	738	3858	5
56	842	788	786	3784	4
57	864	769	834	3710	3
58	887	751	882	3637	2
59	909	733	930	3563	1
60	932	715	978	3490	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	'

51°

39°

'	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.62932	0.77715	0.80978	1.23490	60
1	955	696	0.81027	3416	59
2	977	678	075	3343	58
3	0.63000	660	123	3270	57
4	022	641	171	3196	56
5	045	623	220	3123	55
6	068	605	268	3050	54
7	090	586	316	2977	53
8	113	568	364	2904	52
9	135	550	413	2831	51
10	158	531	461	2758	50
11	0.63180	0.77513	0.81510	1.22685	49
12	203	494	558	2612	48
13	225	476	606	2539	47
14	248	458	655	2467	46
15	271	439	703	2394	45
16	293	421	752	2321	44
17	316	402	800	2249	43
18	338	384	849	2176	42
19	361	366	898	2104	41
20	383	347	946	2031	40
21	0.63406	0.77329	0.81995	1.21959	39
22	428	310	0.82044	1886	38
23	451	292	092	1814	37
24	473	273	141	1742	36
25	496	255	190	1670	35
26	518	236	238	1598	34
27	540	218	287	1526	33
28	563	199	336	1454	32
29	585	181	385	1382	31
30	608	162	434	1310	30
31	0.63630	0.77144	0.82483	1.21238	29
32	653	125	531	1166	28
33	675	107	580	1094	27
34	698	088	629	1023	26
35	720	070	678	0951	25
36	742	051	727	0879	24
37	765	033	776	0808	23
38	787	014	825	0736	22
39	810	0.76996	874	0665	21
40	832	977	923	0593	20
41	0.63854	0.76959	0.82972	1.20522	19
42	877	940	0.83022	0451	18
43	899	921	071	0379	17
44	922	903	120	0308	16
45	944	884	169	0237	15
46	966	866	218	0166	14
47	989	847	268	0095	13
48	0.64011	828	317	0024	12
49	033	810	366	1.19953	11
50	056	791	415	9882	10
51	0.64078	0.76772	0.83465	1.19811	9
52	100	754	514	9740	8
53	123	735	564	9669	7
54	145	717	613	9599	6
55	167	698	662	9528	5
56	190	679	712	9457	4
57	212	661	761	9387	3
58	234	642	811	9316	2
59	256	623	860	9246	1
60	279	604	910	9175	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	'

50°

40°

'	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.64279	0.76604	0.83910	1.19175	60
1	301	586	960	9105	59
2	323	567	0.84009	9035	58
3	346	548	059	8964	57
4	368	530	108	8894	56
5	390	511	158	8824	55
6	412	492	208	8754	54
7	435	473	258	8684	53
8	457	455	307	8614	52
9	479	436	357	8544	51
10	501	417	407	8474	50
11	0.64524	0.76398	0.84457	1.18404	49
12	546	380	507	8334	48
13	568	361	556	8264	47
14	590	342	606	8194	46
15	612	323	656	8125	45
16	635	304	706	8055	44
17	657	286	756	7986	43
18	679	267	806	7916	42
19	701	248	856	7846	41
20	723	229	906	7777	40
21	0.64746	0.76210	0.84956	1.17708	39
22	768	192	0.85006	7638	38
23	790	173	057	7569	37
24	812	154	107	7500	36
25	834	135	157	7430	35
26	856	116	207	7361	34
27	878	097	257	7292	33
28	901	078	307	7223	32
29	923	059	358	7154	31
30	945	041	408	7085	30
31	0.64967	0.76022	0.85458	1.17016	29
32	989	003	509	6947	28
33	0.65011	0.75984	559	6878	27
34	033	965	609	6809	26
35	055	946	660	6741	25
36	077	927	710	6672	24
37	099	908	761	6603	23
38	122	889	811	6535	22
39	144	870	862	6466	21
40	166	851	912	6398	20
41	0.65188	0.75832	0.85963	1.16329	19
42	210	813	0.86014	6261	18
43	232	794	064	6192	17
44	254	775	115	6124	16
45	276	756	166	6056	15
46	298	737	216	5987	14
47	320	718	267	5919	13
48	342	699	318	5851	12
49	364	680	368	5783	11
50	386	661	419	5715	10
51	0.65408	0.75642	0.86470	1.15647	9
52	430	623	521	5579	8
53	452	604	572	5511	7
54	474	585	623	5443	6
55	496	566	674	5375	5
56	518	547	725	5308	4
57	540	528	776	5240	3
58	562	509	827	5172	2
59	584	490	878	5104	1
60	606	471	929	5037	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	'

49°

41°

'	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.65606	0.75471	0.86929	1.15037	60
1	628	452	980	4970	59
2	650	433	0.87031	4902	58
3	672	414	082	4834	57
4	694	395	133	4767	56
5	716	375	184	4699	55
6	738	356	236	4632	54
7	759	337	287	4565	53
8	781	318	338	4498	52
9	803	299	389	4430	51
10	825	280	441	4363	50
11	0.65847	0.75261	0.87492	1.14296	49
12	869	241	543	4229	48
13	891	222	595	4162	47
14	913	203	646	4095	46
15	935	184	698	4028	45
16	956	165	749	3961	44
17	978	146	801	3894	43
18	0.66000	126	852	3828	42
19	022	107	904	3761	41
20	044	088	955	3694	40
21	0.66066	0.75069	0.88007	1.13627	39
22	088	050	059	3561	38
23	109	030	110	3494	37
24	131	011	162	3428	36
25	153	0.74992	214	3361	35
26	175	973	265	3295	34
27	197	953	317	3228	33
28	218	934	369	3162	32
29	240	915	421	3096	31
30	262	896	473	3029	30
31	0.66284	0.74876	0.88524	1.12963	29
32	306	857	576	2897	28
33	327	838	628	2831	27
34	349	818	680	2765	26
35	371	799	732	2699	25
36	393	780	784	2633	24
37	414	760	836	2567	23
38	436	741	888	2501	22
39	458	722	940	2435	21
40	480	703	992	2369	20
41	0.66501	0.74683	0.89045	1.12303	19
42	523	664	097	2238	18
43	545	644	149	2172	17
44	566	625	201	2106	16
45	588	606	253	2041	15
46	610	586	306	1975	14
47	632	567	358	1909	13
48	653	548	410	1844	12
49	675	528	463	1778	11
50	697	509	515	1713	10
51	0.66718	0.74490	0.89567	1.11648	9
52	740	470	620	1582	8
53	762	451	672	1517	7
54	783	431	725	1452	6
55	805	412	777	1387	5
56	827	392	830	1321	4
57	848	373	883	1256	3
58	870	353	935	1191	2
59	891	334	988	1126	1
60	913	314	0.90040	1061	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	'

48°

42°

'	Sinus.	Cosinus	Tang.	Cotang.	
0	0.66913	0.74314	0.90040	1.11061	60
1	935	295	093	0996	59
2	956	276	146	0931	58
3	978	256	199	0867	57
4	999	237	251	0802	56
5	0.67021	217	304	0737	55
6	043	198	357	0672	54
7	064	178	410	0607	53
8	086	159	463	0543	52
9	107	139	516	0478	51
10	129	120	569	0414	50
11	0.67151	0.74100	0.90621	1.10349	49
12	172	080	674	0285	48
13	194	061	727	0220	47
14	215	041	781	0156	46
15	237	022	834	0091	45
16	258	002	887	0027	44
17	280	0.73983	940	1.09963	43
18	301	963	993	9899	42
19	323	944	0.91046	9834	41
20	344	924	099	9770	40
21	0.67366	0.73904	0.91153	1.09706	39
22	387	885	206	9642	38
23	409	865	259	9578	37
24	430	846	313	9514	36
25	452	826	366	9450	35
26	473	806	419	9386	34
27	495	787	473	9322	33
28	516	767	526	9258	32
29	538	747	580	9195	31
30	559	728	633	9131	30
31	0.67580	0.73708	0.91687	1.09067	29
32	602	688	740	9003	28
33	623	669	794	8940	27
34	645	649	847	8876	26
35	666	629	901	8813	25
36	688	610	955	8749	24
37	709	590	0.92008	8686	23
38	730	570	062	8622	22
39	752	551	116	8559	21
40	773	531	170	8496	20
41	0.67795	0.73511	0.92223	1.08432	19
42	816	491	277	8369	18
43	837	472	331	8306	17
44	859	452	385	8243	16
45	880	432	439	8179	15
46	901	412	493	8116	14
47	923	393	547	8053	13
48	944	373	601	7990	12
49	965	353	655	7927	11
50	987	333	709	7864	10
51	0.68008	0.73314	0.92763	1.07801	9
52	029	294	817	7738	8
53	051	274	872	7676	7
54	072	254	926	7613	6
55	093	234	980	7550	5
56	115	215	0.93034	7487	4
57	136	195	088	7425	3
58	157	175	143	7362	2
59	179	155	197	7299	1
60	200	135	252	7237	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	'

47°

43°

'	Sinus.	Cosinus	Tang.	Cotang.	
0	0.68200	0.73135	0.93252	1.07237	60
1	221	116	306	7174	59
2	242	096	360	7112	58
3	264	076	415	7049	57
4	285	056	469	6987	56
5	306	036	524	6925	55
6	327	016	578	6862	54
7	349	0.72996	633	6800	53
8	370	976	688	6738	52
9	391	957	742	6676	51
10	412	937	797	6613	50
11	0.68433	0.72917	0.93852	1.06551	49
12	455	897	906	6489	48
13	476	877	961	6427	47
14	497	857	0.94016	6365	46
15	518	837	071	6303	45
16	539	817	125	6241	44
17	561	797	180	6179	43
18	582	777	235	6117	42
19	603	757	290	6056	41
20	624	737	345	5994	40
21	0.68645	0.72717	0.94400	1.05932	39
22	666	697	455	5870	38
23	688	677	510	5809	37
24	709	657	565	5747	36
25	730	637	620	5685	35
26	751	617	676	5624	34
27	772	597	731	5562	33
28	793	577	786	5501	32
29	814	557	841	5439	31
30	835	537	896	5378	30
31	0.68857	0.72517	0.94952	1.05317	29
32	878	497	0.95007	5255	28
33	899	477	062	5194	27
34	920	457	118	5133	26
35	941	437	173	5072	25
36	962	417	229	5010	24
37	983	397	284	4949	23
38	0.69004	377	340	4888	22
39	025	357	395	4827	21
40	046	337	451	4766	20
41	0.69067	0.72317	0.95506	1.04705	19
42	088	297	562	4644	18
43	109	277	618	4583	17
44	130	257	673	4522	16
45	151	236	729	4461	15
46	172	216	785	4401	14
47	193	196	841	4340	13
48	214	176	897	4279	12
49	235	156	952	4218	11
50	256	136	0.96008	4158	10
51	0.69277	0.72116	0.96064	1.04097	9
52	298	095	120	4036	8
53	319	075	176	3976	7
54	340	055	232	3915	6
55	361	035	288	3855	5
56	382	015	344	3794	4
57	403	0.71995	400	3734	3
58	424	974	457	3674	2
59	445	954	513	3613	1
60	466	934	569	3553	0
	Cosinus	Sinus.	Cotang.	Tang.	'

46°

44°

′	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	
0	0.69466	0.71934	0.96569	1.03553	60
1	487	914	625	3493	59
2	508	894	681	3432	58
3	529	873	738	3372	57
4	549	853	794	3312	56
5	570	833	850	3252	55
6	591	813	907	3192	54
7	612	792	963	3132	53
8	633	772	0.97020	3072	52
9	654	752	076	3012	51
10	675	732	133	2952	50
11	0.69696	0.71711	0.97189	1.02892	49
12	717	691	246	2832	48
13	737	671	302	2772	47
14	758	650	359	2713	46
15	779	630	416	2653	45
16	800	610	472	2593	44
17	821	590	529	2533	43
18	842	569	586	2474	42
19	862	549	643	2414	41
20	883	529	700	2355	40
21	0.69904	0.71508	0.97756	1.02295	39
22	925	488	813	2236	38
23	946	468	870	2176	37
24	966	447	927	2117	36
25	987	427	984	2057	35
26	0.70008	407	0.98041	1998	34
27	029	386	098	1939	33
28	049	366	155	1879	32
29	070	345	213	1820	31
30	091	325	270	1761	30
31	0.70112	0.71305	0.98327	1.01702	29
32	132	284	384	1642	28
33	153	264	441	1583	27
34	174	243	499	1524	26
35	195	223	556	1465	25
36	215	203	613	1406	24
37	236	182	671	1347	23
38	257	162	728	1288	22
39	277	141	786	1229	21
40	298	121	843	1170	20
41	0.70319	0.71100	0.98901	1.01112	19
42	339	080	958	1053	18
43	360	059	0.99016	0994	17
44	381	039	073	0935	16
45	401	019	131	0876	15
46	422	0.70998	189	0818	14
47	443	978	247	0759	13
48	463	957	304	0701	12
49	484	937	362	0642	11
50	505	916	420	0583	10
51	0.70525	0.70896	0.99478	1.00525	9
52	546	875	536	0467	8
53	567	855	594	0408	7
54	587	834	652	0350	6
55	608	813	710	0291	5
56	628	793	768	0233	4
57	649	772	826	0175	3
58	670	752	884	0116	2
59	690	731	942	0058	1
60	711	711	1.00000	1.00000	0
	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	′

45°

CINQUIÈME PARTIE.

GÉOMÉTRIE DES COURBES

OU NOTIONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

1139. *Le but de la géométrie analytique* est d'étudier les propriétés des *figures* par les procédés du calcul ou de l'*analyse algébrique*.

C'est Descartes qui a trouvé le moyen de représenter des figures par des équations, et, par contre, de ramener certains problèmes de calcul à des questions de géométrie; c'est surtout sous ce dernier rapport que la géométrie analytique vient en aide d'une manière efficace à l'ingénieur.

1140. La géométrie analytique, comme la géométrie élémentaire, se divise en deux parties (568) : la *géométrie plane* ou à *deux dimensions*, et la *géométrie de l'espace* ou à *trois dimensions*.

DÉTERMINATION D'UNE LIGNE.

1141. Nous avons vu que la position d'un point dans un plan ou dans l'espace est fixée quand on connaît ses coordonnées (1085, 1086). Pour qu'une ligne soit déterminée, il suffit que ses divers points soient fixés, et que par conséquent on connaisse les coordonnées de ces points.

Lorsqu'une même relation algébrique existe entre les coordonnées de chacun des points d'une ligne, il est de la plus grande facilité de déterminer autant de points qu'on veut de la ligne, et, par suite, de tracer cette ligne, en raccordant, aussi exactement que possible, les points obtenus. S'il s'agit, par exemple, d'une courbe plane, donnant une valeur à l'une des coordonnées, la relation sert à déterminer l'autre coordonnée du point correspondant de la courbe (464).

Supposant, pour fixer les idées, que les coordonnées de chacun des points d'une ligne sont liées par la relation $y = 3x + 2^m$, si l'on fait $x = 4^m$, par exemple, le point de la ligne qui correspondra à cette valeur de x aura pour ordonnée $y = 3 \times 4 + 2 = 14^m$. Donnant à x une nouvelle valeur, on aurait une autre valeur correspondante de y, et par suite un second point de la ligne.

Lorsque la courbe n'est pas plane, comme on ne peut prendre arbitrairement qu'une de ses coordonnées, les deux autres, qui en dépendent, restent inconnues et ne peuvent être déterminées que par deux relations ou équations (476).

1142. *Coordonnées polaires.* Un point M est aussi déterminé dans un plan MOx, quand on connaît l'angle M$Ox = \alpha$, que fait avec l'axe Ox la droite OM qui joint le *pôle* O et le point M, et la distance OM $= \rho$, qui prend le nom de *rayon vecteur*.

Fig. 264.

Les deux quantités α et ρ sont appelées *coordonnées polaires.*

Lorsqu'une même relation existe entre les coordonnées polaires de chacun des points d'une ligne, on peut, comme dans le cas précédent, déterminer autant de points que l'on veut, et par suite tracer la ligne.

1143. *Coordonnées focales.* La position d'un point M est aussi fixée dans un plan, quand on connaît ses distances MF $= \rho$, MF' $= \rho'$ à deux points fixes F, F', pris dans ce plan et appelés *foyers;* seulement, les longueurs ρ et ρ', que l'on nomme *rayons vecteurs* ou *coordonnées focales*, déterminent un second point M', symétrique de M par rapport à FF'; et une équation entre les rayons vecteurs ρ et ρ', considérés comme variables, détermine une ligne formée de deux parties symétriques par rapport à l'*axe* FF' (464).

Fig. 265.

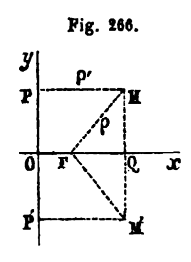


Fig. 266.

Un point M est encore déterminé dans un plan par ses distances MF $= \rho$ et MP $= \rho'$, aussi appelées *rayons vecteurs*, à un point fixe F et à une droite fixe Oy, qu'on nomme respectivement *foyer* et *directrice.* Comme dans le cas précédent, deux longueurs absolues des rayons vecteurs déterminent deux points M et M' symétriques par rapport à l'*axe* Ox mené perpendiculairement à Oy par le foyer F. Ainsi une équation entre les deux rayons vecteurs ρ et ρ', considérés comme variables, détermine un ligne symétrique par rapport à Ox.

1144. Les courbes se définissent ou par la relation de leurs coordonnées rapportées à des axes (1141), ou par celle de leurs coordonnées polaires (1142), ou encore par celle de leurs coordonnées focales (1143). C'est ce que fera voir l'étude des courbes les plus usitées dans la pratique.

1145. L'équation exprimant la relation qui existe entre les coordonnées d'une courbe est appelée l'*équation de la courbe.*

HOMOGÉNÉITÉ.

1146. Un polynôme est dit *homogène*, quand tous ses termes sont du même degré. Le degré m de chaque terme est le degré d'homogé-

néité du polynôme. Si l'on multiplie chaque lettre d'un polynôme homogène par un même facteur k affecté de l'exposant de chaque lettre, le polynôme est multiplié par k^m (416, 437, 438).

On dit en général qu'une fonction (464) est *homogène* et du *degré m*, quand chacune des lettres qui y entrent étant multipliée par k affecté de l'exposant de chaque lettre, elle se trouve multipliée par k^m. Telles sont les fonctions

$$a^2 + 2ab, \quad \frac{ab}{c} - \sqrt{dc}, \quad \frac{a + \sqrt{ab}}{a + c}, \quad \frac{a}{a^3 - b^3}$$

dont le degré est respectivement 2, 1, 0, —2.

Un monôme est toujours une fonction homogène d'un degré égal à celui du monôme.

Si dans une fonction il entre des lettres qui représentent des coefficients numériques, ces lettres se négligent dans la formation du degré de l'homogénéité de la fonction. Ainsi, n étant un coefficient numérique, la fonction suivante est homogène et du degré 1 :

$$\frac{a^2 + (y + nx)^2}{\sqrt{ab - (ny + x)^2}}.$$

On considère également comme des coefficients numériques les fonctions transcendantes sin, cos..., log, de fonctions homogènes du degré 0, ainsi qu'une quantité telle que e^α, dans laquelle α est aussi une fonction homogène du degré 0. Telles sont :

$$\sin \frac{ab}{a^2 + b^2}, \quad \log \frac{b + \sqrt{a^2 - b^2}}{a + b}, \quad e^{\frac{a^2 - c^2}{ab}}.$$

C'est qu'en effet, en multipliant par k chaque lettre de la fonction du degré 0, on ne change pas la valeur de la fonction, et l'on peut alors y supprimer k; ce qui n'aurait évidemment pas lieu si le degré de la fonction n'était pas 0.

Ainsi la fonction suivante est homogène et du degré $\frac{1}{2}$:

$$\frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{c}\sin\frac{c}{a}}{a + b}.$$

1147. De ce qui précède et des opérations sur les polynômes il résulte :

1° Que la somme ou la différence de deux fonctions homogènes du même degré est une fonction homogène du même degré que les premières (421, 422);

2° Que le produit de plusieurs fonctions homogènes de degrés quelconques est une fonction homogène d'un degré égal à la somme des degrés des fonctions proposées (429);



3° Que le quotient d'une fonction homogène par une fonction homogène est une fonction homogène d'un degré égal au degré de la première moins le degré de la seconde (451);

4° Qu'une puissance d'une fonction homogène est une fonction homogène d'un degré égal au degré de la fonction proposée multiplié par l'exposant de la puissance (2°);

5° Qu'une racine d'une fonction homogène est une fonction homogène d'un degré égal au degré de la fonction proposée divisé par l'indice de la racine (4°).

1148. Une *équation* est dite *homogène*, lorsque ses deux membres sont homogènes et du même degré, ou quand l'un de ses membres est nul et que l'autre est homogène (1146).

Il résulte de cette définition :

1° Qu'une équation homogène reste homogène quand on multiplie toutes les lettres qu'elle renferme par un même facteur k affecté de l'exposant de chaque lettre (1146);

2° Qu'une équation homogène entre des quantités concrètes de même espèce (12) [les autres quantités étant considérées comme des coefficients (1146)] est indépendante de l'unité à laquelle ces quantités concrètes sont rapportées. C'est qu'en effet, en changeant d'unité on ne fait que multiplier toutes les quantités concrètes par un même facteur entier ou fractionnaire.

Réciproquement, si une équation algébrique entière [cas seul utile à considérer (408)] entre des quantités concrètes de même espèce a lieu quelle que soit l'unité à laquelle ces quantités sont rapportées, cette équation est homogène, ou provient de l'addition de plusieurs équations homogènes de degrés différents (1151).

1149. Toute équation *algébrique* peut être changée en une autre dont l'un des membres est 0, et l'autre une quantité rationnelle entière (408). Si l'équation est homogène et du degré m, chacun de ses termes renfermera m facteurs littéraux, non compris les coefficients littéraux (1146).

Ainsi, en général une équation peut s'écrire sous la forme de la fonction

$$f(a, b, x, y, \ldots) = 0.$$

1150. Dans les recherches géométriques, les longueurs sont les seules quatités concrètes qu'on ait à considérer; car les aires et les volumes dépendent essentiellement de leurs dimensions linéaires. Pour exprimer algébriquement une relation entre plusieurs longueurs, on rapporte ces longueurs à une même unité, le plus souvent arbitraire (1152), et ce sont les rapports qui en résultent qu'on écrit dans les équations, d'après les règles de l'algèbre.

1151. Toutes les équations auxquelles conduisent les recherches géométriques (mises en équations, transformations et résultats) sont homogènes lorsque l'unité est indéterminée. Cette considération est de la plus haute importance en géométrie analytique; elle sert de moyen de vérification pendant tout le cours des calculs; elle sert de moyen mné-



monique pour retenir les formules; elle établit de l'analogie entre les expressions, et elle peut suggérer des méthodes de calcul plus simples et plus élégantes.

Remarque 1. Lorsqu'on combine par voie d'addition ou de soustraction plusieurs équations homogènes, elles doivent être du même degré; car s'il n'en était pas ainsi, l'équation résultante, quoique exacte, ne serait pas homogène, et l'on doit rejeter avec soin une telle combinaison dans toute analyse bien conduite.

Remarque 2. Le théorème de l'homogénéité s'applique à toutes les équations de géométrie; mais en se rappelant que les aires sont représentées par le produit de deux longueurs, et les volumes par le produit de trois longueurs ou celui d'une surface par une longueur, et que, par suite, suivant qu'une lettre A ou V représentera une aire ou un volume, il faudra la considérer comme étant du deuxième ou du troisième degré. Ainsi, h, h', b, b' exprimant des longueurs, A, A' des aires, et V, V' des volumes, les deux formules suivantes sont homogènes :

$$A - A' = \frac{1}{2}(h - h')(b + b'), \quad V - V' = \frac{1}{3}(h - h')\left(A + A + \sqrt{AA'}\right).$$

En général, selon que l'inconnue d'un problème est une aire A ou un volume V, l'expression qu'on obtient est homogène et du second ou du troisième degré. Ainsi l'on a :

$$A = ab \quad \text{ou} \quad V = abc.$$

1152. Dans tout ce qui précède, l'unité est supposée arbitraire. C'est dans cette hypothèse qu'il faut soumettre au calcul toutes les questions de géométrie; car s'il en était autrement, si, par exemple, on prenait pour unité une des longueurs considérées ou toute autre unité contenue un nombre déterminé de fois dans cette longueur, on pourrait arriver à des équations homogènes au fond, mais qui n'en auraient pas l'apparence; aussi faut-il éviter ce cas particulier. Du reste, à une équation de cette espèce, on peut toujours rendre l'aspect de l'homogénéité; pour cela, il suffit de rendre l'unité arbitraire, en rapportant chaque longueur à cette unité; ce qui se fait en rapportant la longueur prise pour unité à l'unité arbitraire, en multipliant chaque lettre par le rapport ou nombre abstrait qui en résulte élevé à la même puissance que la lettre, et en exprimant chaque produit partiel par une nouvelle lettre élevée à la même puissance que la première.

En prenant une unité de longueur arbitraire, on a pour l'aire du cercle

$$A = \pi r^2. \tag{728}$$

Si, au contraire, on prend le rayon pour unité, on a

$$A' = \pi \times 1^2 = \pi.$$

Équation dont le premier membre est du degré 2, et le second du

degré apparent 0, car π est un nombre abstrait. Pour donner à l'équation son aspect homogène habituel, on exprime le rayon pris pour unité en unités arbitraires; ce qui donne r pour rapport; alors 1^2 du second membre de l'équation devient r^2, et l'on a

$$A'r^2 \quad \text{ou} \quad A = \pi r^2.$$

En prenant le rayon pour unité, le volume de la sphère est

$$V' = \frac{4}{3}\pi \times 1^3 = \frac{4}{3}\pi. \qquad (947)$$

Rapportant le rayon pris pour unité à une unité arbitraire, ce qui donne r au lieu de 1, l'équation précédente devient

$$V'r^3 \quad \text{ou} \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Le demi grand axe a de l'ellipse étant pris pour unité, l'aire de l'ellipse est

$$A' = 2\pi \times 1 \times b'. \qquad (1187)$$

Rapportant le demi grand axe 1 à une unité arbitraire, il devient a, et rapportant toutes les longueurs à cette même unité arbitraire, il vient

$$A' \times a^2 = 2\pi \times a \times ab'$$

ou

$$A = 2\pi ab.$$

CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DES FORMULES ALGÉBRIQUES.

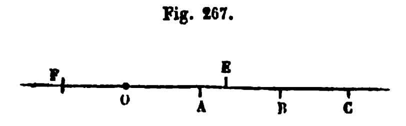
1183. D'après la loi de l'homogénéité, toute expression algébrique homogène du premier degré, dans laquelle les diverses lettres représentent des longueurs, est l'expression d'une longueur x (1151, *Remarque* 2), et cette longueur peut toujours être déterminée géométriquement, c'est-à-dire à l'aide de la règle et du compas : 1° quand l'expression est rationnelle (408) ; 2° quand, étant irrationnelle, elle ne renferme que des radicaux dont l'indice est 2 ou une puissance de 2.

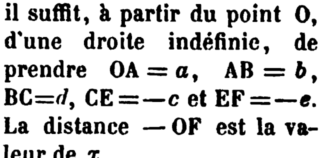
1184. *Construction des expressions rationnelles.*

Pour avoir

$$x = a + b - c + d - e,$$

Fig. 267.





il suffit, à partir du point O, d'une droite indéfinie, de prendre $OA = a$, $AB = b$, $BC = d$, $CE = -c$ et $EF = -e$. La distance $-OF$ est la valeur de x.

Si l'on a

$$x = \frac{ab}{m},$$



il suffit de construire une 4e proportionnelle aux 3 lignes a, b, m (995).

Pour

$$x = \frac{abcd}{mnp},$$

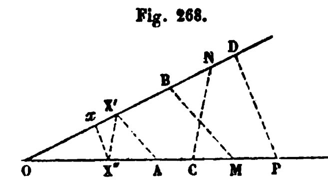


Fig. 268.

on construit une 4e proportionnelle $x' = OX' = \frac{ab}{m}$ aux 3 lignes $m = OM$, $a = OA$, $b = OB$; puis une 4e proportionnelle $x'' = OX'' = \frac{x'c}{n} = \frac{abc}{mn}$ aux 3 lignes $n = ON$, $x' = OX'$, $c = OC$, et enfin une 4e proportionnelle

$$x = Ox = \frac{x''d}{p} = \frac{abcd}{mnp}$$

aux 3 lignes $p = OP$, $x'' = OX''$, $d = OD$.

Les constructions précédentes des 4es proportionnelles reviennent simplement, après avoir tracé les deux droites indéfinies OP, OD, à prendre *alternativement* sur l'une et sur l'autre $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OD = d$, et de même $OM = m$, $ON = n$, $OP = p$; à tracer BM, CN, DP, et à mener à ces droites les parallèles respectives AX', X'X'', X''x; Ox est la longueur cherchée x.

Les expressions $x = \frac{a^2}{m} = \frac{aa}{m}$, $x = \frac{a^3}{m^2} = \frac{aaa}{mm}$, etc. revenant aux précédentes dans lesquelles les facteurs du numérateur deviennent égaux entre eux, ainsi que ceux du dénominateur, on construira de même x à l'aide de 4es proportionnelles.

L'expression de x étant une fraction à termes polynômes, on ramène la construction à celle du cas précédent, en opérant comme il suit :

Soit

$$x = \frac{a^3b + 4a^2bc}{5ab^2 - b^2c}.$$

k étant une longueur arbitraire, on peut mettre la valeur de x sous la forme

$$x = \frac{k\left(\frac{a^3b}{k^3} + \frac{4a^2bc}{k^3}\right)}{\frac{5ab^2}{k^2} - \frac{b^2c}{k^2}}.$$

L'exposant de k étant d'une unité moins élevé que le degré des termes qu'il divise, on peut construire chaque fraction monome qui en résulte d'après la règle précédente, et A, B, M, N étant les longueurs trouvées, on a

$$x = \frac{k(A + B)}{M - N}.$$

Déterminant $A + B = a$ et $M - N = m$, on a en définitive

$$x = \frac{ka}{m}.$$

Et x étant une 4e proportionnelle aux longueurs k, a, m, on la construira comme ci-dessus.

1158. *Construction des expressions irrationnelles.* Le degré d'homogénéité devant être 1 (1153), si le radical est du second degré, la quantité placée dessous doit être homogène et du second degré; ainsi, quand cette quantité est fractionnaire, le degré du numérateur est de 2 unités plus fort que celui du dénominateur.

$x = \sqrt{ab}$ est une moyenne proportionnelle entre les lignes a et b (996);

$x = \sqrt{a^2 + b^2}$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont a et b (1023);

$x = \sqrt{a^2 - b^2}$ est un des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle ayant b pour autre côté de l'angle droit et a pour hypoténuse (1022); c'est aussi une moyenne proportionnelle $\sqrt{\alpha\beta}$ entre les deux lignes

$$\alpha = a + b \quad \text{et} \quad \beta = a - b. \qquad (703)$$

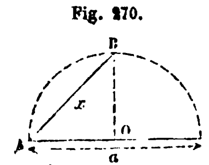
$x = a\sqrt{2}$, d'où $x^2 = 2a^2$, est l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle qui a a pour côté de l'angle droit.

Fig. 269

$x = \sqrt{ab + c^2}$. Après avoir construit une moyenne proportionnelle $p = \sqrt{ab}$, on a

$$x = \sqrt{p^2 + c^2}.$$

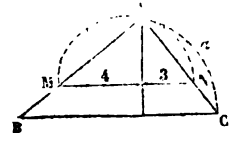
Fig. 270.



$x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, d'où $x^2 = \frac{a^2}{2}$, est la corde AB qui sous-tend le quart d'une circonférence qui a a pour diamètre (676).

$x = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. Élevant au carré on a $x^2 = \frac{4a^2}{3}$, d'où $\frac{x^2}{a^2} = \frac{4}{3}$; ce qui montre que le problème revient à trouver le côté x d'un carré qui soit à un carré donné a^2 dans le rapport 4 : 3. Sur une ligne MN on porte des longueurs proportionnelles aux nombres 4 et 3; sur MN on décrit une demi-circonférence; sur AN on prend $AC = a$, et menant CB parallèle à MN, on a $AB = x$. En effet, on a

Fig. 271.



$$AB : a = AM : AN \quad \text{ou} \quad \overline{AB}^2 : a^2 = \overline{AM}^2 : AN^2 = 4 : 3. \qquad (706)$$

$x = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$, d'où $\frac{x^2}{a^2} = \frac{2}{7}$, s'obtiendra encore par la construction précédente.

Si la quantité placée sous le radical est fractionnaire, comme

$$x = \sqrt{\frac{a^5 + ab^4 - 5b^2c^3}{a^3 - b^2c}},$$

faisant, comme au n° 1154, choix d'une longueur arbitraire k, on écrit

$$x = \sqrt{\frac{k^2\left(\frac{a^5}{k^4} + \frac{ab^4}{k^4} - \frac{5b^2c^3}{k^4}\right)}{\frac{a^3}{k^2} - \frac{b^2c}{k^2}}}.$$

La quantité placée entre parenthèses se réduit alors à une ligne a, et le dénominateur à une ligne m; de sorte qu'on a

$$x = \sqrt{\frac{k^2a}{m}} = \sqrt{k\frac{ka}{m}} = \sqrt{ku}.$$

Ce qui montre qu'il faut construire une 4ᵉ proportionnelle $u = \frac{ka}{m}$ (995), puis une moyenne proportionnelle $x = \sqrt{ku}$ (996).

Si l'indice de la racine était $2^2 = 4$, la quantité placée sous le radical serait homogène et du 4ᵉ degré. Soit

$$x = \sqrt[4]{\frac{a^6 + a^2b^4 - b^3c^3}{a^2 + bc}}.$$

Pour construire x, on écrit

$$x = \sqrt[4]{\frac{k^4\left(\frac{a^6}{k^5} + \frac{a^2b^4}{k^5} - \frac{b^3c^3}{k^5}\right)}{\frac{a^2}{k} + \frac{bc}{k}}}.$$

Formule qui se réduit, comme dans le cas précédent, à

$$x = \sqrt[4]{\frac{k^4a}{m}} = \sqrt{k\sqrt{k\frac{ka}{m}}} = \sqrt{k\sqrt{ku}} = \sqrt{kv}.$$

Ce qui montre qu'il faut construire une 4ᵉ proportionnelle $u = \frac{ka}{m}$, puis une moyenne proportionnelle $v = \sqrt{ku}$ et une autre $x = \sqrt{kv}$.

Enfin l'expression de x peut être composée d'une partie rationnelle et d'une partie irrationnelle, telle est, par exemple,

Fig. 272.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{2}.$$

On construit d'abord la partie irrationnelle

$$AD = \sqrt{\overline{CD}^2 - c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2};$$

ce qui n'est possible que quand on a $a^2 + b^2 > c^2$.

On en retranche b, et le point B, milieu de AM, donne

$$AB = \frac{-b + \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{2}.$$

Cette première valeur de x, considérée comme positive, se porte de O en P, à partir d'une origine O, dans le sens positif OD. Si l'on avait $b > \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$, le point M tomberait en M′, et l'on aurait $x = \frac{AM'}{2} = AB'$. Cette valeur étant négative, on la porterait de O en P′.

Si le radical est affecté du signe moins, à sa valeur AD on ajoute b, et la moitié de la droite qui en résulte est la deuxième valeur de x, laquelle étant négative se porte dans le sens OX à partir de O.

Soit encore à construire

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}. \qquad (a)$$

Fig. 273.

La construction de la division de a en moyenne et extrême raison (997) donne d'abord dans le triangle rectangle ABO

$$OA = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2};$$

puis

$$AI = AO - \frac{a}{2} = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}.$$

C'est la première valeur de x, valeur qui est positive et qui est portée de l'origine A dans le sens positif AY.

La deuxième valeur de x étant

$$x = -\frac{a}{2} - OA,$$

elle est négative, et on la porte de A en I′, dans le sens négatif AX.

L'équation (a) revient à celle

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2} = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2} = \frac{a}{2}(\pm\sqrt{5} - 1).$$

Les deux valeurs de x représentées par cette expression sont évidemment les mêmes que celles représentées par l'expression (a), et s'obtiennent encore en divisant a en moyenne et extrême raison.

CONSTRUCTION GÉNÉRALE DES COURBES REPRÉSENTÉES PAR DES ÉQUATIONS.

1156. Étant donnée une équation entre deux variables x et y, si l'on considère ces variables comme étant des coordonnées, chaque couple de valeurs réelles de x et y qui satisfont à l'équation détermine un point; or, l'on conçoit qu'en faisant varier x d'une manière continue entre certaines limites, l'équation sera ordinairement satisfaite par des valeurs de y réelles et continues, et qu'alors on obtiendra une suite continue de points, c'est-à-dire une ligne. Ainsi, en général, *une équation entre deux coordonnés représente une ligne* (1141).

1157. Pour déterminer les points de la courbe, on prend ordinairement les valeurs de x en progression arithmétique (328), et l'on calcule celles correspondantes de y. C'est surtout quand la fonction est une fonction algébrique entière (408, 464) qu'il y a avantage à prendre cette précaution, parce qu'alors on peut, pour abréger les calculs, faire usage des différences des valeurs de y pour calculer ces valeurs.

Soit, par exemple, à construire l'équation $y = ax^2 + b$, dont la forme se rencontre dans les équations relatives à la détermination de la courbe qu'affecte la chaîne des ponts suspendus. Supposant qu'on a

$$a = 0{,}1 \quad \text{et} \quad b = 1, \quad \text{d'où} \quad y = 0{,}1x^2 + 1,$$

le tableau suivant montre qu'en donnant successivement à x les valeurs 0, 1, 2, 3..., les valeurs qu'on obtient pour y sont telles qu'en prenant leurs *différences premières* 0,1, 0,3, 0,5..., puis les *différences secondes* entre les différences premières, ces différences secondes sont égales. Alors faisant successivement $x = 0$, $x = 1$ et $x = 2$, ce qui donne respectivement $y = 1$, $y = 1{,}1$ et $y = 1{,}4$, on a les deux différences premières 0,1 et 0,3, puis la différence seconde constante 0,2. Cette différence seconde ajoutée à la dernière différence première obtenue donnant la suivante, et chaque différence première ajoutée à la valeur précédente de y donnant la valeur suivante, on voit que par de simples additions successives on obtient les différences premières, puis les valeurs des ordonnées.

abscisses x. . .	0	1	2	3	4	5	6	7	8...
ordonnées y. .	1	1,1	1,4	1,9	2,6	3,5	4,6	5,9	7,4...
différences 1res.	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5...	
différences 2mes.	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2...	

Les valeurs négatives de x fourniraient les mêmes valeurs pour y.

Selon que la fonction est du 2e, 3e, 4e... degré, les différences constantes sont respectivement les différences *secondes*, *troisièmes*, *quatrièmes*, etc., que l'on obtient en calculant, à l'aide de l'équation, 3, 4, 5... ordonnées, et en prenant les différences successives. Ayant la différence constante, on remonte aux autres différences et aux valeurs des ordonnées en opérant comme ci-dessus.

1158. Au lieu de calculer toutes les ordonnées pour construire la courbe $y = ax^2 + b$, on peut ne calculer que les trois premières ordonnées équidistantes AO, BP, CQ; mener les parallèles AF, BG à l'axe Ox, ce qui détermine les deux premières différences premières BH, CG, et prolonger AB, ce qui donne la différence seconde constante $CC' = CG - C'G = CG - BH$. Pour avoir la quatrième ordonnée DR, on prolonge BC jusqu'en D′, et l'on prend $D'D = CC'$. On détermine de la même manière la cinquième ordonnée ES et toutes les suivantes, et raccordant tous les points A, B, C, D... par une courbe, elle est la représentation de l'équation $y = ax^2 + b$.

Fig. 274.

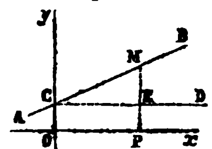
1159. *Fonctions empiriques.* Dans la pratique, il arrive journellement que des observations ou des expériences fournissent une série de couples de valeurs correspondantes de deux variables, sans qu'aucune équation algébrique puisse représenter la loi qui lie les deux variables. Dans ce cas, prenant les valeurs de l'une des variables pour abscisses, et celles correspondantes de l'autre variable pour ordonnées, en raccordant pour une courbe continue les points qu'on obtiendra, si ces points sont suffisamment rapprochés, cette courbe représentera avec une exactitude suffisante la loi inconnue qui lie entre elles les deux variables. Ainsi elle en sera une image bien sensible; elle permettra d'obtenir la valeur de l'une des variables correspondant à une valeur donnée de l'autre variable, intermédiaire à deux valeurs successives fournies par l'expérience, et de résoudre ainsi approximativement le problème d'interpolation; si elle a une analogie sensible avec une courbe connue, elle pourra permettre de relier les deux variables par une équation ou formule, dite *empirique;* enfin si elle offre quelque anomalie qui rompe sa continuité, cela indiquera quelque erreur dans les expériences.

LIGNE DROITE.

1160. *L'équation générale de la ligne droite en coordonnées rapportées à des axes rectangulaires* est

$$y = ax + b.$$

Fig. 275.



En effet, soit une droite quelconque AB située dans le plan des axes rectangulaires Ox, Oy. D'un point quelconque M de cette droite abaissons une perpendiculaire MP à Ox; elle détermine les

coordonnées $MP = y$ et $OP = x$ du point M. Par le point C, où AB rencontre l'axe Oy, menons CD parallèle à l'axe Ox.

Dans le triangle rectangle CME, on a (1122) $ME = CE \times tang\ BCD$.

Ajoutant EP aux deux membres de cette équation, elle devient

$$ME + EP = CE \times \text{tang}\ BCD + EP.$$

Remarquant : 1° que $ME + EP = y$; 2° que l'angle BCD que la droite fait avec CD ou avec l'axe Ox est constant, et que par suite sa tangente, que l'on peut représenter par a, appelé *coefficient angulaire* ou de *direction*, est aussi constante; 3° que $CE = x$; 4° que $EP = OC$ est également constant et peut être représenté par b, qu'on appelle l'*ordonnée à l'origine*, l'équation précédente prend la forme

$$y = ax + b,$$

qui est bien l'équation de la droite, puisqu'elle a été établie pour un point quelconque de cette droite, et en ayant égard aux signes des diverses quantités qui y entrent.

Remarques :

1° Lorsque la droite AB passe par l'origine O, l'ordonnée à l'origine $OC = b = 0$, et l'équation de la droite devient

$$y = ax;$$

2° Lorsque AB est parallèle à Ox, l'angle BCD est nul; on a alors $\text{tang}\ BCD = a = 0$ (1094), et l'équation de la droite devient

$$y = b;$$

3° Dans le cas où l'on a en même temps $a = 0$ et $b = 0$, l'équation de la droite devient

$$y = 0;$$

ce qui indique que la droite se confond avec l'axe des x;

4° Si la droite était parallèle à l'axe des y ou se confondait avec cet axe, on obtiendrait son équation en changeant y en x dans les deux dernières équations, ce qui donnerait respectivement $x = b$ et $x = 0$. b ne serait plus ici l'ordonnée à l'origine, mais bien l'*abscisse à l'origine*, c'est-à-dire la distance à l'origine du point où la droite rencontre l'axe des x;

5° On voit que *l'équation d'une droite est du premier degré* (470).

Réciproquement, *toute équation du premier degré entre deux variables est l'équation d'une droite*. C'est pourquoi les lignes droites sont appelées *lignes du premier degré*.

1161. *Équation d'une droite d'une inclinaison donnée* a, *et passant par un point dont les coordonnées sont* x' *et* y'.

Pour le point (x', y'), on a

$$y' = ax' + b, \quad \text{d'où} \quad b = y' - ax'.$$

Substituant cette valeur de b dans l'équation générale $y = ax + b$, on

a pour l'équation demandée

$$y - y' = a(x - x').$$

1162. *Équation d'une droite passant par deux points donnés* (x', y'), (x'', y''). a étant le coefficient angulaire inconnu de la droite, le point (x', y') donne (1161)

$$y - y' = a(x - x').$$

Cette équation doit être satisfaite en y faisant $y = y''$ et $x = x''$, ce qui donne

$$y'' - y' = a(x'' - x').$$

Éliminant par division a entre ces deux équations, il vient pour l'équation demandée

$$\frac{y - y'}{y'' - y'} = \frac{x - x'}{x'' - x'}.$$

Si l'un des points est sur l'axe des x, et l'autre sur l'axe des y, c'est-à-dire si l'on a $x' = p$, $y' = 0$ et $y'' = q$, $x'' = 0$, l'équation de la droite devient

$$\frac{y}{q} = \frac{x - p}{-p} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1.$$

Si l'un des points est l'origine, si, par exemple, on a $y'' = x'' = 0$, il vient pour l'équation d'une droite menée de l'origine à un point donné (x', y')

$$\frac{y - y'}{-y'} = \frac{x - x'}{-x'} \quad \text{ou} \quad \frac{y}{y'} = \frac{x}{x'}.$$

1163. *Intersection de deux droites données par leurs équations.* Deux lignes quelconques, droites ou courbes, étant données par leurs équations, en résolvant le système des deux équations en prenant x et y pour inconnues, qui cessent d'être des variables indéterminées, les valeurs obtenues sont les coordonnées des points d'intersection des lignes. On trouve ainsi pour le point de rencontre de deux droites (480, 1160)

$$x = \frac{b' - b}{a - a'} \quad \text{et} \quad y = \frac{ab' - a'b}{a - a'}.$$

Réciproquement, ayant à résoudre un système de deux équations à deux inconnues, si l'on parvient à construire graphiquement les deux lignes représentées par les deux équations, les coordonnées de chaque point d'intersection seront une solution du système (534).

1164. *Deux droites perpendiculaires entre elles* faisant avec l'axe des x deux angles dont la différence est égale à 90°, les tangentes de ces angles donnent la relation du n° 1110; d'où il résulte qu'on a

$$aa' = -1 \quad \text{ou} \quad aa' + 1 = 0.$$

CIRCONFÉRENCE.

1165. La définition de la circonférence (628) peut être exprimée en coordonnées polaires. En effet, si l'on pose (1142)

$$\rho = a\alpha + r,$$

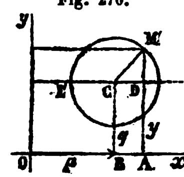
et qu'on fasse $a = 0$ et r constant, on voit que, quelle que soit la valeur de α, on aura toujours

$$\rho = r,$$

équation qui satisfait à tous les points d'une circonférence ayant l'origine O pour centre et r pour rayon.

1166. *Équation générale de la circonférence en coordonnées rapportées à des axes rectangulaires* (1141).

Fig. 276.



Soit M un point quelconque de la circonférence dont C est le centre et r le rayon. Soient $MA = y$ et $OA = x$ les coordonnées du point M, et $CB = q$ et $OB = p$ les coordonnées, qui sont constantes, du centre C.

Dans le triangle rectangle CDM on a (704)

$$\overline{MD}^2 + \overline{CD}^2 = r^2.$$

$$MD = y - q, \quad \text{ou} \quad \overline{MD}^2 = y^2 + q^2 - 2qy; \qquad (702)$$

$$CD = x - p, \quad \text{ou} \quad \overline{CD}^2 = x^2 + p^2 - 2px.$$

Remplaçant $\overline{MD}^2$ et $\overline{CD}^2$ par ces valeurs dans celle de r^2, il vient

$$y^2 + x^2 - 2qy - 2px + q^2 + p^2 = r^2,$$

ou

$$y^2 - 2qy = r^2 - x^2 + 2px - q^2 - p^2;$$

d'où

$$y = q \pm \sqrt{q^2 + r^2 - x^2 + 2px - q^2 - p^2}. \qquad (526)$$

Telle est l'équation générale de la circonférence en coordonnées rectangulaires.

Lorsque E est l'origine et que EC est l'axe des x, on a $q = 0$ et $p = r$; l'équation devient alors

$$y^2 + x^2 - 2rx + r^2 = r^2,$$

ou

$$y^2 = 2rx - x^2, \quad \text{d'où} \quad y = \pm\sqrt{2rx - x^2}.$$

Si le centre du cercle est l'origine, on a à la fois $q = 0$ et $p = 0$, et il vient

$$y^2 + x^2 = r^2, \quad \text{d'où} \quad y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}.$$

On voit que, dans chacun des trois cas que nous venons d'examiner, à chacune des valeur de x correspondent deux valeurs de y; ce qui

devait être, l'équation de la circonférence étant du second degré. De plus, dans les deux derniers cas, les deux valeurs de y sont égales et de signes contraires; ce qui indique qu'alors la courbe est symétrique par rapport à l'axe des x.

1167. *Mener une tangente à une circonférence par un point* M *pris sur cette courbe.* On mène le rayon OM, et la perpendiculaire AB à l'extrémité de ce rayon est la tangente demandée.

Fig 277.

A M C B

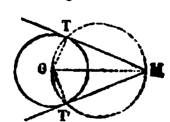
O

Il suffit de prouver que AB n'a que le point M commun avec la circonférence, c'est-à-dire qu'un point quelconque C de cette droite, autre que M, est situé hors du cercle. Or, en menant OC, cette droite est une oblique plus grande que la perpendiculaire OM, qui est un rayon; donc le point C est situé hors du cercle, et AB est bien tangente à la circonférence.

1168. Puisque AB est tangente à la circonférence, tous ses points, excepté M, sont situés hors du cercle; donc une droite quelconque OC est plus grande que OM; donc le rayon OM mené au point de contact est perpendiculaire à la tangente (583), et par suite à la circonférence (647). Ainsi, *pour mener une normale en un point de la circonférence, il suffit de joindre le centre à ce point.*

1169. *Mener une tangente à la circonférence par un point* M *pris hors du cercle.*

Fig. 278.



On mène MO; sur cette droite comme diamètre on décrit une circonférence, qui rencontre la circonférence donnée aux points T, T', et traçant MT, MT', ces droites sont tangentes à la circonférence proposée.

En effet, menant les rayons OT, OT', chacun des angles OTM, OT'M est droit comme étant inscrit dans un demi-cercle (654), et les droites MT, MT', perpendiculaires aux extrémités des rayons OT, OT', sont bien tangentes à la circonférence (1167).

ELLIPSE.

1170. L'*ellipse* est une courbe telle, que la somme MF + MF', des distances de chacun de ses points à deux points fixes ou *foyers* F, F', est une quantité constante (*fig.* 279).

On voit que l'ellipse se définit par son équation en coordonnées focales (1143), équation qui est, en désignant par les variables ρ et ρ' les rayons vecteurs de chacun des points de la courbe, et par $2a$ la somme constante de ces rayons vecteurs,

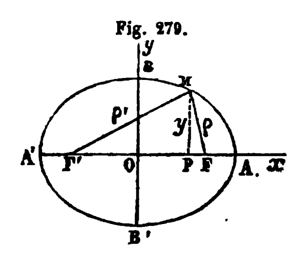
$$\rho + \rho' = 2a.$$

1171. De même que pour la circonférence (629), une portion de l'el-

lipse est un *arc*, et la droite qui joint les extrémités de l'arc est une *corde*.

Sur une ellipse, et en général sur une courbe quelconque, on nomme arc d'un degré, un arc tel que les normales menées à ses extrémités font entre elles un angle d'un degré.

Fig. 279.



La corde AA' qui passe par les deux foyers est le *grand axe* de l'ellipse.

La corde BB' perpendiculaire au milieu du grand axe est le *petit axe* de l'ellipse.

Le point de rencontre O du grand et du petit axe est le *centre* de l'ellipse.

Toute corde qui passe par le centre est un *diamètre* de l'ellipse.

Les extrémités A, A', B, B' des axes sont les *sommets* de l'ellipse.

1172. *Les foyers sont également distants* : 1° *des sommets*, AF = A'F' *et* AF' = A'F; 2° *du centre*, OF = OF'.

1° Les sommets A et A' appartenant à l'ellipse, les sommes de leurs rayons vecteurs sont égales chacune à la quantité constante $2a$ (1170), et par suite égales entre elles; donc

$$AF + AF' \text{ ou } 2AF + FF' = A'F' + A'F \text{ ou } 2A'F' + F'F.$$

Retranchant FF' des deux membres de cette équation, on a

$$2AF = 2A'F', \quad \text{d'où} \quad AF = A'F', \quad \text{et par suite aussi } AF' = A'F.$$

2° Ayant OA = OA' et AF = A'F', on a aussi OA — AF = OA' — A'F' ou OF = OF'.

1173. *La somme constante* 2a *des rayons vecteurs est égale au grand axe*.

Puisque le point A appartient à l'ellipse, on a

$$AF + AF' = 2a.$$

Remplaçant AF' par son égal A'F, on a bien

$$AF + A'F \text{ ou } AA' = 2a.$$

1174. *Équation de l'ellipse en prenant pour axes coordonnés le grand et le petit axe de la courbe* (1173).

Soit $2a = AA'$ le grand axe, et $2c = FF'$ la distance des foyers. On a toujours $2a > 2c$ ou $a > c$.

Dans les triangles rectangles MPF' et MPF, on a respectivement (704)

$$\overline{MF'}^2 \text{ ou } \rho'^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PF'}^2, \quad \text{et} \quad \overline{MF}^2 \text{ ou } \rho^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PF}^2.$$

Comme on a

$$MP = y,$$

$$PF' = OF' + OP = c + x, \quad \text{ou} \quad \overline{PF'}^2 = c^2 + x^2 + 2cx, \qquad (701)$$

et $$PF = OF - OP = c - x, \quad \text{ou} \quad \overline{PF}^2 = c^2 + x^2 - 2cx, \qquad (702)$$

substituant ces valeurs dans celles de ρ'^2 et de ρ^2, il vient

$$\rho'^2 = y^2 + x^2 + c^2 + 2cx \quad \text{et} \quad \rho^2 = y^2 + x^2 + c^2 - 2cx. \qquad (a)$$

Retranchant membre à membre ces deux équations, on a

$$\rho'^2 - \rho^2 \text{ ou } (\rho' + \rho)(\rho' - \rho) = 4cx; \qquad (703)$$

d'où l'on tire

$$\rho' - \rho = \frac{4cx}{\rho' + \rho} = \frac{4cx}{2a} = \frac{2cx}{a}.$$

Ajoutant membre à membre cette équation et celle

$$\rho' + \rho = 2a,$$

il vient $$2\rho' = \frac{2cx}{a} + 2a, \quad \text{d'où} \quad \rho' = \frac{cx}{a} + a,$$

et par suite $$\rho'^2 = \frac{c^2x^2}{a^2} + a^2 + 2cx. \qquad (701)$$

Égalant cette valeur de ρ'^2 à sa valeur (a), on a, après avoir chassé le dénominateur a^2,

$$a^2y^2 + a^2x^2 + a^2c^2 + 2a^2cx = c^2x^2 + a^4 + 2a^2cx,$$

ou, en supprimant le terme $2a^2cx$ commun aux deux membres, et en réunissant les termes en x^2 et ceux en a^2,

$$a^2y^2 + (a^2 - c^2)x^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Représentant par b^2 la quantité constante $a^2 - c^2$ (1177), on obtient pour l'*équation de la courbe*

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1;$$

d'où $$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \qquad (525)$$

Ce qui fait voir qu'à une même valeur de x correspondent deux valeurs égales et de signes contraires pour y, et que par conséquent la courbe est symétrique par rapport à l'axe des x. En tirant la valeur de x en fonction de y, on verrait qu'à une même valeur de y correspondent aussi deux valeurs égales et de signes contraires pour x, et que par conséquent la courbe est encore symétrique par rapport à l'axe des y (1182).

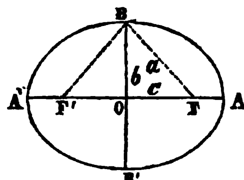
1178. Dans le cas où $a = b = r$, l'équation de l'ellipse (1174) devient

$$y^2 + x^2 = r^2;$$

ce qui n'est autre chose que l'équation d'une circonférence (1166). Ainsi la circonférence est un cas particulier de l'ellipse, dans lequel les deux axes a et b sont égaux au rayon r. Par suite, les propriétés de l'ellipse s'appliquent à la circonférence.

1176. *Les droites* BF, BF', *qui joignent les extrémités du petit axe aux foyers, sont égales chacune au demi-grand axe* a.

Fig. 280.



Ces droites sont égales comme obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire BO (583). De plus on a

$$BF + BF' \text{ ou } 2BF = 2a\text{; donc } BF = a.$$

1177. Ayant $BF = a$, $OF = c$, si l'on représente le demi-petit axe OB par b, le triangle rectangle BOF donne (704)

$$b^2 = a^2 - c^2.$$

Ainsi, *dans l'équation de l'ellipse* (1174), *la quantité constante* b *est le demi-petit axe*

1178. La distance $FF' = 2c$ des foyers est appelée *distance focale*, et le rapport $\frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$ de la distance focale au grand axe se nomme l'*excentricité de l'ellipse.*

L'excentricité de l'ellipse est toujours comprise entre 0 et 1; à la limite 0, l'ellipse est une circonférence, et à l'autre limite 1, la courbe s'est aplatie au point de devenir une ligne droite finie qui joint les foyers.

Les orbites que décrivent la terre et les autres planètes sont, abstraction faite des petites perturbations qu'elles éprouvent, des ellipses dont le soleil occupe l'un des foyers, et dont les excentricités, qui sont assez petites, ont les valeurs suivantes pour les planètes principales :

Mercure	Vénus	La Terre	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune
0,2056063	0,0068618	0,01679226	0,0932168	0,0481621	0,0561505	0,0466	0,0087195

Junon est la planète dont l'orbite a la plus grande excentricité; elle donne $\frac{c}{a} = 0{,}256$.

L'orbite de la terre a environ 153 493 000 kilomètres de demi-grand axe et 153 454 000 kilomètres de demi-petit axe.

D'après la première loi de Képler, un rayon vecteur mené du foyer occupé par le soleil à la planète, et qui se meut avec la planète, décrit des aires qui sont proportionnelles aux temps.

1179. *Étant donnés les foyers et l'un des axes de l'ellipse, trouver l'axe inconnu.*

1° AA' étant le grand axe et F, F' les foyers (1171), la perpendiculaire BB' menée à AA' par le milieu de cette droite représente la direc-

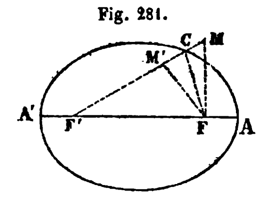
tion du petit axe, et d'un foyer F comme centre, avec $OA = a$ pour rayon, décrivant un arc de cercle, il rencontre BB' en des points B et B' qui sont les extrémités du petit axe (1176).

2° Si le petit axe BB' et les foyers F et F' étaient donnés, pour avoir le grand axe, il suffirait de porter, à droite et à gauche du point O, sur FF', la distance $BF = a$.

1180. *Étant donnés les axes* AA' *et* BB' *d'une ellipse, trouver ses foyers.* De l'une des extrémités B du petit axe, avec le demi-grand axe $OA = a$ pour rayon, décrivant un arc de cercle, il coupe AA' aux points F et F' qui sont les foyers de l'ellipse (1176).

1181. *L'ellipse est le lieu géométrique des points dont la somme des rayons vecteurs est égale au grand axe* $2a$ (566, 1173).

Fig. 281.



1° M étant un point situé hors de l'ellipse, on a $MF + MF' > 2a$.

En effet, menant CF, le point C appartenant à l'ellipse, on a $CF + CF' = 2a$. Remplaçant CF par la quantité plus grande $MC + MF$, on a bien

$$MF + MC + CF' \quad \text{ou} \quad MF + MF' > 2a.$$

2° Le point M' étant situé dans l'ellipse, on a $M'F + M'F' < 2a$.

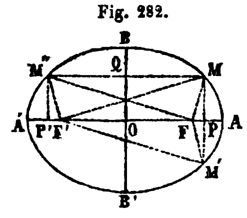
Car, menant CF, le point C appartenant à l'ellipse, on a $CF + CM' + M'F' = 2a$. Remplaçant $CF + CM'$ par la quantité plus petite $M'F$, on a bien

$$M'F + M'F' < 2a.$$

Corollaire. Les réciproques des 1° et 2° sont vraies.

1182. *Le grand et le petit axe divisent chacun l'ellipse en deux parties égales et symétriques.*

Fig. 282.



1° M étant un point de l'ellipse, son symétrique M' par rapport au grand axe AA' (828) appartient aussi à l'ellipse. C'est ce qui résulte de l'équation de la courbe (1174); du reste, les deux triangles rectangles égaux MPF, M'PF donnant $MF = M'F$, et ceux MPF' et M'PF' donnant $MF' = M'F'$, on a

$$M'F + M'F' = MF + MF' = 2a,$$

et le point M' appartient à l'ellipse (1181). De là il résulte que si l'on fait tourner la partie AMA' de l'ellipse autour de l'axe AA', elle viendra coïncider avec la partie AM'A'; donc elle lui est égale et symétrique.

2° Le point M'', symétrique de M par rapport au petit axe BB', appartient aussi à l'ellipse. C'est ce qui résulte également de l'équation de la courbe, et ce que l'on peut encore établir de la manière suivante. Ayant $OP = OP'$ comme quantités égales chacune à $QM = QM''$, et $OF = OF'$, il en résulte qu'on a $FP' = F'P$ et $FP = F'P'$; comme de plus $MP = M''P'$, les deux triangles rectangles égaux MPF', M''P'F donnent $MF' = M''F$,

et les deux autres triangles égaux MPF, M″P′F′ donnent MF = M″F′; d'où il résulte qu'on a

$$M''F + M''F' = MF' + MF = 2a;$$

donc M″ appartient à l'ellipse, et celle-ci est bien aussi divisée en deux parties égales et symétriques par son petit axe.

1183. *Le centre de l'ellipse divise tous les diamètres en deux parties égales.*

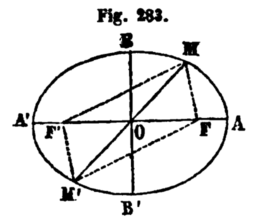


Fig. 283.

Le point M appartenant à l'elllipse, prolongeant MO d'une quantité OM′ = OM, et menant MF, MF′, M′F et M′F′, dans le quadrilatère MFM′F′ les diagonales se coupant mutuellement en deux parties égales, le figure est un parallélogramme (624), et on a

$$M'F + M'F' = MF + MF' = 2a;$$

donc le point M′ est sur l'ellipse (1181), et MM′ est bien un diamètre divisé au point O en deux parties égales.

1184. *Tout diamètre* MM′, *autre que le grand et le petit axe, divise l'ellipse en deux parties égales, mais non symétriques par rapport à ce diamètre* (829). Amenant la partie MBM′ sur la partie M′B′M, en la faisant tourner autour du point O jusqu'à ce que le point M vienne en M′ et le point M′ en M, si l'on considère un diamètre quelconque BB′, après ce mouvement, la partie OB coïncidera avec la partie OB′, puisque l'angle BOM = B′OM′, et comme OB = OB′, le point B tombera en B′. Le point B étant quelconque, on voit que tous les points de la partie MBM′ viendront se placer sur la partie M′B′M; donc tout diamètre divise l'ellipse en deux parties égales.

1185. De l'équation de l'ellipse (1174), on tire, pour un point quelconque M,

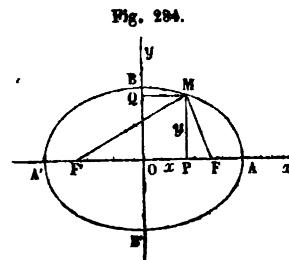


Fig. 284.

$$\frac{y^2}{a^2-x^2} \text{ ou } \frac{y^2}{(a+x)(a-x)} = \frac{b^2}{a^2}, \qquad (a)\ (703)$$

ou, en remarquant que $a+x=$ A′P et $a-x=$ AP,

$$\frac{y^2}{AP \times A'P} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Ce qui montre que *le rapport du carré d'une ordonnée au produit des segments correspondants du grand axe est égal au rapport des carrés du petit et du grand axe, et que, par suite, il est constant.*

Pour un autre point, on aurait

$$\frac{y'^2}{AP' \times A'P'} = \frac{b^2}{a^2};$$

donc

$$\frac{y^2}{y'^2} = \frac{AP \times A'P}{AP' \times A'P'}.$$

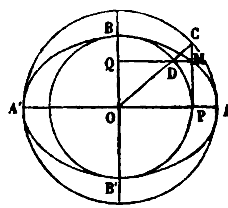
Ainsi, *les carrés des ordonnées sont entre eux comme les produits des segments correspondants du grand axe.*

De l'équation de l'ellipse on peut conclure, par la même marche, que les abscisses et les segments correspondants du petit axe jouissent des mêmes propriétés :

$$\frac{x^2}{BQ \times B'Q} = \frac{a^2}{b^2}, \quad \frac{x^2}{x'^2} = \frac{BQ \times B'Q}{BQ' \times B'Q'}.$$

1186. Décrivant une circonférence sur le grand axe comme diamètre, et menant les ordonnées correspondantes quelconques $MP = y$ et $CP = Y$ de l'ellipse et de cette circonférence, on a

Fig. 285.



$$\frac{y}{Y} = \frac{b}{a}.$$

En effet, le triangle rectangle OPC donnant

$$\overline{OC}^2 - OP^2 = \overline{CP}^2 \quad \text{ou} \quad a^2 - x^2 = Y^2,$$

substituant dans l'équation (a) du numéro précédent, on a

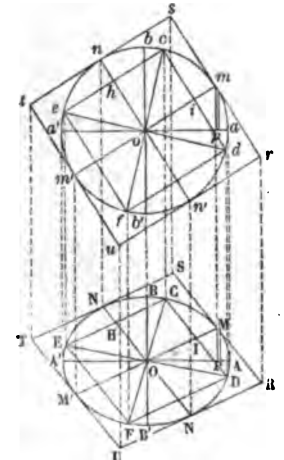
$$\frac{y^2}{Y^2} = \frac{b^2}{a^2} \quad \text{ou} \quad \frac{y}{Y} = \frac{b}{a}. \qquad (a)$$

Décrivant une circonférence sur le petit axe, on prouverait de même qu'on a

$$\frac{MQ}{DQ} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{X} = \frac{a}{b}. \qquad (b)$$

1187. On conclut de l'égalité (a) du numéro précédent que *toute ellipse ayant* 2a *et* 2b *pour axes, peut être considérée comme étant la projection d'un cercle de diamètre* 2a *sur le plan de l'ellipse*, et de l'égalité (b) que *tout cercle de diamètre* 2b *peut être considéré comme étant la projection sur son plan de diverses ellipses ayant le petit axe commun* 2b. Considérations desquelles découlent diverses conséquences intéressantes relatives aux cordes supplémentaires, aux diamètres conjugués, aux parallélogrammes circonscrits, et à l'aire de l'ellipse (1205).

Fig. 286.



Ainsi l'ellipse ABA'B', qui a $AA' = 2a$ et $BB' = 2b$ pour axes, est la projection d'un cercle $aba'b'$ ayant $2a$ pour diamètre et dont le plan fait avec celui de l'ellipse un angle θ dont le cosinus est $\frac{b}{a}$. En effet, le diamètre aa' étant parallèle au plan de l'ellipse, il se projette en vraie grandeur suivant AA', et pour un point

quelconque m, la perpendiculaire mp à aa' a pour projection $MP = mp \cos\theta = mp \times \frac{b}{a}$; d'où il résulte que M appartient bien à l'ellipse qui a AA' pour grand axe et $BB' = \overline{bb'} \cos\theta = \overline{aa'} \times \frac{b}{a}$ pour petit axe.

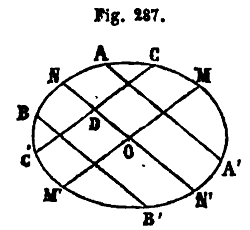
Chacun des éléments mp du cercle ayant pour projection sa surface multipliée par $\cos\theta$, la projection totale du cercle est égale à la surface du cercle multipliée par $\cos\theta$. Cela est vrai, non-seulement pour la projection d'un cercle, mais aussi pour la *projection d'une surface plane quelconque.*

Menant un diamètre quelconque de du cercle, et les deux cordes cd, ce, qui sont perpendiculaires entre elles (654), les diamètres mm', nn', qui passent par les milieux i et h de ces cordes, sont aussi perpendiculaires entre eux, et ils partagent chacun en deux parties égales toutes les cordes parallèles à l'autre. De plus, les tangentes en m, n, m', n' forment un carré circonscrit $rstu$.

Projetant les droites dont il vient d'être question sur le plan de l'ellipse, en représentant les projections des divers points par les mêmes lettres, mais majuscules, les cordes CD, CE qui partent d'un même point C de la courbe et aboutissent aux extrémités d'un même diamètre DE sont appelées *cordes supplémentaires;* les diamètres MM', NN' sont parallèles à ces cordes, et ils partagent chacun en deux parties égales toute corde parallèle à l'autre, propriété qui leur a fait donner le nom de *diamètres conjugués;* de plus le carré $rstu$ a pour projection le parallélogramme circonscrit RSTU, dont les côtés sont parallèles aux diamètres conjugués MM', NN', passant par les points de contact; enfin le carré $rstu$ étant constant, sa projection RSTU conserve la même surface, qui est $4a^2 \cos\theta = 4a^2 \frac{b}{a} = 4ab$.

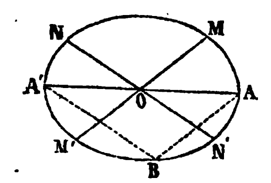
1188. *Ainsi, dans une ellipse, tout diamètre* MM' *qui divise une corde* AA' *en deux parties égales, divise de la même manière toutes les cordes* NN', BB'... *parallèles à la première*, et deux diamètres MM' et NN' de l'ellipse sont dits *conjugués*, lorsque chacun d'eux divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre.

Fig. 287.



1189. *Étant donné un diamètre* MM' (*fig.* 287), *tracer son conjugué.* On mène une corde CC' parallèle à MM', et traçant le diamètre NN' passant par le milieu D de CC', il est le conjugué de MM'.

Fig. 288.



Lorsqu'on a le grand axe de l'ellipse (*fig.* 288), menant par son extrémité A une corde AB parallèle à MM', joignant BA', le diamètre NN' mené parallèlement à BA' est le conjugué de MM' (1187). Cette construction est plus simple que la précédente.

1190. *Étant donnée une ellipse, déterminer : 1° son centre, 2° ses axes, 3° ses foyers*

1° Menant deux cordes parallèles CC', DD' (*fig.* 289), la droite EE' qui joint les milieux de ces cordes est un diamètre, dont le milieu O est le centre de l'ellipse.

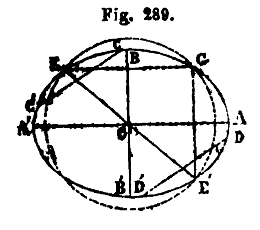


Fig. 289.

2° Du centre O, décrivant, avec un rayon suffisamment grand, une circonférence qui coupe l'ellipse en quatre points, la droite qui joint les points d'intersection G, E et la droite GE' étant respectivement parallèles au grand et au petit axe, on peut mener ces axes.

3° Ayant les axes, on détermine les foyers comme au n° 1180.

1191. *Pour déterminer le centre d'un arc d'ellipse*, on inscrit dans cet arc deux cordes parallèles ; on joint les milieux de ces cordes, et la droite qui en résulte étant dans la direction d'un diamètre, elle passe par le centre. Inscrivant deux nouvelles cordes parallèles entre elles, mais non aux premières, la droite qui joint leurs milieux passant encore par le centre, elle vient couper la première direction de diamètre en ce point.

Dans le cas où l'arc aurait assez d'étendue pour que la circonférence GEE' (*fig*, 289) pût le couper en deux points G, E ou G, E', on pourrait tracer ou le grand ou le petit axe, et menant par le centre une perpendiculaire à cet axe, on aurait la direction du second axe.

1192. On déduit du n° 1186 *un moyen facile de tracer l'ellipse par points*. Décrivant des circonférences sur les axes comme diamètres (*fig.* 285), menant le rayon quelconque OC, et par les points C et D traçant des parallèles aux axes, ces parallèles se rencontrent au point M appartenant à l'ellipse. En effet, MD étant parallèle à OP, on a

$$\frac{MP}{CP} = \frac{OD}{OC} \quad \text{ou} \quad \frac{y}{Y} = \frac{b}{a}.$$

Or l'on conçoit qu'on peut déterminer ainsi autant de points que l'on veut de l'ellipse, et par suite la tracer en raccordant ces points (1141).

1193. *Autre tracé de l'ellipse par points* (1192).

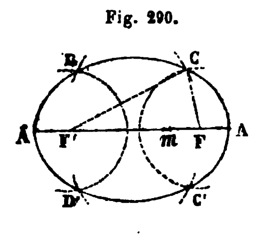


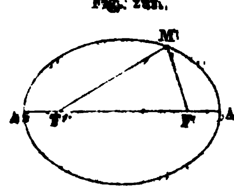
Fig. 290.

AA' étant le grand axe d'une ellipse dont F et F' sont les foyers, pour tracer cette ellipse par points, des foyers F et F' comme centres, avec un rayon Am qui peut varier de AF à AF' on décrit deux arcs de cercle ; puis des mêmes centres F, F', avec un rayon égal à $A'm$, qui varie en sens contraire du premier de A'F à A'F', de manière que l'on ait $Am + A'm = AA' = 2a$, on décrit deux arcs de cercle qui viennent respectivement couper chacun des premiers en deux points D, D' et C, C', qui sont des points de l'ellipse. En effet, l'un quelconque de ces points, C par exemple, donne bien $CF + CF' = Am + A'm = 2a$ (1181). On peut

déterminer ainsi autant de points que l'on veut de l'ellipse, et traçant une courbe qui raccorde tous ces points, elle pourra être considérée comme étant l'ellipse demandée.

1194. *Tracé* dit *du jardinier*, ainsi appelé parce qu'il est mis en usage pour donner à des parterres la forme elliptique.

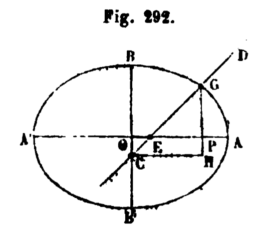
Fig. 291.



AA′ étant le grand axe, et F, F′ les foyers, on fixe en F, F′ les extrémités d'un cordeau FMF′ dont la longueur FM + MF′ est égale au grand axe AA′. Faisant alors glisser le long du cordeau, dont on tient toujours également tendues les deux parties variables et de somme constante MF, MF′, une pointe si l'on opère sur le terrain, ou un crayon si l'on trace sur un corps dur, cette pointe ou ce crayon décrira l'ellipse d'un mouvement continu. La somme des rayons vecteurs étant égale à la longueur AA′ du cordeau pour toutes les positions de la pointe ou crayon M, la courbe est bien une ellipse.

1195. *Tracé de l'ellipse à l'aide d'une règle.*

Fig. 292.



Marquant sur l'arête CD d'une règle mince trois points C, E, G, tels que l'on ait $CG = OA = a$, le demi-grand axe, et $EG = OB = b$ le demi-petit axe, d'où $CE = a - b$; faisant mouvoir la règle de manière que le point E reste constamment sur AA′, et celui C sur BB′, le point G se mouvra sur l'ellipse ayant AA′ et BB′ pour axes. On pourra alors marquer autant de points qu'on voudra de l'ellipse, et par suite tracer la courbe.

Ce moyen est employé pour tracer les ellipses d'intrados et d'extrados des voûtes de ponts appareillés en ellipse.

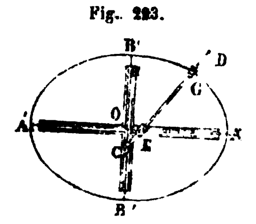
Le point G appartient bien à l'ellipse; car, menant CH parallèle à OA, on a

$$\frac{GP}{GH} = \frac{GE}{GC} \quad \text{ou} \quad \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b}{a}; \quad \text{d'où} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \qquad (1178)$$

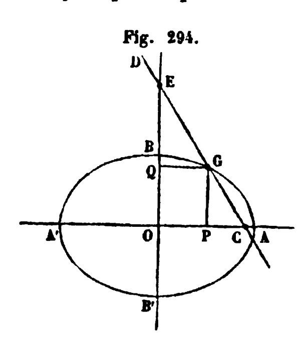
Si du point C comme centre, avec $CE = a - b$ pour rayon, on avait décrit un arc de cercle, on aurait déterminé le point E, et en joignant CE, puis prolongeant d'une quantité $EG = b$, on aurait également obtenu le point G.

1196. *Le compas à ellipse*, fondé sur le principe du numéro précédent, permet de tracer l'ellipse d'un mouvement continu. Il est formé de deux coulisses assemblées d'équerre, de manière que leurs axes puissent à la fois coïncider avec les deux axes AA′ et BB′ de l'ellipse à tracer, et d'une règle CD garnie de deux curseurs E, G, que l'on peut fixer en deux points quelconques de la règle. Le curseur E porte une patte à pivot

Fig. 293.



qui peut glisser dans la coulisse AA′, et celui G une pointe ou un crayon qui trace la courbe quand on fait mouvoir la règle CD. A l'extrémité C de la règle se trouve un support à pivot qui glisse dans la coulisse BB′. Ayant fixé les curseurs E et G de manière que l'on ait CG = OA et EG = OB, si, après avoir fait coïncider les axes des coulisses avec les axes de l'ellipse, on fait tourner la règle CD, le point C restera toujours sur l'axe BB′ et celui E sur l'axe AA′, et l'on conçoit que le point G décrira l'ellipse.

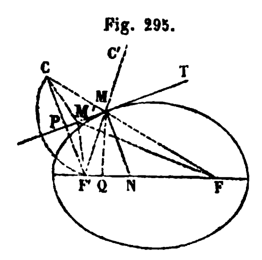


1197. Au lieu d'espacer les points sur l'arête de la règle comme au n° 1195, on peut prendre GC = b et GE = a. Faisant mouvoir la règle de manière que C reste sur le grand axe et E sur le petit, le point G décrira l'ellipse.

En effet, les deux triangles semblables GPC et GQE donnent

$$\frac{\mathrm{GP}}{\mathrm{EQ}} = \frac{\mathrm{GC}}{\mathrm{GE}} \text{ ou } \frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b}{a}. \quad (1174)$$

1198. *Mener une tangente à l'ellipse par un point* M *pris sur la courbe.* On mène le rayon vecteur MF′, et celui MF que l'on prolonge de MC = MF′; on joint CF′, et la perpendiculaire TP abaissée du point M sur CF′ est tangente à l'ellipse, c'est-à-dire qu'un point quelconque M′, autre que M, pris sur TP, est situé hors de l'ellipse.



En effet, joignant M′F, M′F′ et M′C, le triangle MCF′ étant isocèle, la droite MP est perpendiculaire sur le milieu de CF′, et l'on a M′F′ = M′C. Dans le triangle FCM′, on a M′F + M′C ou M′F + M′F′ > CF ou MF + MF′ ou $2a$; donc le point M′ est situé hors de l'ellipse (1181), et la droite TP est bien tangente au point M.

Remarque. La tangente TP divise en deux parties égales les angles formés par chacun des rayons vecteurs avec le prolongement de l'autre. En effet, le triangle F′MC étant isocèle, la perpendiculaire MP divise bien l'angle F′MC ainsi que son opposé au sommet FMC′ chacun en deux parties égales.

1199. *Mener une normale à l'ellipse en un point* M (*fig.* 295).

On joint M aux foyers, et la bissectrice MN de l'angle formé par les deux rayons vecteurs est normale à l'ellipse, c'est-à-dire perpendiculaire à la tangente TM (647, 975).

En effet, les angles CMF′ et C′MF étant égaux, leurs moitiés sont égales, et l'on a PMF′ = TMF; comme de plus F′MN = NMF, ajoutant membre à membre ces deux égalités, il vient PMN = NMT; donc MN est bien perpendiculaire à TM (573).

En prolongeant MN jusqu'à FF', et projetant le point M sur FF', la projection NQ de MN sur FF' est la *sous-normale.*

1200. *Pour mener à l'ellipse une tangente parallèle à une droite* CD, du foyer F' on mène F'G perpendiculaire à CD; de l'autre foyer F, avec un rayon FG $=2a$ (1174), on décrit un arc de cercle qui détermine le point G; on trace FG, ce qui donne le point de contact M; la tangente MT s'obtient ensuite en menant par M une parallèle à CD ou une perpendiculaire à F'G.

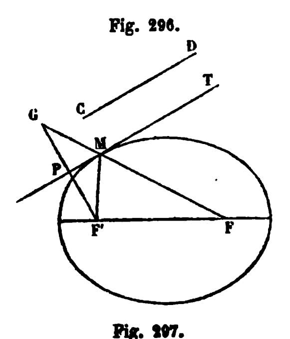


Fig. 296.

1201. *Mener une tangente à l'ellipse par un point* M *pris hors de l'ellipse.*

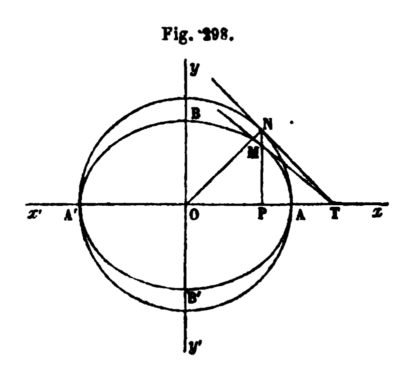
Du point M comme centre, avec MF', distance du point M au foyer le plus voisin F', pour rayon, on décrit un arc de cercle; du foyer le plus éloigné F, avec le grand axe de l'ellipse pour rayon, on décrit un second arc de cercle qui coupe le premier aux points C, C'; on joint CF et C'F, ce qui détermine les points N, N', et menant MN, MN', ces droites sont tangentes à l'ellipse en N et N'.

Fig. 297.

En effet, de ce que NF' + NF = CF, grand axe, on a NF' = NC; comme de plus MF' = MC, la droite MN est perpendiculaire sur le milieu de CF' (584), et divise l'angle F'NC en deux parties égales; donc elle est tangente à l'ellipse au point N (1198). On démontrerait de même que MN' est tangente en N'.

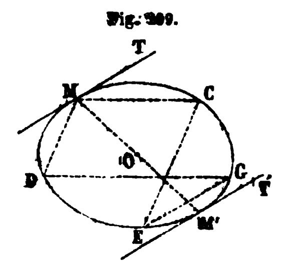
1202. Toutes les ellipses ayant même grand axe AA', et la circonférence qui a ce grand axe pour diamètre, jouissant de la propriété que les tangentes menées par les points N, M..., où une même perpendiculaire au grand axe rencontre les ellipses et la circonférence, viennent concourir en un même point T de la direction du grand axe, cette propriété ramène la difficulté du tracé de la tangente à l'ellipse à celle de la tangente à la circonférence (1167, 1169).

Fig. 298.



1203. *Autre moyen de mener une tangente à l'ellipse par un point pris sur la courbe.*

Fig. 209.



Par le point M on mène deux cordes MC, MD; par les points C et D on en trace deux autres CE, DG respectivement parallèles à MD, MC, et la parallèle MT menée par M à EG est la tangente demandée.

Menant le diamètre MM', il divise la corde EG et toutes celles qui sont parallèles à EG en deux parties égales; MT est donc parallèle au diamètre conjugué de MM' (1188), ce qui fournit encore un moyen de déterminer la direction de MT; mais il est plus commode de construire EG que le diamètre conjugué de MM'.

Remarque. La parallèle M'T' menée à EG ou à MT est aussi tangente à l'ellipse. Ainsi, comme pour le cercle, les tangentes menées à l'ellipse aux extrémités d'un même diamètre sont parallèles (1187).

1204. *La longueur d'une ellipse ou d'un arc d'ellipse* n'est donnée exactement par aucune construction de géométrie élémentaire; pour la mesurer, il faut avoir recours à des moyens mécaniques, tels, par exemple, que celui qui consiste à contourner un fil sur la courbe, et à le redresser ensuite pour en évaluer la longueur. On peut considérer aussi l'ellipse ou l'arc d'ellipse comme formé d'une suite de droites très-petites, dont la somme des longueurs est à peu près égale à la longueur de l'ellipse ou de l'arc d'ellipse (1154).

l étant la longueur d'une demi-ellipse dont a et b sont le demi-grand axe et le demi-petit axe, on a

$$l = \pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2 - \ldots\right],$$

formule dans laquelle

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \frac{c}{a}, \qquad (1174)$$

et qui devient quand $a = b = r$, c'est-à-dire quand la demi-ellipse est une demi-circonférence,

$$l = \pi r. \qquad (727)$$

Table pour construire une ellipse par points, déterminer la normale en un quelconque de ses points, et calculer son demi-périmètre l.

Angle θ	$k = \cos\theta$	$\sin\theta$	½ périm. l pour $a=1$	Différences.	Angle θ	$k = \cos\theta$	$\sin\theta$	½ périm. l pour $a=1$	Différences.
0°	1,00000	0,00000	3,14159	0,00024	45°	0,70711	0,70711	2,70128	0,01767
1	0,99985	0,01745	3,14135	0,00072	46	0,69466	0,71934	2,68361	0,01787
2	0,99939	0,03490	3,14063	0,00120	47	0,68200	0,73135	2,66573	0,01806
3	0,99863	0,05234	3,13944	0,00167	48	0,66913	0,74314	2,64768	0,01823
4	0,99756	0,06976	3,13776	0,00215	49	0,65606	0,75471	2,62945	0,01838
5	0,99619	0,08716	3,13564	0,00262	50	0,64279	0,76604	2,61107	0,01852
6	0,99452	0,10453	3,13299	0,00310	51	0,62932	0,77715	2,59255	0,01865
7	0,99255	0,12187	3,12989	0,00357	52	0,61566	0,78801	2,57390	0,01876
8	0,99027	0,13917	3,12632	0,00404	53	0,60182	0,79864	2,55514	0,01885
9	0,98769	0,15643	3,12228	0,00451	54	0,58779	0,80902	2,53629	0,01894
10	0,98481	0,17365	3,11777	0,00498	55	0,57358	0,81915	2,51735	0,01899
11	0,98163	0,19081	3,11279	0,00544	56	0,55919	0,82904	2,49836	0,01904
12	0,97815	0,20791	3,10736	0,00590	57	0,54464	0,83867	2,47932	0,01907
13	0,97437	0,22495	3,10146	0,00635	58	0,52992	0,84805	2,46025	0,01908
14	0,97030	0,24192	3,09510	0,00680	59	0,51504	0,85717	2,44117	0,01906
15	0,96593	0,25882	3,08830	0,00726	60	0,50000	0,86603	2,42211	0,01904
16	0,96126	0,27564	3,08104	0,00774	61	0,48481	0,87462	2,40307	0,01898
17	0,95630	0,29237	3,07333	0,00814	62	0,46947	0,88295	2,38409	0,01892
18	0,95106	0,30902	3,06519	0,00858	63	0,45399	0,89101	2,36517	0,01882
19	0,94552	0,32557	3,05661	0,00902	64	0,43837	0,89879	2,34625	0,01870
20	0,93969	0,34202	3,04759	0,00944	65	0,42262	0,90631	2,32765	0,01856
21	0,93358	0,35837	3,03815	0,00986	66	0,40674	0,91355	2,30909	0,01840
22	0,92718	0,37461	3,02829	0,01028	67	0,39073	0,92050	2,29069	0,01821
23	0,92050	0,39073	3,01801	0,01069	68	0,37461	0,92718	2,27248	0,01799
24	0,91355	0,40674	3,00732	0,01110	69	0,35837	0,93358	2,25449	0,01774
25	0,90631	0,42262	2,99622	0,01149	70	0,34202	0,93969	2,23675	0,01747
26	0,89879	0,43837	2,98473	0,01188	71	0,32557	0,94552	2,21928	0,01716
27	0,89101	0,45399	2,97285	0,01227	72	0,30902	0,95106	2,20212	0,01682
28	0,88295	0,46947	2,96058	0,01265	73	0,29237	0,95630	2,18530	0,01645
29	0,87462	0,48481	2,94793	0,01302	74	0,27564	0,96126	2,16885	0,01604
30	0,86603	0,50000	2,93492	0,01337	75	0,25882	0,96593	2,15281	0,01560
31	0,85717	0,51504	2,92154	0,01373	76	0,24192	0,97030	2,13721	0,01510
32	0,84805	0,52992	2,90784	0,01408	77	0,22495	0,97437	2,12211	0,01456
33	0,83867	0,54464	2,89373	0,01444	78	0,20791	0,97815	2,10755	0,01398
34	0,82904	0,55919	2,87932	0,01474	79	0,19081	0,98163	2,09357	0,01335
35	0,81915	0,57358	2,86458	0,01506	80	0,17365	0,98481	2,08022	0,01265
36	0,80902	0,58779	2,84952	0,01538	81	0,15643	0,98769	2,06757	0,01189
37	0,79864	0,60182	2,83414	0,01567	82	0,13917	0,99027	2,05568	0,01106
38	0,78801	0,61566	2,81847	0,01596	83	0,12187	0,99255	2,04462	0,01015
39	0,77715	0,62932	2,80251	0,01623	84	0,10453	0,99452	2,03447	0,00915
40	0,76604	0,64279	2,78628	0,01651	85	0,08716	0,99619	2,02532	0,00803
41	0,75471	0,65606	2,76977	0,01677	86	0,06976	0,99756	2,01729	0,00678
42	0,74314	0,66913	2,75300	0,01701	87	0,05234	0,99863	2,01051	0,00535
43	0,73135	0,68200	2,73599	0,01724	88	0,03490	0,99939	2,00516	0,00366
44	0,71934	0,69466	2,71876	0,01747	89	0,01745	0,99985	2,00150	0,00150
45	0,70711	0,70711	2,70128		90	0,00000	1,00000	2,00000	

1re *application*. Prenant pour axes coordonnés le grand axe et le petit axe de l'ellipse, x et y étant les coordonnées d'un point quelconque de la courbe, et s la sous-normale en ce point (1199), on a

$$\frac{x}{a} = \cos\theta, \quad \frac{y}{b} = \sin\theta, \quad s = \frac{b^2}{a}\cos\theta,$$

et $\frac{y}{s}$ est la pente de la normale à l'horizon, c'est-à-dire sur l'axe des x; il est utile de connaître cette pente pour l'exécution des voûtes en ellipse (1195).

On se rend compte des formules précédentes à l'aide de la *fig.* 285, dans laquelle θ est l'angle COA, qui varie pour une même ellipse avec la position du point M sur la courbe.

Ayant, par exemple, $a = 15^m,00$ et $b = 10^m,00$, pour un point dont $x = 11^m,490\,60$, on a $\cos\theta = \frac{11,490\,60}{15} = 0,766\,04$. La table donne, sur la même ligne que cette valeur de $\cos\theta$, $\sin\theta = 0,642\,79$. Par suite, on a

$$y = 10 \times 0,642\,79 = 6^m,427\,9, \quad \text{et} \quad s = \frac{100}{15} \times 0,766\,04 = 5,106\,93.$$

La *pente de la normale* est, en désignant par α l'angle de la normale avec l'axe des x,

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{y}{s} = \frac{b \sin\theta}{\frac{b^2}{a}\cos\theta} = \frac{a}{b}\operatorname{tang}\theta = \frac{15}{10} \times 0,839\,10 = 1,258\,65.$$

Ayant $\operatorname{tang}\alpha$, la table du n° 1138 donne $\alpha = 51°\,32'$.

Si le rapport $\frac{x}{a} = \cos\theta$ n'était pas contenu dans la table précédente, on aurait recours à celle du n° 1138 ou encore à celle de Callet (1120), pour faire usage des formules ci-dessus.

2° *application.* Ayant $a = 15^m,00$ et $b = 10^m,00$, on pose

$$\frac{b}{a} = \cos\theta = \frac{10}{15} = 0,666\,67.$$

L'angle θ est constant pour une même ellipse, et c'est réellement COA pour le cas de la *fig.* 285.

La table donne pour la longueur l de la demi-ellipse, a étant pris pour unité, en ayant recours à la méthode des différences proportionnelles (730),

$$2,647\,68 - 0,018\,23\,\frac{0,669\,13 - 0,666\,67}{0,669\,13 - 0,656\,06} = 2,647\,68 - 0,003\,43 = 2,644\,25.$$

Par suite, en mètres, on a

$$l = 15 \times 2,644\,25 = 39^m,663\,75.$$

Remarques. Si au lieu de b on avait donné la demi-distance c des foyers (1174), on aurait $\frac{c}{a} = \sin\theta$ et la table aurait encore donné à côté de $\sin\theta$ la valeur du demi-périmètre de l'ellipse, a étant pris pour unité.

Désignant par ρ le *rayon de courbure* au point dont l'abcisse est x, on a



$$\rho = \frac{a^2}{b}\left(1 - \frac{c^2x^2}{a^4}\right)^{\frac{3}{2}},$$

ou en posant $\frac{b}{a} = sin\ \alpha$ ou $\frac{c}{a} = cos\ \alpha$, et $\frac{c}{a} \times \frac{x}{a} = cos\ \beta$,

$$\rho = \frac{a\ sin^3\ \beta}{sin\ \alpha}.$$

Désignant par x' l'*abscisse du centre de courbure*, on a

$$x' = \frac{c^2x^3}{a^4}.$$

Table du développement des contours elliptiques, le petit axe 2b étant représenté par 100. Cette 2me table, moins rigoureuse dans sa partie décimale que la précédente, fournit plus directement les résultats qui n'exigent pas une grande exactitude.

Grand axe 2a	Périmètre 2l	Grand axe 2a	Périmètre 2l	Grand axe 2a	Périmètre 2l
101	315,7478	350	762,0212	680	1400,0412
102	317,3364	360	780,9768	690	1419,6200
103	318,9249	370	799,9512	700	1439,2084
104	320,5135	380	819,0084	710	1458.8072
105	322 1021	390	838,0740	720	1478,4416
106	323,6907	400	857,1708	730	1498,0284
107	325 2792	410	876,2972	740	1517,6476
108	326,8678	420	895,4524	750	1537,2756
109	328,4564	430	914,6324	760	1556,9120
110	330,0450	440	933,8376	770	1576,5548
120	346,2680	450	953,0668	780	1596,2048
130	362,7856	460	972,3192	790	1615,8624
140	379,5624	470	991,5944	800	1635,5248
150	396,5712	480	1010,8896	810	1655,1948
160	413,7792	490	1030,2064	820	1674,8704
170	431.4732	500	1049 5404	830	1694,5504
180	448,7276	510	1068,8901	840	1714,2392
190	466,1488	520	1088,2616	850	1733 9332
200	484,2652	530	1107,6492	860	1753,6321
210	502,2223	540	1127,0492	870	1773,3359
220	520,2924	550	1146,4672	880	1793,0446
230	538,4560	560	1165,8968	890	1812,7580
240	556.7612	570	1185,3452	900	1832,4772
250	575,0624	580	1204.8044	910	1852,2020
260	593,4832	590	1224,2776	920	1871,9300
270	611,9944	600	1243,7604	930	1891,6640
280	630,5401	610	1263,2568	940	1911,4004
290	649,1640	620	1282,7656	950	1931,1452
300	667,8392	630	1302,2852	960	1950,8916
310	686 5904	640	1321,8172	970	1970,6404
320	705,3808	650	1341.3571	980	1990,3943
330	724,2152	660	1360,9096	990	2010,1523
340	743,0984	670	1380,4708	1000	2029,9192

Pour $2a = 30^m,00$ et $2b = 20^m$, faisant $2b = 100$, on a

$$2a = 100 \times \frac{30}{20} = 150;$$

valeur de $2a$ pour laquelle la table donne $2l = 396,5712$; par conséquent, en mètres, on a

$$2l = 396,5712 \times \frac{20}{100} = 79^m,31424 \quad \text{ou} \quad l = 39^m,65712,$$

valeur qui ne diffère pas sensiblement de celle fournie par la première table.

1205. *Surface de l'ellipse.* Pouvant considérer une ellipse dont le grand axe est $2a$ et le petit axe $2b$ comme étant la projection sur son plan d'un cercle dont le diamètre est $2a$, et dont l'angle θ du plan de l'ellipse avec celui du cercle est tel que l'on a $\cos\theta = \frac{b}{a}$ (1187), l'aire s de l'ellipse est, s' étant celle du cercle,

$$s = s' \cos\theta = \pi a^2 \frac{b}{a} = \pi ab.$$

Pour $a = 3^m$ et $b = 2^m$, on a

$$s = 3,1416 \times 3 \times 2 = 18^{mq},85.$$

Ainsi l'on a $s : s' = b : a$.

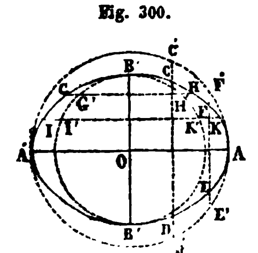
La surface de l'ellipse est donc équivalente à celle πr^2 d'un cercle dont le rayon r est moyen proportionnel entre les demi-grand et demi-petit axes a et b, c'est-à-dire donnant $r^2 = ab$ (728, 996).

Lorsque les deux foyers de l'ellipse se rapprochent au point de se confondre, les rayons vecteurs deviennent égaux pour tous les points, et égaux chacun au demi-grand axe, qui est, dans ce cas, égal au demi-petit axe. L'ellipse est alors un cercle ayant $a = b = r$ pour rayon, et par suite πr^2 pour surface. (Voir la 8e partie.)

1206. La portion d'ellipse comprise entre deux cordes parallèles est un *segment*.

1207. *Surface d'un segment d'ellipse compris entre deux cordes parallèles au petit ou au grand axe.*

Fig. 300.



1° On décrit un cercle sur le grand axe AA' comme diamètre; puis, après avoir évalué la surface S' du segment circulaire C'D'E'F' (735), on conclut la surface S du segment d'ellipse CDEF de la proportion

$$S : S' = b : a,$$

d'où $$S = S' \times \frac{b}{a}.$$

En effet, de même qu'on peut considérer l'ellipse entière comme étant la projection du cercle (1205), on peut considérer le segment elliptique comme étant la projection du segment circulaire, et l'on a bien

$$S = S' \cos\theta = S' \frac{b}{a}, \quad \text{d'où} \quad S : S' = b : a.$$

2° Les cordes GH et IK qui terminent le segment étant parallèles au grand axe, décrivant un cercle sur le petit axe BB' comme diamètre, la surface du segment d'ellipse est donnée par la proportion

$$\text{GHIK ou } S : \text{G'H'I'K' ou } S' = a : b, \quad \text{d'où} \quad S = S' \times \frac{a}{b}.$$

Lorsque les cordes parallèles sont perpendiculaires aux extrémités du petit axe, les segments deviennent l'ellipse et le cercle de rayon b, et le rapport de leurs surfaces est encore $a : b$.

1208. L'*ellipsoïde* de révolution est le solide engendré par la révolution d'une ellipse autour d'un de ses axes.

1209. *La surface de l'ellipsoïde* n'est donnée par aucune expression algébrique. Pour l'évaluer, on considère l'ellipse génératrice comme formée d'une série de petites droites qui engendrent dans leur révolution des surfaces latérales de cylindres de cônes et de troncs de cônes; on mesure toutes ces surfaces (922, 926, 932), et leur somme est la surface approchée de l'ellipsoïde.

1210. *Volume de l'ellipsoïde. Lorsque l'ellipsoïde est quelconque*, c'est-à-dire quand le plan mené par le centre perpendiculairement au grand axe $2a$ détermine, non pas un cercle de diamètre $2b$ comme dans l'ellipsoïde de révolution, mais une ellipse ayant $2b$ et $2c$ pour axes, son volume est

$$V = \frac{4}{3} \pi abc.$$

Pour un ellipsoïde de révolution, selon que l'ellipse génératrice tourne autour de son grand ou petit axe, il suffit de faire $c = b$ ou $c = a$ dans la formule précédente, et l'on a respectivement

$$V = \frac{4}{3} \pi ab^2 \quad \text{ou} \quad V = \frac{4}{3} \pi a^2 b.$$

Lorsque $a = b = r$, c'est-à-dire quand l'ellipse génératrice est un cercle, les expressions précédentes deviennent

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Ce qui devait être, puisqu'alors l'ellipsoïde est une sphère de rayon r (947).

HYPERBOLE.

1211. L'*hyperbole* est une courbe à deux branches non fermées (*fig.* 301), telle que la différence MF' — MF des distances de chacun de ses points à deux points fixes ou *foyers* F, F' est une quantité constante.

On voit que, comme l'ellipse (1170), l'hyperbole se définit par son équation en coordonnées focales (1143), équation qui est, en désignant par les variables ρ et ρ' les rayons vecteurs de chacun des points de la courbe, et par $2a$ la différence constante de ces rayons vecteurs,

$$\rho' - \rho = 2a.$$

Deux hyperboles qui ont les mêmes foyers sont dites *homofocales*.

1212. La droite qui passe par les foyers F, F' de l'hyperbole est l'*axe transverse* (*fig.* 301).

Les points A, A', où l'axe transverse rencontre les branches de la courbe, sont les *sommets* de l'hyperbole.

La perpendiculaire menée sur le milieu de AA' est l'*axe non transverse*.

Le point de rencontre O des axes est le *centre* de l'hyperbole.

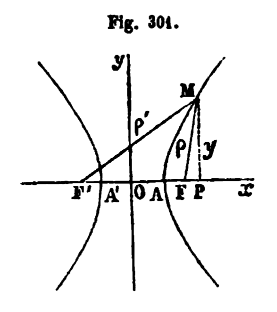
1213. *Les distances des foyers aux sommets voisins sont égales*, et, par suite, *il en est de même de leurs distances au centre :*

$$AF = A'F' \quad \text{et} \quad FO = F'O.$$

En effet, les sommets A et A' appartenant à l'hyperbole, on a

$$AF' - AF \text{ ou } AA' + A'F' - AF = A'F - A'F' \text{ ou } A'A + AF - A'F'.$$

Fig. 301.



Supprimant la quantité AA' commune aux deux membres de cette équation, et réunissant les mêmes quantités dans un même membre, il vient

$$2A'F' = 2AF, \quad \text{ou} \quad AF = A'F'.$$

Ajoutant la quantité constante AA' aux membres de cette égalité, on a $A'F = AF'$. Ce qui fait voir que les distances des foyers aux sommets les plus éloignés sont aussi égales.

De ce que $AO = A'O$, on a aussi $FO = F'O$.

1214. *La différence constante* 2a *des rayons vecteurs est égale à la distance* AA' *des sommets.*

Le point A appartenant à l'hyperbole, on a

$$AF' - AF \quad \text{ou} \quad AA' + A'F' - AF = 2a;$$

d'où, en remarquant que $A'F' = AF$ (1213),

$$AA' = 2a.$$

$2a$ est la longueur de l'axe transverse.

1215. *Équation de l'hyperbole en prenant pour axes coordonnés les axes de la courbe* (1212).

Soit $AA' = 2a$ et $FF' = 2c$. On a toujours $2a < 2c$ ou $a < c$.

Puisque $F'P = x + c$ et $FP = x - c$, les triangles rectangles MPF' et MPF donnent respectivement (704)

$$\rho'^2 = y^2 + (x + c)^2 \quad \text{et} \quad \rho^2 = y^2 + (x - c)^2; \qquad (a)$$

d'où, en développant (701, 702) et simplifiant,

$$\rho'^2 - \rho^2 = y^2 + x^2 + c^2 + 2cx - y^2 - x^2 - c^2 + 2cx = 4cx,$$

c'est-à-dire (703)

$$(\rho' + \rho)(\rho' - \rho) = 4cx,$$

d'où
$$\rho' + \rho = \frac{4cx}{\rho' - \rho} = \frac{4cx}{2a} = \frac{2cx}{a}.$$

Comme de plus on a

$$\rho' - \rho = 2a,$$

ajoutant membre à membre ces deux équations, il vient

$$2\rho' = \frac{2cx}{a} + 2a \quad \text{ou} \quad \rho' = \frac{cx}{a} + a,$$

et par suite
$$\rho'^2 = \frac{c^2x^2}{a^2} + a^2 + 2cx.$$

Égalant cette valeur de ρ'^2 à sa valeur (a), on a, après avoir chassé le dénominateur a^2,

$$a^2y^2 + a^2x^2 + a^2c^2 + 2a^2cx = c^2x^2 + a^4 + 2a^2cx;$$

d'où, en supprimant $2a^2cx$, et en réunissant les termes en x^2 et ceux en a^2,

$$a^2y^2 + x^2(a^2 - c^2) = a^2(a^2 - c^2).$$

Représentant la quantité constante $a^2 - c^2$, qui est nécessairement négative, par $-b^2$, on a pour l'équation de l'hyperbole

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2, \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = -1;$$

d'où
$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \qquad (525)$$

De cette équation il résulte que, comme l'ellipse (1174, 1182), l'hyperbole est partagée en deux parties symétriques, et par suite égales (831), par chacun de ses axes. Cette équation montre, de plus, qu'on ne peut avoir $x < a$, et que selon que x varie de $\pm a$ à $\pm\infty$, y varie de 0 à $\pm\infty$.

Ainsi la courbe se compose de deux branches infinies.

1216. La distance $2c$ des foyers se nomme l'*excentricité* de l'hyperbole (1178).

1217. *L'hyperbole est le lieu géométrique des points dont la différence des rayons vecteurs est égale à la distance 2a des sommets de la courbe* (1181).

Fig. 302.

1° Le point M étant situé entre les deux branches de l'hyperbole, on a $MF' - MF < 2a$.

En effet, menant CF', le point C appartenant à l'hyperbole, on a

$$CF' - CF = 2a.$$

Ayant $CF' > MF' - MC$ (602), on a bien, en remplaçant CF' par cette quantité plus petite,

$$MF' - MC - CF \quad \text{ou} \quad MF' - MF < 2a.$$

2° Le point M' n'étant pas situé entre les deux branches de l'hyperbole, on a

$$M'F' - M'F > 2a.$$

Menant C'F, le point C' appartenant à l'hyperbole, on a

$$C'F' - C'F = 2a;$$

en remplaçant dans cette égalité C'F par la quantité plus petite $M'F - M'C'$, on a bien

$$C'F' - M'F + M'C' \quad \text{ou} \quad M'F' - M'F > 2a.$$

Corollaire. Les réciproques des 1° et 2° sont vraies.

1218. *Les parties* OM, OM', *d'une même droite* MM', *comprises entre le point de rencontre* O *des axes et les deux branches de l'hyperbole sont égales.*

Fig. 303.

Menant MP perpendiculaire à Ox, et prenant $PN = PM$, le point N appartient à l'hyperbole (1215). Menant NQ perpendiculaire à Oy, et prolongeant jusqu'à la rencontre de MO au point M'; de ce que NM' est parallèle à PO, ayant $PN = PM$, on a $OM' = OM$. De cette égalité et de ce que OQ est parallèle à MN, on a $QM' = QN$, et N appartenant à l'hyperbole, son symétrique M' lui appartient aussi; donc le point M', qui donne $OM' = OM$, est situé sur l'hyperbole.

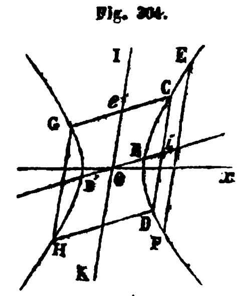
1219. *Remarques.* On peut donc considérer le point O comme étant le *centre* de l'hyperbole, dont les droites telles que MM' sont les *diamètres*.

Les droites passant par le centre sans rencontrer les branches de l'hyperbole sont appelées *diamètres illimités*, par rapport aux premiers, nommés *diamètres limités*.

Une droite quelconque ne pouvant rencontrer l'hyperbole en plus de deux points, tout diamètre ne peut rencontrer chacune des branches en plus d'un point, et toute corde de l'une des branches ne rencontre pas l'autre.

1220. Lorsqu'on joint le centre O au milieu i d'une corde, le diamètre BB′ qui en résulte divise également en deux parties égales toutes les cordes EF, GH parallèles à CD. Le diamètre illimité IK, qui joint le centre au milieu e de la corde CG, divise également en deux parties égales toute corde DH parallèle à la première (1188).

Fig. 304.



1221. Comme pour l'ellipse, deux diamètres BB′ et IK, tels que chacun d'eux divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre, sont appelés *diamètres conjugués*.

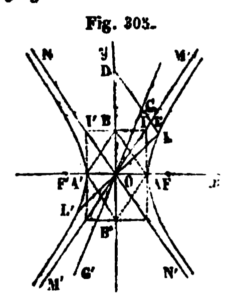
Étant donné un diamètre de l'hyperbole, on trouve son conjugué en opérant comme pour l'ellipse (1189).

1222. *Étant donné une hyperbole ou un arc d'hyperbole, pour trouver son centre, puis ses axes, on opère comme pour l'ellipse* (1190, 1191).

1223. *Asymptotes.* Les branches de l'hyperbole se prolongeant jusqu'à l'infini, les diamètres limités vont en augmentant, à mesure qu'ils font des angles plus grands avec l'axe transverse, jusqu'à l'infini. Les deux diamètres infinis qui forment le passage des diamètres limités aux diamètres illimités prennent le nom d'*asymptotes.* Ce sont les tangentes à l'infini aux deux branches de la courbe.

1224. *Tracer les asymptotes d'une hyperbole dont on connaît les foyers.*

Fig. 305.



De l'un des sommets A comme centre, avec un rayon égal à la demi-distance $OF = c$ des foyers, on décrit un arc de cercle qui coupe l'axe non transverse aux points B, B′; joignant AB, AB′, les parallèles MM′, NN′, menées par le centre O, à ces droites, sont les asymptotes de la courbe; c'est-à-dire qu'elles vont constamment en se rapprochant des branches de la courbe, qu'elles ne rencontrent cependant qu'à l'infini.

Menant les droites A′B, A′B′, elles sont aussi parallèles aux asymptotes. Il est facile de voir qu'en traçant par A, A′, B et B′ des parallèles aux axes, on obtient un rectangle dont les sommets sont sur les asymptotes.

Ayant $OI = A'B = OF$, il en résulte aussi qu'élevant aux sommets A et A′ des perpendiculaires à Ox, et décrivant un arc de cercle du point O comme centre avec OF pour rayon, on obtient les points I et I′ qui déterminent les asymptotes MM′, NN′. Si l'on a les asymptotes et les sommets, pour avoir les foyers, il suffit de prendre $OF = OF' = OI$.

1225. Dans le triangle rectangle AOB, on a $AB = c$, $OA = a$; donc $OB^2 = c^2 - a^2 = b^2$ (1215). C'est pour cette raison que l'on dit que $BB' = 2b$ est la longueur de l'axe non transverse.

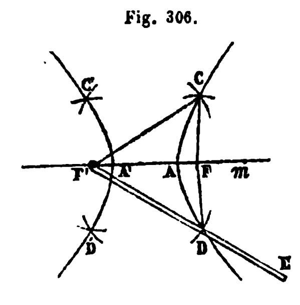
Lorsque les axes $2a$ et $2b$ sont égaux, l'hyperbole est dite *équilatère*. Dans ce cas, les asymptotes sont rectangulaires; car les diagonales AA', BB' étant égales, ABA'B' est un carré, et par suite les asymptotes sont rectangulaires entre elles comme étant parallèles aux côtés de ce carré.

1226. Lorsque les asymptotes sont tracées, pour mener le conjugué d'un diamètre donné LL' (1221), par L on mène une parallèle LD à l'asymptote la plus éloignée de L; elle coupe l'autre asymptote en E; on prend $EG = EL$, et joignant GO, on a le diamètre conjugué demandé.

Cette construction est fondée sur ce que *chaque asymptote divise en deux parties égales les parallèles à l'autre, comprises entre deux diamètres conjugués.* Ainsi, de même que l'asymptote MM' divise en deux parties égales GL et toutes les droites qui lui sont parallèles et comprises entre les diamètres conjugués LL', GG', elle divise de la même manière toutes les parallèles AB, A'B'..., comprises entre les deux autres diamètres conjugués AA', BB'.

1227. *Tracé de l'hyperbole par points.*

Fig. 306.



F, F' étant les foyers d'une hyperbole, dont A et A' sont les sommets, pour tracer cette courbe, des foyers F et F' comme centres, avec un rayon Am, qui peut varier depuis AF jusqu'à l'infini, on décrit des arcs de cercle; puis, des mêmes centres F et F', avec un rayon égal à A'm, on décrit des arcs de cercle qui coupent chacun des premiers en des points C, D appartenant à l'une des branches de l'hyperbole, et C', D' appartenant à l'autre branche. En effet, l'un quelconque C de ces points donne bien $CF' - CF = A'm - Am =$ constante $2a$.

Faisant varier la position de m sur le prolongement de AF, on déterminera par la construction précédente autant de points qu'on voudra de l'hyperbole; et traçant des courbes qui raccordent ces points, elles pourront être considérées comme étant les deux branches de l'hyperbole demandée.

1228. *Tracé de l'hyperbole par un mouvement continu.* Soit (*fig.* 306) F'D une règle portant à son extrémité F' un petit trou placé dans le prolongement d'une de ses grandes arêtes, et EDF un fil fixé à l'autre extrémité de cette arête. Prenant la longueur EDF du fil telle que l'on ait $EF' - (ED + DF) = AA' = 2a$, si, après avoir fixé par des petits pivots l'extrémité F' de la règle à l'un des foyers, et l'extrémité F du fil à l'autre foyer, on fait tourner la règle en maintenant toujours le fil tendu à l'aide d'une pointe ou d'un crayon qu'on fait glisser le long de l'arête de la règle; cette pointe ou ce crayon tracera, dans son mouvement, la branche CD de l'hyperbole. On a bien en effet, pour une position quelconque D du crayon, $DF' - DF = EF' - (ED + DF) = AA' = 2a$.

L'autre branche de l'hyperbole se tracerait de la même manière, en fixant l'extrémité de la règle au foyer F et celle du fil au foyer F'.

1229. *Mener une tangente à l'hyperbole par un point* M *pris sur la courbe* (1198).

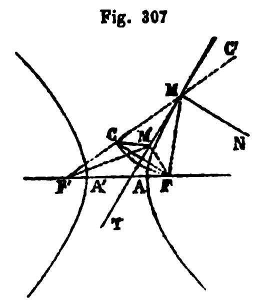


Fig. 307

On mène les rayons vecteurs MF, MF', on prend $MC = MF$, on trace CF, et la perpendiculaire MT, abaissée du point M sur CF, est la tangente demandée, c'est-à-dire que le point quelconque M', autre que M, pris sur cette droite, donne

$$M'F' - M'F < AA' \text{ ou } 2a. \qquad (1217)$$

En effet, MT étant perpendiculaire sur le milieu de CF, puisque le triangle MCF est isocèle, on a

$$F'C + CM' - M'F = F'C = MF' - MF = 2a;$$

mais on a $F'C + CM' > M'F'$; donc on a bien

$$M'F' - M'F < 2a.$$

Remarque. Le triangle MCF étant isocèle, on voit que la tangente divise l'angle des rayons vecteurs en deux parties égales.

1230. Comme pour l'ellipse (1203), la tangente à l'hyperbole est parallèle au conjugué du diamètre qui passe par le point de contact, ce qui fournit un *second moyen pour mener une tangente à l'hyperbole.*

1231. *Mener une normale à l'hyperbole par le point* M (*fig.* 307).

La bissectrice MN de l'angle FMC', que fait le rayon vecteur MF avec le prolongement MC' de l'autre rayon vecteur, est la normale demandée. On prouverait que MN est en effet perpendiculaire à la tangente MT, en raisonnant comme au n° 1199.

1232. *Mener une tangente à l'hyperbole par un point extérieur* M (1201).

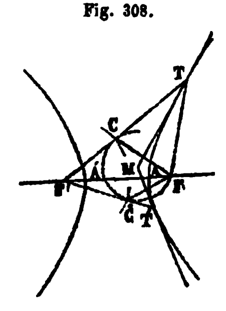


Fig. 308.

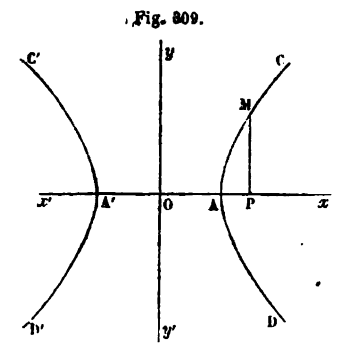
Du point M comme centre, avec un rayon égal à sa distance MF au foyer le moins éloigné, on décrit un arc de cercle; de l'autre foyer F', avec un rayon $2a = AA'$, on décrit un second arc qui coupe le premier en deux points C, C'; on mène FC, FC', et les perpendiculaires MT, MT', abaissées du point M sur les milieux de ces cordes, sont tangentes à l'hyperbole en des points T et T'.

On peut obtenir directement les points de contact T et T' en menant F'C, F'C', et en prolongeant ces droites jusqu'à leur rencontre avec l'hyperbole; car si par le point T, où F'C rencontre l'hyperbole, on voulait mener une tangente, on prendrait sur TF' une longueur égale à TF, ce qui déterminerait le point C, puisque T appartenant à l'hyperbole on a $TF' - TF = 2a = CF'$; on joindrait ensuite FC, et la perpendiculaire abaissée du point T sur le milieu de FC serait la

tangente (1229). Or cette perpendiculaire se confondant avec celle qui a été menée par M, cette dernière est donc bien tangente à l'hyperbole au point T. On démontrerait de même que MT' est tangente au point T'.

1233. De l'équation de l'hyperbole (1215), on tire, pour un point quelconque M,

Fig. 309.



$$\frac{y^2}{x^2-a^2}$$

ou $$\frac{y^2}{(x+a)(x-a)}=\frac{b^2}{a^2}, \qquad (1185)$$

ou, en remarquant que

$$x+a=\pm \mathrm{A'P} \text{ et } x-a=\pm \mathrm{AP},$$

$$\frac{y^2}{\mathrm{A'P}\times\mathrm{AP}}=\frac{b^2}{a^2}.$$

Ce qui montre que *le rapport du carré d'une ordonnée au produit des segments correspondants de l'axe transverse est égal au rapport du carré de l'axe non transverse au carré de l'axe transverse*, *et que par suite il est constant.*

Pour un autre point on aurait

$$\frac{y'^2}{\mathrm{A'P'}\times\mathrm{AP'}}=\frac{b^2}{a^2};$$

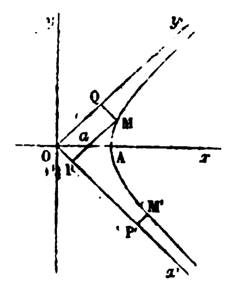
donc

$$\frac{y^2}{y'^2}=\frac{\mathrm{A'P}\times\mathrm{AP}}{\mathrm{A'P'}\times\mathrm{AP'}}.$$

Ainsi, *les carrés des ordonnées sont entre eux comme les produits des segments correspondants de l'axe transverse.*

1234. En prenant les asymptotes Ox' et Oy' de l'hyperbole pour axes coordonnées, l'équation de la courbe devient (1215, 1223)

Fig. 310.



$$x'y'=\frac{a^2+b^2}{4}.$$

Ce qui montre que le produit des coordonnées perpendiculaires ou obliques $MQ=x'$ et $MP=y'$ est constant, et il en résulte que le parallélogramme OPMQ compris entre les coordonnées d'un point quelconque et les asymptotes est aussi constant, car en désignant par θ l'angle que font entre elles les asymptotes, ce parallélogramme a pour base x', pour hauteur $y'\sin\theta$, et pour surface

$$S=x'y'\sin\theta=\frac{a^2+b^2}{4}\times\sin\theta.$$

Lorsque l'hyperbole est équilatère (1225), θ est droit, sin θ = 1, et l'on a, ce qui devait être, puisqu'alors OPMQ est un rectangle,

$$S = x'y' = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

1235. *Aire de l'hyperbole.* En faisant la quantité constante

$$x'y' = \frac{a^2 + b^2}{4} = m^2, \qquad (1234)$$

l'aire A de la *fig.* MM'P'P comprise entre l'arc MM', l'asymptote et les deux ordonnées MP = y', M'P' = y'' a pour expression

$$A = m^2 \sin \theta \times L. \frac{x''}{x'},$$

dans laquelle $x' = OP$, $x'' = OP'$, et L. signifie *logarithme népérien* (404, 405).

Lorsque l'hyperbole est équilatère (1225), on a $\sin \theta = 1$, et par suite

$$A = m^2 \times L. \frac{x''}{x'}.$$

Si l'on prend m pour unité, il vient

$$A = L. \frac{x''}{x'},$$

et dans le cas où le point M est au sommet A de l'hyperbole, comme alors on a $x' = 1$, ce qui résulte des deux égalités $x' = y'$ et $x'y' = m^2 = 1$, il vient

$$A = L. x''.$$

C'est cette propriété des logarithmes népériens, d'exprimer ainsi l'aire de l'hyperbole, qui leur a fait donner le nom de *logarithmes hyperboliques*.

1236. Selon que l'hyperbole fait une révolution autour de son axe non transverse ou de son axe transverse (1212), elle engendre l'*hyperboloïde de révolution à une ou à deux nappes*.

PARABOLE.

1237. La *parabole* est une courbe à une branche non fermée (*fig.* 311), dont tous les points sont également distants d'un point fixe ou *foyer* F, et d'une droite fixe ou *directrice* OD.

La parabole se définit donc encore, comme l'ellipse et l'hyperbole, par son équation en coordonnées focales (1170, 1211), équation qui est, en désignant par les variables ρ et ρ' les rayons vecteurs des différents points de la courbe,

$$\rho = \rho'.$$

1238. La perpendiculaire Fx menée par le foyer à la directrice est l'*axe* de la parabole.

Le point A, où l'axe rencontre la courbe, est le *sommet* de la parabole.

Le double de la distance constante FO du foyer à la directrice est le *paramètre* de la parabole ; on le représente par $2p$.

Fig. 311.

Le sommet appartenant à la courbe, il divise en deux parties égales la distance du foyer à la directrice ; on a $OA = AF = \frac{1}{2}p$.

1239. La *corde* BB′ *menée par le foyer, perpendiculairement à l'axe, est égale au paramètre* $2p$. En effet, chacune de ses parties FB, FB′ étant égale au demi-paramètre $OF = p$, on a bien $BB' = 2p$.

1240. *Équation de la parabole en prenant pour axes coordonnés l'axe* Ax *de la courbe et la parallèle* Ay *menée par le sommet* A *à la directrice* OD.

Le triangle rectangle MFP donne (704)

$$\rho^2 = \overline{MP}^2 + \overline{FP}^2 = y^2 + \left(x - \frac{1}{2}p\right)^2.$$

On a aussi

$$\rho^2 = \overline{OP}^2 = \left(x + \frac{1}{2}p\right)^2.$$

Égalant ces deux valeurs de ρ^2, on a, en développant (701, 702

$$y^2 + x^2 + \frac{1}{4}p^2 - px = x^2 + \frac{1}{4}p^2 + px.$$

Simplifiant, on tire, pour l'équation de la courbe,

$$y^2 = 2px;$$

d'où (525)

$$y = \pm\sqrt{2px}.$$

A une même valeur de x correspondant deux valeurs égales et de signes contraires pour y, la courbe est symétrique par rapport à l'axe des x.

Résolvant l'équation par rapport à x, on a

$$x = \frac{y^2}{2p}.$$

y^2 étant nécessairement positif (494), on voit que x est toujours positif, et que par suite la courbe est tout entière située d'un même côté de l'axe des y.

Suivant que x varie de 0 à ∞, y varie de 0 à $\pm\infty$; par conséquent la courbe est à une branche qui se prolonge indéfiniment du côté des y positifs et des y négatifs.

1241. *Les carrés des ordonnées de la parabole sont entre eux comme les abscisses correspondantes* (1185, 1233). En effet, l'équation de la parabole (1240) donne pour deux points

$$y^2 = 2px \quad \text{et} \quad y'^2 = 2px',$$

d'où
$$\frac{y^2}{y'^2}=\frac{x}{x'}.$$

1242. De l'équation $y^2=2px$, on conclut
$$\frac{y^2}{x}=2p.$$

Ce qui montre que *le rapport du carré de l'ordonnée à l'abscisse est constant et égal au paramètre* $2p$.

Pour $x=\frac{p}{2}$, on a $y^2=p^2$ ou $y=p$. *Ainsi l'ordonnée qui correspond au foyer est égale à la distance du foyer au sommet* (1239).

1243. *La parabole est le lieu géométrique des points situés à égale distance du foyer et de la directrice* (1181, 1217).

Fig. 312.

1° Le point M étant situé hors de la parabole, on a $MQ < MF$. En effet, prolongeant QM, et joignant CF, on a
$$CF - CM < MF\,;$$
ou, en remplaçant CF par son égal CQ,
$$CQ - CM \text{ ou } MQ < MF\,;$$

2° Le point M′ étant situé dans l'intérieur de la courbe, on a $M'Q > M'F$; car ayant
$$M'C + CF > M'F,$$
il vient, en remplaçant CF par son égal CQ,
$$M'C + CQ \text{ ou } M'Q > M'F.$$

Corollaire. Les réciproques des 1° et 2° sont vraies.

1244. *L'axe de la parabole divise la courbe en deux parties égales et symétriques.*

C étant un point quelconque de la courbe (*fig.* 312), menant la perpendiculaire CP à Ox, et prenant $PB=PC$, le point B, symétrique de C, appartient à la parabole. En effet, joignant BF, on a $CF=BF$ (584); comme de plus $CF=CQ$ et $CQ=BQ'$, on a $BF=BQ'$; ce qui ne peut être qu'autant que le point B appartient à la courbe (1243); donc les deux parties de courbe sont symétriques par rapport à l'axe, et par suite égales entre elles (831). C'est ce qui avait déjà été établi au n° 1240.

1245. La parabole n'ayant qu'une branche, qui se prolonge à l'infini, elle n'a pas de centre, ou plutôt on peut supposer que son centre est situé à l'infini sur son axe; d'où il résulte que tous les diamètres vont rencontrer l'axe à l'infini, c'est-à-dire lui sont parallèles.

1246. Comme pour l'ellipse et pour l'hyperbole (1188, 1220), tout diamètre BB', qui divise une corde CC' en deux parties égales, divise de la même manière toute corde, telle que EE', parallele à CC'.

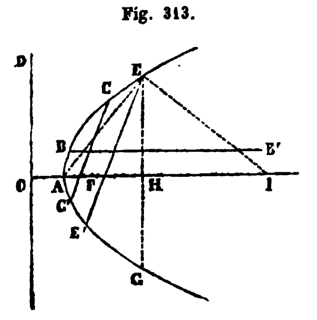


Fig. 313.

L'axe, qui est un diamètre, divise en deux parties égales les cordes, telles que EG, qui lui sont perpendiculaires (1244).

1247. De l'équation $y^2 = 2px$ (1240), il résulte que toute demi-corde EH perpendiculaire à l'axe est moyenne proportionnelle entre sa distance AH au sommet, et le paramètre $2p = 2OF =$ *la corde menée perpendiculairement à l'axe par le foyer* (1239). Ainsi l'on a

$$AH : EH = EH : 2p.$$

De là il résulte que *pour avoir le paramètre* $2p$, il suffit de mener une demi-corde EH perpendiculaire à l'axe, de joindre AE, d'élever EI perpendiculaire à AE, et l'on a $HI = 2p$. Le triangle rectangle AEI donne bien en effet (675)

$$AH : EH = EH : HI.$$

1248. *Étant donnée une parabole, mener son axe, trouver son foyer et tracer sa directrice.*

Menant deux cordes parallèles CC', EE' (*fig.* 313), la droite BB' qui joint leurs milieux est un diamètre parallèle à l'axe (1245). Le milieu H de la corde EG perpendiculaire à BB' appartient à l'axe, qu'on obtient en menant par H une parallèle à BB'. On détermine le paramètre $2p = HI$ par la construction du n° 1247, et portant sur l'axe, à droite et à gauche du sommet, le quart du paramètre, on obtient le foyer F, et le point O qui détermine la directrice OD.

1249. *Tracer une parabole par points.* F étant le foyer, Ox l'axe, OD la directrice, et par suite A, qui donne AO = AF, le sommet, élevant au point B, pris à droite du sommet A, une perpendiculaire CC' à l'axe, et du foyer comme centre, avec la distance OB pour rayon, décrivant un arc de cercle, il coupe CC' en deux points C et C' qui appartiennent à la parabole. En effet, d'après la construction, chacun de ces points est également distant de la directrice et du foyer, et appartient par conséquent à la parabole (1243).

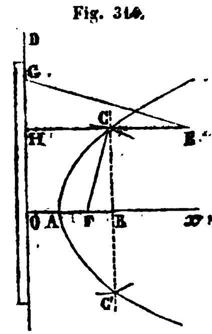


Fig. 314.

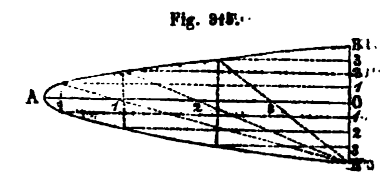
On conçoit que menant une série de perpendiculaires à Ax, on déterminera autant de points qu'on voudra de la parabole, et que raccordant tous ces points on obtiendra une courbe qu'on pourra prendre pour la parabole.

1250. *Tracé de la parabole par un mouvement continu* (fig. 314). EGH étant une équerre, et ECF un fil d'une longueur égale au côté EH et fixé par une extrémité au point E et par l'autre au foyer F, si l'on fait glisser l'équerre le long d'une règle dont l'arête coïncide avec la directrice OD, en tenant le fil ECF constamment tendu à l'aide d'une pointe ou d'un crayon C qu'on fait mouvoir le long de l'arête EH de l'équerre, cette pointe ou ce crayon décrira la partie supérieure de la parabole. Retournant l'équerre, on tracera de même la partie inférieure de la courbe.

Une position quelconque C du crayon appartient bien à la parabole; car ayant EC + CF = EH, on a CF = CH (1243).

1251. Pour les *tracés en grand*, comme, par exemple, quand il s'agit d'un balancier de machine à vapeur, auquel on donne la forme parabolique, qui est celle d'un solide d'égale résistance, ayant le sommet A de la parabole, AO son axe et B un de ses points (pour un balancier, la distance BO du point B à l'axe est la demi-hauteur du balancier au milieu de sa longueur), on a le paramètre

Fig. 315.



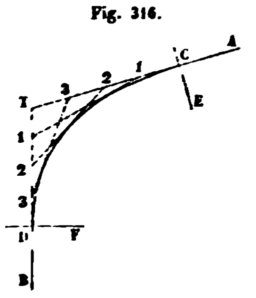
$$2p = \frac{\overline{OB}^2}{OA}. \qquad (1252)$$

Ayant le paramètre, on détermine le foyer et la directrice (1248); puis on peut tracer la parabole comme au n° 1249, ou en calculant, à l'aide de l'équation $y^2 = 2px$, les ordonnées correspondant à des abscisses convenablement choisies; mais on a le plus souvent recours au tracé géométrique indiqué *fig.* 315.

Du point B on abaisse sur l'axe une perpendiculaire qu'on prolonge d'une quantité OB' égale à elle-même; on divise BO et AO en un même nombre de parties égales, quatre par exemple; par les points de division de OB on mène des parallèles à l'axe; puis, joignant le point B' aux points de division 1, 2, 3 de AO, et prolongeant ces droites jusqu'à leur rencontre avec les parallèles respectives 1, 2, 3, les points de rencontre appartiennent à la parabole. Opérant pour la partie OB' comme pour celle OB, on obtient au-dessous de l'axe des points symétriques de ceux déterminés au-dessus. On pourrait aussi avoir ces points symétriques en menant des perpendiculaires à l'axe, et en les prolongeant jusqu'aux parallèles à l'axe menées par les points de division de OB'. Raccordant tous les points obtenus, on obtient une parabole.

Dans la pratique, pour les tracés en grand, et principalement pour raccorder sur le terrain deux alignements droits par un arc de parabole qui leur soit tangent, on a très-souvent recours au procédé suivant, qui est simple et donne une courbe suffisamment exacte.

Fig. 316.

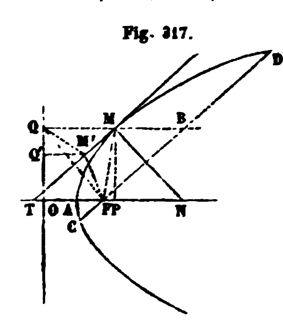


AT et BT étant les deux alignements à raccorder par une parabole qui leur soit tangente en C et D, on divise CT et DT en un même nombre de parties égales; on joint les points de division de même rang, et traçant une courbe qui soit tangente à AC au point C, à BD au point D, et aux droites 11, 22, 33, elle est la parabole demandée.

Ce même procédé permet de tracer un arc de parabole rencontrant normalement deux droites CE, DF en deux points donnés C et D.

1252. *Mener une tangente à la parabole par un point* M *pris sur la courbe* (1198, 1229).

Fig. 317.



On joint FQ, et la perpendiculaire MT, abaissée du point M sur FQ, est la tangente. Ainsi, un point quelconque M', pris sur MT, est hors de la courbe, c'est-à-dire donne M'Q' < M'F (1243).

En effet le triangle MFQ étant isocèle, MT est perpendiculaire sur le milieu de FQ, d'où il résulte qu'on a M'Q = M'F; mais on a M'Q > M'Q' (583), et par suite M'Q' < M'F.

Remarque 1re. De ce que le triangle MFQ est isocèle, il résulte que *la tangente* MT *divise l'angle* FMQ *des rayons vecteurs en deux parties égales.*

Remarque 2e. L'angle QMT = MTF, comme alternes internes; or QMT = TMF; donc TMF = MTF. Le triangle MTF étant isocèle, il en résulte que pour *mener une tangente en un point* M, il suffit simplement de prendre, à partir du foyer, FT = FM, et de joindre TM.

Ayant FT = FM = MQ = OP, et AO = AF, il en résulte qu'on a aussi AT = AP.

Remarque 3e. Prenant MB = MQ = MF = FT, la corde CD, qui passe par F et B est parallèle à la tangente MT; de plus, elle est divisée au point B en deux parties égales.

De là résulte le moyen de mener une corde divisée en deux parties égales par un diamètre donné (1246).

Menant par l'extrémité de ce diamètre une parallèle à la corde, elle sera tangente à la courbe; d'où résulte un *troisième moyen pour mener une tangente à la parabole.*

1253. *Mener une normale à la parabole.* La bissectrice MN de l'angle FMB, formé par un des rayons vecteurs et le prolongement de l'autre,

est la normale à la courbe au point M. On prouverait comme au n° 1199 que MN est en effet perpendiculaire à la tangente MT.

Ayant FT = OP (1252, *Remarque* 2°), on a FP = OT, et comme AF = AO, on a AP = AT = x, et TP = $2x$.

Cela établi, le point M appartenant à la parabole, on a (1240)

$$y^2 = 2px.$$

Le triangle rectangle TMN donne aussi (675), en représentant la sous-normale PN par s,

$$y^2 = s \times \mathrm{TP} = s \times 2x.$$

Égalant ces deux valeurs de y^2, il vient

$$2sx = 2px, \quad \text{d'où} \quad s = p.$$

Ainsi, pour la parabole, *la sous-normale est constante et égale au demi-paramètre* p = OF. Cela fournit un moyen facile de mener la normale, et par suite la tangente en un point quelconque M de la courbe.

1254. *Pour mener à la parabole une tangente parallèle à une droite quelconque* CD (*fig.* 317), on trace FQ perpendiculaire à CD par le foyer F, et la perpendiculaire TM élevée sur le milieu de FQ est la tangente demandée.

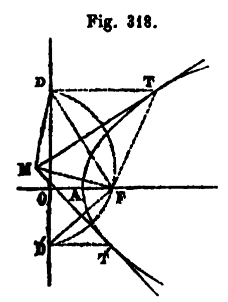
Pour avoir le point de contact, il suffit de mener QM parallèle à l'axe.

On voit que pour mener la tangente et déterminer son point de contact, il n'est pas nécessaire que la courbe soit tracée; il suffit d'avoir son axe, son foyer et sa directrice.

Le problème devient impossible quand CD est parallèle à l'axe, puisqu'alors la perpendiculaire FQ ne rencontre pas la directrice.

1255. *Mener une tangente à la parabole par un point extérieur* M.

Fig. 318.



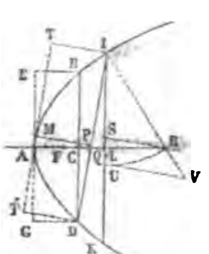
Du point M comme centre, avec la distance MF pour rayon, on décrit un arc de cercle qui coupe la directrice aux points D et D'; on mène FD, FD', et les perpendiculaires MT, MT' abaissées du point M sur ces droites sont tangentes à la parabole aux points T et T', qui sont donnés directement en menant par D et D' des parallèles à l'axe.

Si l'on voulait mener une tangente au point T, on abaisserait de ce point une perpendiculaire sur le milieu de FD (1252); or cette perpendiculaire se confondrait avec celle qui a été menée par le point M; car le triangle MDF étant isocèle, cette perpendiculaire passe aussi par le milieu de FD. On prouverait de même que MT' est tangente au point T'.

1256. Ainsi que pour l'ellipse et l'hyperbole, la géométrie élémentaire ne donne aucun moyen de déterminer exactement la longueur d'un arc de parabole; pour en mesurer la longueur approchée, on a recours aux moyens indiqués au 1er paragraphe du n° 1204.

1257. La *surface d'un segment parabolique* ABCD, compris entre le sommet A et la corde BD perpendiculaire à l'axe, est les 2/3 du rectangle EBDG qui a BD et AC pour base et pour hauteur; ainsi l'on a (690)

Fig. 319.



$$\text{surf. ABCD} = \frac{2}{3}\,\text{AC} \times \text{BD},$$

ou $$\text{surf. ABC} = \frac{2}{3}\,\text{AC} \times \text{BC}.$$

De là on a évidemment

$$\text{surf. ABE} = \frac{1}{2}\,\text{surf. ACBE} = \frac{1}{3}\,\text{AC} \times \text{BC}.$$

Remarquant que le segment BIKD, compris entre les deux cordes BD, IK perpendiculaires à l'axe, est la différence des deux segments AILK et ABCD, sa mesure est la différence des mesures de ces deux derniers; et l'on a

$$\text{surf. BIKD} = \frac{2}{3}\,\text{AL} \times \text{IK} - \frac{2}{3}\,\text{AC} \times \text{BD} = \frac{2}{3}\,(\text{AL} \times \text{IK} - \text{AC} \times \text{BD}).$$

M étant le point de contact de la tangente MT parallèle à ID (1252, rem. 3), la surface du segment AIQD est les 2/3 de la surface du rectangle IDT'T, qui a même base ID et même hauteur MP que le segment; ainsi l'on a

$$\text{surf. AIQD} = \frac{2}{3}\,\text{MP} \times \text{ID}.$$

Le segment à base perpendiculaire à l'axe n'est qu'un cas particulier de ce cas général.

1258. Le volume engendré par la révolution d'une parabole autour de son axe prend le nom de *paraboloïde*.

1259. *Mesure de la surface courbe d'une calotte de paraboloïde engendrée par la révolution de l'arc* AI *autour de l'axe* (*fig.* 319).

On prend LR = 2AF et IS = 3AF; on joint SR; puis on prend IU = IR, et l'on mène UV parallèle à SR; d'où il résulte qu'on a

$$\text{IS} : \text{IR} = \text{IU} \quad \text{ou} \quad \text{IR} : \text{IV}.$$

La surface s de la calotte parabolique est égale à la surface latérale d'un cylindre droit ayant IR pour diamètre et IV pour hauteur, moins les 8/3 de la surface d'un cercle ayant AF pour rayon; ainsi l'on a (728, 922)

$$s = \pi \times \text{IR} \times \text{IV} - \frac{8}{3}\,\pi\overline{\text{AF}}^2.$$

Représentant l'ordonnée IL par y, comme on a LR = 2AF = p (1247) et IS = 3AF = $\frac{3}{2}\,p$, le triangle rectangle ILR donne

$$IR = \sqrt{y^2 + p^2};$$

de la proportion ci-dessus on conclut

$$IV = \frac{\overline{IR}^2}{IS} = \frac{y^2 + p^2}{\frac{3}{2}p} = \frac{2(y^2 + p^2)}{3p};$$

comme de plus on a $\overline{AF}^2 = \frac{p^2}{4}$,

reportant ces expressions dans la valeur de s, il vient

$$s = \pi\sqrt{y^2 + p^2} \times \frac{2(y^2 + p^2)}{3p} - \frac{2}{3}\pi p^2;$$

expression qui permet de calculer s connaissant y et p, c'est-à-dire sans faire la construction géométrique précédente.

Comme on a, en représentant AL par x, $y^2 = 2px$ (1240), on peut donc aussi exprimer s en fonction de x; ce qui donne

$$s = \pi\sqrt{2px + p^2} \times \frac{4x + 2p}{3} - \frac{2}{3}\pi p^2.$$

1260. *Le volume de la calotte parabolique engendrée par le demi-segment parabolique* AIL, *dont la base* IL *est perpendiculaire à l'axe* (*fig.* 319), est égal à celui d'un cylindre droit ayant AL pour rayon et 2AF pour hauteur; de sorte qu'en le représentant par v, on a (924)

$$v = \pi \times \overline{AL}^2 \times 2AF.$$

Faisant AL $= x$ et 2AF $= p$ (1238), il vient

$$v = \pi x^2 \times p.$$

Remplaçant x^2 par $\frac{y^4}{4p^2}$ (1240), on a aussi

$$v = \pi\frac{y^4}{4p}.$$

COURBES DU SECOND DEGRÉ OU SECTIONS CONIQUES.

1261. La parabole peut être considérée comme étant la limite vers laquelle tend une ellipse dont le grand axe croît indéfiniment, tandis que la distance de l'un des foyers au sommet le plus voisin reste constante.

On peut également considérer la parabole comme étant la limite d'une hyperbole.

En transportant l'origine au sommet de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole, ces trois courbes sont représentées par l'équation générale

$$y^2 = 2px + qx^2,$$

dans laquelle

$$p = \frac{b^2}{a} \quad \text{et} \quad q = \frac{p}{a} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Selon qu'on a $q < 0$, $q > 0$ et $q = 0$, l'équation devient :

1° $y^2 = 2\frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2$ ellipse;

2° $y^2 = 2\frac{b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2$ hyperbole;

3° $y^2 = 2\frac{b^2}{a}x$ parabole.

En transportant l'origine au sommet de *gauche* de l'ellipse, et par suite en changeant x en $x - a$ dans l'équation générale du n° 1174, on obtient en effet l'équation 1°. De même, en transportant l'origine au sommet de *droite* de l'hyperbole, ce qui revient à changer x en $x + a$, l'équation générale du n° 1215 fournit celle 2°.

1262. Les équations de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole étant du second degré (1174, 1215, 1240), et toute équation du second degré entre deux variables représentant l'une de ces courbes, c'est pourquoi ces *courbes* sont dites de *second degré*.

1263. Tout plan sécant qui ne passe pas par le sommet d'un cône de révolution (835) coupe sa surface latérale suivant une courbe du second degré.

La section est une ellipse si le plan sécant coupe toutes les génératrices, ce qui ne peut avoir lieu que du même côté du sommet, c'est-à-dire sur une même *nappe* du cône. Si le plan est perpendiculaire à l'axe du cône, l'ellipse devient une circonférence (837).

La section est une hyperbole quand le plan sécant est parallèle à deux génératrices; l'une des branches de l'hyperbole est sur une nappe du cône et l'autre branche sur l'autre nappe.

Lorsque le plan sécant est parallèle à une seule génératrice, il ne coupe qu'une nappe, et il détermine une parabole.

Tout plan qui coupe les génératrices d'un cylindre de révolution détermine une ellipse; ce qui devait être, le cylindre pouvant être considéré comme étant un cône dont le sommet est à l'infini. Comme le plan qui pourrait déterminer la parabole ou l'hyperbole est parallèle à une ou à deux génératrices, et par suite à l'axe, il ne peut couper la surface latérale du cylindre que suivant des génératrices (836), et non suivant ces courbes.

Une ellipse ou une parabole quelconque peut toujours s'appliquer sur la surface latérale d'un cône de révolution donné. Il en est de même pour l'hyperbole quand l'angle des asymptotes, celui qui contient la courbe, est moindre que l'angle formé par les génératrices opposées du cône.

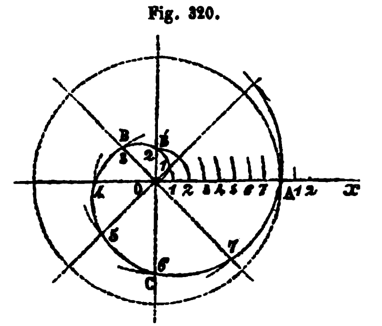
La propriété des courbes du second degré d'être déterminées par

des plans sécants du cône leur a fait donner le nom de *sections coniques*.

SPIRALE D'ARCHIMÈDE.

1264. La *spirale d'Archimède* est une courbe plane ouverte que décrit un point qui se meut autour d'un autre O qui est fixe, en s'en éloignant de quantités proportionnelles aux angles qu'il décrit autour de ce dernier.

Fig. 320.



Ainsi la spirale se définit par son équation en coordonnées polaires (1142); équation qui est, en désignant par α et ρ ces coordonnées,

$$\rho = a\alpha + b.$$

ρ distance variable du point générateur au pôle O;
α angle variable que fait le rayon vecteur avec l'axe Ox;
a coefficient constant exprimant l'augmentation de ρ par chaque augmentation d'une unité, d'un degré par exemple, de α;
b quantité constante qui exprime la valeur de ρ quand $\alpha = 0$; ainsi b est la distance au pôle O, du point de l'axe Ox, duquel part le point générateur. Dans la figure, le point générateur partant du pôle, on a $b = 0$, et l'équation de la courbe est

$$\rho = a\alpha.$$

Il est à remarquer que de même que le point générateur s'éloigne du pôle O de quantités égales pour des angles égaux quand il tourne dans un sens, il s'en approche de quantités égales pour les mêmes angles quand il revient dans l'autre sens.

1265. Chacun des arcs de courbe décrits pendant une révolution complète du point générateur autour du pôle prend le nom de *spire*.

1266. La distance de deux spires consécutives quelconques, mesurée suivant le rayon vecteur ρ, est une quantité constante qu'on peut appeler le *pas*. C'est la quantité dont le point générateur s'éloigne ou s'approche du pôle pour chaque spire. Ainsi pour $\alpha = 360°$, a correspondant à 1°, si l'on représente le pas par p, on a

$$p = a \times 360, \quad \text{ou} \quad a = \frac{p}{360}.$$

1267. *Tracer une spirale d'Archimède* (*fig.* 320). Ox étant l'axe, O le pôle, supposant $b = 0$, c'est-à-dire que le point générateur part de O, on porte le pas donné p de O en A; on divise OA en un certain nombre de parties égales, 8 par exemple; du point O comme centre, avec le

pas OA pour rayon, on décrit une circonférence, qu'on divise en un même nombre 8 de parties égales. Menant alors les rayons par ces points de division, et prenant sur le rayon 1, la partie O1 du pas; sur le rayon 2, la partie O2; sur le rayon 3, la partie O3, et ainsi de suite, tous les points déterminés sur les rayons appartiennent à la spirale. En effet, l'un quelconque B de ces points donne bien

$$OB : OA = BOA : 360°, \text{ d'où } OB = \frac{OA}{360} \times BOA, \text{ ou } \rho = \frac{p}{360} \times \alpha = a\alpha. \quad (1264)$$

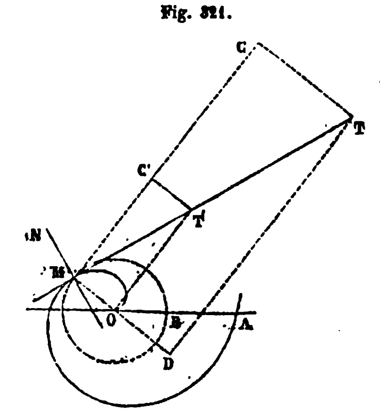
Pouvant diviser OA et la circonférence de rayon OA en autant de parties égales que l'on veut, on peut donc déterminer autant de points qu'on le désire de la spirale, et raccordant ces points on obtient une courbe qu'on peut prendre pour la spirale.

Pour tracer une seconde spire, on portera le pas sur le prolongement de OA; on le divisera de la même manière que OA, et prenant sur les rayons O1, O2, etc., prolongés suffisamment, des distances égales aux distances du pôle O aux points de division 1, 2, 3, etc. de ce même pas, on obtiendra des points de la seconde spire, qu'on tracera alors comme la première.

Si la courbe partait d'un point de Ox autre que le point O, on tracerait la première spire et les suivantes en opérant comme pour la seconde spire dans le cas précédent.

1268. *Mener une tangente à la spirale par un point M pris sur la courbe.*

Fig. 321.



Le tracé suivant est fondé sur ce principe général : *Quelle que soit la courbe engendrée par un point animé de deux mouvements, la tangente en un point de cette courbe est toujours la diagonale du parallélogramme formé sur les directions des deux mouvements au point considéré, avec des côtés égaux aux deux espaces parcourus ou qui pourraient être parcourus dans le même temps en vertu de la génération.*

Pour la spirale d'Archimède, le mouvement du point générateur se compose, à une position quelconque M, de deux mouvements : l'un rectiligne, qui a lieu suivant le rayon vecteur OM, et l'autre circulaire, qui a lieu suivant la circonférence du rayon OM, c'est-à-dire suivant la perpendiculaire MC au rayon OM. Portant alors sur MO, à partir du point M, une longueur MD égale au pas p de la spirale, et sur la perpendiculaire MC une longueur MC égale à la circonférence $2\pi \times OM$ qui a OM pour rayon; terminant le parallélogramme MDTC, qui dans ce cas est un rectangle, et a p et

$2\pi \times OM$ pour côtés, la diagonale MT de ce parallélogramme est la tangente au point M.

Prenant sur MC une longueur MC′ égale à l'arc MB décrit avec OM pour rayon, en terminant le parallélogramme rectangle MOT′C′, la diagonale MT′ est aussi la tangente, c'est-à-dire que MT′ se confond avec MT; d'où résulte la proportion

$$OM : MC' = MD : MC, \quad \text{ou} \quad OM : \text{arc}\, MB = p : 2\pi \times OM.$$

1269. *Pour mener une normale à la spirale au point* M (*fig.* 321), on trace la tangente MT, et la perpendiculaire MN menée au point M à cette tangente est la normale demandée.

1270. *La surface d'un segment de spirale* OBB′O, *compris entre le rayon vecteur* OB *et l'arc* BB′O *qu'il sous-tend* (*fig.* 320), *a pour mesure le tiers du produit de la superficie du cercle qui a le rayon vecteur* $OB = \rho$ *pour rayon, par le rapport de ce rayon au pas* $OA = p$. Ainsi, s étant la surface, on a (728)

$$s = \frac{1}{3}\pi \times \overline{OB}^2 \times \frac{OB}{OA} = \frac{1}{3}\pi\rho^2 \times \frac{\rho}{p} = \frac{\pi\rho^3}{3p}. \qquad (a)$$

De là il résulte que l'espace spiral OACBB′O, renfermé dans la première spire, est le tiers de la surface du cercle qui a le pas $OA = p$ pour rayon. Faisant $\rho = p$ dans la valeur précédente de s, il vient bien

$$s = \frac{1}{3}\pi p^2.$$

La surface des deux premières spires est les 8/3 *du cercle qui a le pas* p *pour rayon.* En effet, si l'on fait $\rho = 2p$ dans l'expression générale (a), on a

$$s = \frac{8\pi p^3}{3p} = \frac{8}{3}\pi p^2.$$

Retranchant la surface de la première spire de la surface des deux premières spires, on a pour la surface de la seconde spire

$$\frac{8}{3}\pi p^2 - \frac{1}{3}\pi p^2 = \frac{7}{3}\pi p^2.$$

Enfin pour obtenir la surface spirale S comprise entre deux rayons vecteurs $OB = \rho$ et $OB' = \rho'$, il suffit de prendre la différence des surfaces des segments qui se terminent à ces rayons vecteurs, ce qui donne

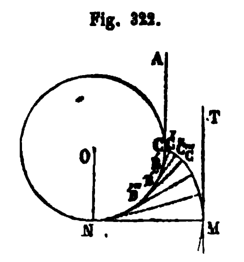
$$S = \frac{\pi\rho^3}{3p} - \frac{\pi\rho'^3}{3p} = \frac{\pi}{3p}(\rho^3 - \rho'^3).$$



DÉVELOPPANTE. DÉVELOPPÉE. RAYON DE COURBURE.

1271. La *développante* d'une courbe quelconque est la courbe CC'C''C'''... engendrée par un point C qui reste fixe sur une tangente CA, dont le point de contact C change continuellement, mais de manière que la distance du point fixe au point de contact soit constamment égale à l'espace parcouru par le point de contact sur la courbe : ainsi B'C', B''C''... étant des positions de la tangente, on a B'C' = B'C, B''C'' = B''C...

Fig. 322.



1272. La courbe CB'B''..., sur laquelle roule la tangente, est la *développée* de CC'C''...

1273. Le point C, où la développée rencontre sa développante, est l'*origine*.

1274. *Construire par points la développante de la circonférence* (*fig.* 322). C étant l'origine, si en différents points B', B''... on mène des tangentes au cercle, et que sur ces tangentes on prenne respectivement B'C' = arc B'C, B''C'' = arc B''C..., les différents point C, C', C''... qu'on obtiendra appartiendront à la développante. On conçoit alors qu'on pourra ainsi obtenir autant de points aussi rapprochés que l'on voudra, et qu'en raccordant tous ces points, la courbe obtenue sera à très-peu près la développante.

1275. *Tracé de la développante à l'aide du rayon de courbure.* Lorsque les points C, B', B''... sont très-rapprochés (*fig.* 322), on peut considérer les petits arcs CB', B'B''... comme des droites, et l'on a B'C' = B'C. D'où il résulte que CC' peut être considéré comme étant un arc de cercle ayant B' pour centre et B'C pour rayon ; on peut, par la même raison, supposer que B''C'' = B''C' = B''B' + B'C, et par suite que C'C'' est un arc de cercle ayant B'' pour centre et B''C' = B''C pour rayon, et ainsi de suite. De sorte qu'on peut considérer la développante comme formée d'une série d'arcs de cercle dont les centres et les rayons sont déterminés, et qu'il est par conséquent facile de tracer.

On conçoit que ce tracé ne peut être parfaitement rigoureux qu'autant que le rayon, appelé *rayon de courbure* (c'est le rayon de la circonférence qui a deux éléments consécutifs infiniment petits communs avec la courbe au point que l'on considère), varie en chaque point de la courbe. Dans la pratique, quoiqu'il soit impossible, avec les instruments ordinaires à dessiner, de faire varier d'une manière continue le rayon de courbure, on a cependant fréquemment recours à ce mode de tracé.

On rapproche de l'exactitude le tracé d'une courbe à l'aide du rayon de courbure, en prenant la première distance CB' moitié des suivantes B'B'', B''B'''..., et en prolongeant l'arc décrit de B' comme centre avec B'C pour rayon jusqu'au milieu de C'C'' en un point *c'* ; l'arc décrit de B'' comme centre s'étendrait alors de *c'* jusqu'en *c''* situé au milieu

de C″C‴, et ainsi de suite. De cette manière, la portion décrite avec le même rayon de courbure s'étend également de chaque côté de la position qui correspond à la valeur de ce rayon.

Prenant B′B″ = B″B‴ = ..., les rayons de courbure font des angles égaux lorsque la développée est une circonférence; c'est cette égalité d'angles qu'il convient ordinairement de réaliser, sauf à n'avoir pas B′B″ = B″B‴ = ... quand la développée n'est pas une circonférence.

1276. *Tracer une développante d'un mouvement continu.* Supposant un fil enroulé sur la courbe CB‴ (*fig.* 322), et une pointe ou un crayon fixé à l'extrémité C de ce fil, si l'on déroule ce fil en le tenant toujours tendu à l'aide de la pointe ou crayon C, cette pointe ou ce crayon décrira la développante de la courbe qui passe par l'axe du fil, qui est à peu près la courbe développée quand le fil est très-mince.

1277. *Mener une normale, puis une tangente, à la développante.* Menant par le point quelconque N une tangente à la développée, elle est normale à la développante. Menant alors par le point M, où la normale rencontre la développante, une perpendiculaire MT à cette normale, elle est tangente à la développante.

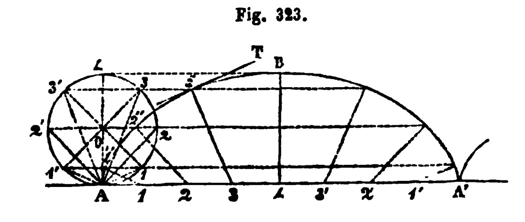
Il est à remarquer que toute tangente à la développée est normale à la développante, et réciproquement. De plus, la tangente MT à la développante et la normale NO à la développée, menées aux extrémités de chaque rayon de courbure, sont parallèles.

1278. *Étant donnée une courbe* CM (*fig.* 322), *tracer sa développée.* On prend une série de points C, C′, C″... sur CM, et les normales à CM menées par ces points étant tangentes à la développée (1277), inscrivant une courbe au polygone CB′B″..., dont les sommets sont les points de rencontre des normales consécutives, cette courbe pourra être prise pour la développée de CM.

CYCLOÏDE.

1279. Si au lieu que ce soit la droite qui en quelque sorte roule autour du cercle comme dans la génération de la développante de la circonférence (1271), c'est le cercle qui roule sur la droite AA′, chaque point de la circonférence de ce cercle décrit, entre deux de ses contacts consécutifs avec la droite, une courbe appelée *cycloïde.* La *fig.* 323 représente la cycloïde ABA′ décrite par le point A pour un tour du cercle sur AA′.

Fig. 323.



1280. La droite AA′, comprise entre deux contacts consécutifs A, A′ d'un même point A, est la *base* de la cycloïde ABA′ décrite par le point A.

Cette base est égale à la circonférence du cercle générateur; de sorte que d étant le diamètre de cette circonférence, on a $AA' = \pi d$.

La perpendiculaire B4, sur le milieu de la base, est l'*axe* de la cycloïde; elle est égale au diamètre d; par conséquent on a (726, 727)

$$\frac{AA'}{B4} = \frac{\pi d}{d} = \pi = 3{,}1416 = \frac{22}{7} \text{ environ};$$

d'où $$AA' = 3{,}1416 \times d = \frac{22}{7}\, d, \quad \text{et} \quad d = \frac{AA'}{3{,}1416} = \frac{7}{22}\, AA'.$$

1281. *Décrire par points la cycloïde engendrée par le point* A *de la circonférence d'un cercle de diamètre* d (*fig.* 323).

On trace une droite AA' égale à la base $3{,}1416 \times d$ de la cycloïde; on décrit le cercle O, de diamètre d, tangent à AA' au point A; on divise la base AA' et la circonférence génératrice en un même nombre de parties égales, huit par exemple, qu'on numérote comme l'indique la figure. Par les points de division de la circonférence O on trace des parallèles à la base AA', et par les points de division 1, 2, 3... de AA', menant des parallèles aux droites A1', A2'..., qui joignent le point A aux différents points de division de la circonférence O, ces parallèles rencontrent respectivement les parallèles à la base AA' en des points 1'', 2''... qui appartiennent à la cycloïde. En effet, considérant l'un quelconque 1'' de ces points, lorsque le point de contact sera en 1, le diamètre 13' sera vertical, et le point générateur A occupera, par rapport à ce diamètre, la même position que le point 1' par rapport à A4 dans la figure; or comme cette position est bien 1'', ce point appartient donc à la cycloïde. On démontrerait de même que les points 2'', 3''... appartiennent à la cycloïde. Comme l'on peut diviser AA' en un nombre quelconque de parties égales, on peut donc déterminer autant de points qu'on le désire de la cycloïde, et si l'on raccorde tous ces points, la courbe qu'on obtiendra pourra être considérée comme étant sensiblement la cycloïde.

Si, au lieu de donner le diamètre d du cercle générateur, on donnait la base AA' de la cycloïde, on déterminerait

$$d = \frac{AA'}{3{,}1416} = \frac{7}{22}\, AA' \text{ environ},$$

et l'on opérerait comme dans le cas précédent.

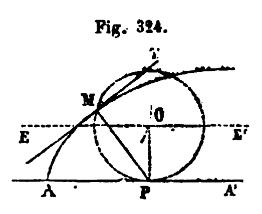
1282. *Tracé de la cycloïde par un mouvement continu.* On conçoit que le cercle O étant un plateau circulaire, dans la circonférence duquel est fixé une pointe ou un crayon A (*fig.* 323), si l'on fait tourner sans glisser ce plateau le long d'une règle dont l'arête coïncide avec AA', la pointe ou le crayon A décrira la cycloïde ABA' d'un mouvement continu.

1283. *Mener une normale, puis une tangente à la cycloïde.* Lorsque le point générateur A de la cycloïde occupe une position quelconque 3'' (*fig.* 323), le point de contact étant 3, on peut considérer l'élément 3'' de la courbe comme se confondant avec un élément d'arc de cercle dont

le point 3 est le centre et 33″ le rayon; par conséquent 33″, qui est normal à l'arc de cercle, est aussi normal à la courbe. La perpendiculaire 3″T menée à 33″ est tangente à la cycloïde.

De ce qui vient d'être dit, il résulte que pour mener une normale et par suite une tangente en un point M d'une cycloïde ou d'un arc de cycloïde, il suffit de déterminer le point de contact du cercle générateur et de la base correspondant au point M. Or menant une parallèle EE′ à la base AA′ de la cycloïde, à une distance de cette base égale à la moitié du diamètre d du cercle générateur, elle contiendra toutes les positions qu'occupe le centre de ce cercle dans son mouvement. Lorsque le point générateur A est en M, le centre du cercle se trouve à une distance de M égale à $\frac{1}{2}d$; par conséquent, décrivant du point M comme centre, avec $\frac{1}{2}d$ pour rayon, un arc de cercle, il coupe la parallèle EE′ en un point O qui est le centre cherché, et abaissant la perpendiculaire OP, le point P est celui de contact. Alors, qu'on décrive ou non le cercle générateur, la droite MP est la normale à la cycloïde au point M, et la perpendiculaire MT est la tangente.

Fig. 324.



1284. En menant les normales aux différents points de la cycloïde, on décrirait la développée de cette courbe (1278).

Le rayon de courbure en un point quelconque M *de la cycloïde* (*fig.* 324) *est double de la portion* MP *de la normale, comprise entre la courbe et sa base;* d'où il résulte qu'on peut tracer la développée par points.

La développée de la demi-cycloïde AB (*fig.* 323) *est une demi-cycloïde égale à* AB; d'où il résulte que la demi-cycloïde AB est aussi égale à sa développante (1271, 1272).

1285. *La longueur de la cycloïde* est égale à quatre fois son axe ou diamètre d du cercle générateur (1280). Ainsi l étant cette longueur, on a

$$l = 4d.$$

1286. *La surface* S *comprise entre la cycloïde et sa base est le triple du cercle générateur.* Ainsi d étant le diamètre de ce cercle, on a (728)

$$S = \frac{3}{4}\pi d^2.$$

ÉPICYCLOÏDE.

1287. Si le cercle générateur O, au lieu de tourner sur une droite, comme au n° 1279, tourne sur un cercle C (*fig.* 325), l'un quelconque A de ses points décrit, entre ses deux contacts consécutifs A, A′, une courbe ABA′ appelée *épicycloïde*.

Lorsque le cercle O tourne à l'intérieur du cercle C, chacun de ses points décrit encore une épicycloïde; mais qui est interne, et à laquelle il est facile d'appliquer tout ce qui suit sur l'épicycloïde externe.

1288. L'arc AA', du cercle C, compris entre les deux contacts A et A', est la *base* de l'épicycloïde (*fig.* 325). Cette base est égale à la circonférence πd du cercle générateur O.

La droite CB, menée par le centre C et le milieu de la base, est l'*axe* de l'épicycloïde, et l'on a $B4 = d$. Ainsi, comme pour la cycloïde (1280), on a

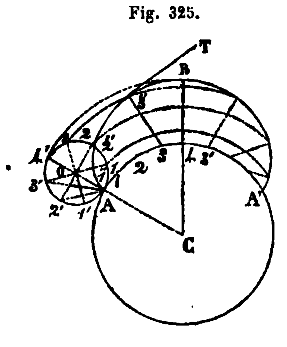
$$\frac{AA'}{B4} = \frac{\pi d}{d} = \pi = 3{,}1416 = \frac{22}{7} \text{ environ;}$$

d'où $\quad AA' = 3{,}1416 \times d = \frac{22}{7} d, \quad$ et $\quad d = \frac{AA'}{3{,}1416} = \frac{7}{22} AA'.$

Le point B, où l'axe rencontre la courbe, est le *sommet*.

1289. *Tracer une épicycloïde par points.* Ce tracé est analogue à celui de la cycloïde (1281). Ainsi, prenant la base $AA' = 3{,}1416 \times d$, et décrivant le cercle O, de diamètre d, tangent en A au cercle C, on divise la base AA' et la circonférence O en un même nombre de parties égales, 8 par exemple, numérotées comme l'indique la *fig.* 325. Du point C comme centre, avec les distances de C aux points de division de la circonférence O pour rayons, on décrit des arcs de cercle concentriques à AA', et des points de division 1, 2, 3... de AA', comme centres, avec des rayons respectivement égaux aux distances du point A aux points de division 1', 2', 3'... de la circonférence O, décrivant des arcs de cercle, ils coupent les arcs concentriques à AA' en des points appartenant à l'épicycloïde. Des considérations analogues à celles du n° 1281 feraient voir qu'en effet un point quelconque 3'' appartient à l'épicycloïde, et que l'on peut déterminer autant de points que l'on veut de cette courbe, et par suite la tracer.

Fig. 325.



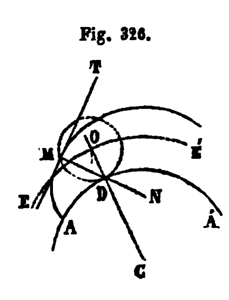
Remarque. Si, au lieu de donner le diamètre d, on donnait la base AA', on déterminerait $d = \frac{AA'}{3{,}1416} = \frac{7}{22} AA'$, et l'on opérerait ensuite comme dans le cas précédent.

1290. *Tracé de l'épicycloïde d'un mouvement continu.* C et O étant des plateaux circulaires, et A une pointe ou un crayon fixé dans la circonférence O, on conçoit que faisant tourner sans glisser le plateau O sur le plateau C, la pointe ou le crayon A décrira l'épicycloïde ABA' d'un mouvement continu.

1291. *Mener une normale, puis une tangente à l'épicycloïde* (*fig.* 325). Des considérations identiques à celles du n° 1283 font voir que la droite

33″, qui joint le point quelconque 3″ de la courbe au point de contact correspondant 3 du cercle générateur, est normale en 3″. La perpendiculaire 3″T à cette normale est tangente à l'épicycloïde.

Fig. 326.



De là il résulte encore que pour mener une normale, et par suite une tangente en un point M d'une épicycloïde ou d'un arc d'épicycloïde, il suffit de déterminer le point de contact correspondant au point M. Or décrivant un arc de cercle EE′ concentrique avec la base AA′ de l'épicycloïde, et éloigné de cette base de la moitié du diamètre d du cercle générateur O, EE′ contient toutes les positions qu'occupe le centre de ce cercle dans son mouvement. Lorsque le point générateur A est en M, le centre du cercle se trouve à une distance de M égale à $\frac{1}{2}d$; par conséquent décrivant de M comme centre, avec $\frac{1}{2}d$ pour rayon, un arc de cercle, il coupe EE′ au point O, qui est le centre cherché, et joignant les centres O et C, on obtient le point de contact D. Alors, que l'on décrive ou non le cercle O, MD est la normale demandée, et sa perpendiculaire MT est la tangente.

1292. *Longueur de l'épicycloïde.* La longueur $\frac{l}{2}$ de la demi-épicycloïde AB (*fig.* 325), est une quatrième proportionnelle aux trois longueurs CA, CA + AO et 2A4′; ainsi l'on a, en faisant $CA = r$ et $A4' = d$,

$$r : \left(r + \frac{d}{2}\right) = 2d : \frac{l}{2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{l}{2} = \frac{2rd + d^2}{r}.$$

Si l'épicycloïde était interne, pour avoir sa demi-longueur, il suffirait de changer $+\frac{d}{2}$ en $-\frac{d}{2}$ dans la proportion précédente; ainsi l'on aurait

$$r : \left(r - \frac{d}{2}\right) = 2d : \frac{l}{2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{l}{2} = \frac{2rd - d^2}{r}.$$

Pour $d = r$, il vient $\frac{l}{2} = r$. C'est qu'en effet, dans ce cas, chaque point de la circonférence O se meut suivant un diamètre du cercle C, c'est-à-dire qu'alors l'épicycloïde est un diamètre du cercle C.

Remarque. Lorsque le rayon r est infini, c'est-à-dire quand la circonférence C devient une ligne droite, le premier rapport des proportions précédentes est égal à 1, et par suite aussi le second, et l'on a $\frac{l}{2} = 2d$ ou $l = 4d$; c'est qu'en effet l'épicycloïde devient une cycloïde (1285).

1293. *La surface totale* S *comprise entre une épicycloïde* ABA′ *et sa base* AA′ (*fig.* 325), est une quatrième proportionnelle aux trois quan-

tités : le rayon $CA = r$, $3CA + 2AO$ ou $3r + d$, et la surface $\frac{\pi d^2}{4}$ du cercle générateur (728); ainsi l'on a

$$r : (3r + d) = \frac{\pi d^2}{4} : S, \quad \text{d'où} \quad S = \frac{3\pi r d^2 + \pi d^3}{4r}.$$

Lorsque l'épicycloïde est interne, on a

$$r : (3r - d) = \frac{\pi d^2}{4} : S, \quad \text{d'où} \quad S = \frac{3\pi r d^2 - \pi d^3}{4r}.$$

Pour $d = r$, il vient $S = \frac{1}{2}\pi r^2$; c'est qu'en effet, dans ce cas, l'aire de l'épicycloïde est bien la moitié du cercle C (1292).

Remarque. Comme au numéro précédent, lorsque r est infini, divisant les conséquents par 3, le premier rapport des proportions précédentes devient égal à 1, et l'on a

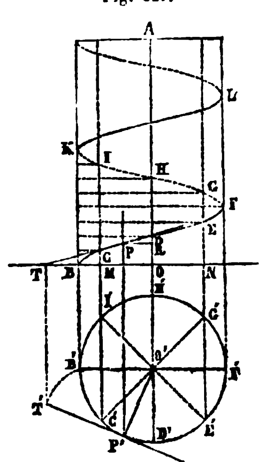
$$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{S}{3}, \quad \text{d'où} \quad S = \frac{3}{4}\pi d^2.$$

C'est qu'en effet l'épicycloïde est alors une cycloïde (1286).

HÉLICE.

1294. L'*hélice* est une courbe engendrée par un point qui se meut sur la surface latérale d'un cylindre, en avançant parallèlement à l'axe de quantités égales pour des arcs égaux qu'il décrit autour de cet axe.

Fig. 327.



Le *pas* de l'hélice est la quantité BK dont le point générateur avance parallèlement à l'axe AO pour une révolution complète autour du cylindre.

On appelle *spire*, la portion BFK de la courbe, qui correspond à une révolution entière du point générateur.

1295. De la définition du n° 1294, il résulte que la courbe BCDE... étant une hélice tracée sur le cylindre droit représenté en plan par le cercle O', et en élévation par le rectangle dont OA est l'axe, C et E étant deux points quelconques de l'hélice, on a

$$CM : EN = \text{arc } B'C' : \text{arc } B'E'.$$

B'C' étant l'unité d'arc, représentant par a la quantité constante CM qui lui correspond, on a, en désignant par x l'arc variable B'E' et par y

la valeur correspondante EN,

$$a : y = 1 : x, \quad \text{d'où} \quad y = ax.$$

Équation qui est celle d'une ligne droite (1160), et qui indique que si l'on développe la surface du cylindre, chaque spire de l'hélice se développera suivant une droite qui aura pour équation $y = ax$, dans laquelle, à une ordonnée quelconque $y = \text{CM}$, ou DO, ou EN, etc., correspond l'abscisse $x =$ *développement de* B'C', *ou de* B'D', *ou de* B'E', etc.

De là il résulte que les diverses spires se développeront suivant des droites égales et parallèles.

1296. *Tracé de l'hélice* (*fig.* 327). BK étant le pas de l'hélice, on le divise ainsi que la circonférence de la base du cylindre en un même nombre de parties égales, 8 par exemple. Menant alors les génératrices KB, IM, HO... qui passent par les points de division B', C', D'... de la circonférence de la base du cylindre, et prenant sur ces génératrices successives, à partir de la base, des longueurs 0, $\frac{1}{8}$ BK, $\frac{2}{8}$ BK, $\frac{3}{8}$ BK, etc., les points B, C, D, etc., qu'on obtiendra appartiendront à l'hélice. On conçoit que pouvant diviser la circonférence de la base du cylindre en autant de parties égales que l'on veut, on peut obtenir autant de points que l'on désire de l'hélice, et que la courbe qui raccordera ces points sur le cylindre pourra être prise pour l'hélice.

Lorsque, au lieu de tracer l'hélice sur le cylindre, on en trace les projections, comme l'indique la *fig.* 327, les perpendiculaires menées à l'axe AO du cylindre par les points de division du pas BK rencontrent les projections IM, HO, etc., des génératrices menées par les points de division de la circonférence de la base du cylindre, en des points C, D, etc., qui appartiennent à la projection verticale de l'hélice, qu'alors on peut tracer d'une manière approchée. Il est évident que la circonférence de la base du cylindre est la projection horizontale de l'hélice.

1297. *Mener une tangente à l'hélice en un point* P (*fig.* 327). On trace la génératrice passant par le point P; au pied P' de cette génératrice on mène une tangente P'T' que l'on prend égale au développement de l'arc P'B', et joignant le point T' au point P, la droite T'P qui en résulte est la tangente demandée. En effet, d'après le principe du n° 1268, la tangente au point P étant la diagonale du parallélogramme, qui est ici rectangle, ayant la hauteur du point P au-dessus de la base et P'T' pour côtés, elle se confond bien avec T'P.

P'T' est la projection horizontale de la tangente, et prenant la projection verticale T du point T', la droite TP est la projection verticale de cette tangente.

La projection verticale TP est tangente au point P à la projection verticale BCPF de l'hélice.

Il est à remarquer qu'une tangente quelconque à l'hélice se confond avec la courbe quand on développe le cylindre.

1298. La *normale* en un point P de l'hélice est la perpendiculaire abaissée du point P sur l'axe du cylindre. Elle se projette horizontalement suivant le rayon O'P', et verticalement suivant PR perpendiculaire à l'axe OA.

1299. *La longueur d'un arc* BP d'hélice est égale à l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui a pour côtés de l'angle droit la distance du point P à la base du cylindre et le développement PT' de l'arc P'B'. En effet, quand on développe le cylindre, ces trois lignes deviennent les trois côtés d'un triangle rectangle. On a alors (704)

$$BP = \sqrt{\overline{PP'}^2 + \overline{T'P'}^2}.$$

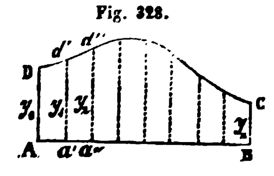
1300. Ce même triangle rectangle étant la surface S comprise entre l'arc BCP de l'hélice, la génératrice à laquelle se termine cet arc, et l'arc de cercle B'P', on a (692).

$$S = \frac{PP' \times T'P'}{2}.$$

COURBES QUELCONQUES.

1301. Pour obtenir la *longueur d'une courbe quelconque* DC, on la divise en parties Dd', $d'd''$... assez petites pour qu'on puisse les considérer comme étant sensiblement droites; on mesure chacune de ces parties, et la somme de toutes les longueurs obtenues est sensiblement la longueur de DC. On peut aussi contourner un fil sur la courbe, puis le rectifier pour avoir sa longueur, qui est celle de la courbe.

Fig. 328.



1302. *Aire plane* S *d'une surface* ABCD *comprise entre la courbe plane quelconque* DC *et sa projection* AB *sur une droite* AB (1105). Divisant DC en parties assez petites pour qu'on puisse les considérer comme étant sensiblement droites, et menant les perpendiculaires $a'd'$, $a''d''$..., la surface ABCD se trouve décomposée en éléments $Aa'd'D$, $a'a''d''d'$..., que l'on peut considérer comme étant des trapèzes, et l'on a (697).

$$S = Aa'd'D + a'a''d''d' + \ldots = Aa' \times \frac{AD + a'd'}{2} + a'a'' \times \frac{a'd' + a''d''}{2} + \ldots$$

Soit :

$AB = E$;

$Aa' = a'a'' = \ldots = \frac{E}{n}$, ce qui suppose la projection AB divisée en n parties égales;

$AD = y_0$, $a'd' = y_1$, $a''d'' = y_2 \ldots$ $BC = y_n$, les diverses ordonnées de la courbe.

Substituant ces expressions dans la valeur de S, on a

$$S = \frac{E}{n} \times \frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{E}{n} \times \frac{y_1 + y_2}{2} + \ldots + \frac{E}{n} \times \frac{y_{n-1} + y_n}{2},$$

ou, en mettant $\frac{E}{n}$ en facteur commun,

$$S = \frac{E}{n}\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right),$$

expression très-simple et facile à appliquer.

1303. *Formule* de Thomas Simpson. Cette formule donne plus exactement que l'expression précédente l'aire de la courbe plane ABCD (*fig.* 328). Le nombre n des divisions de AB étant pair, Thomas Simpson a fait voir que l'aire S de la courbe avait pour expression approchée

$$\frac{E}{3n}\left[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \ldots + y_{n-2})\right].$$

$\frac{E}{n}$ étant la distance de deux ordonnées consécutives, on voit que *la valeur approchée de l'aire* S *de la courbe est égale au produit du tiers* $\frac{E}{3n}$ *de la distance de deux ordonnées consécutives, par la somme* $(y_0 + y_n)$ *des deux ordonnées extrêmes, plus 4 fois la somme* $(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{n-1})$ *des ordonnées d'indices impairs, plus 2 fois la somme* $(y_2 + y_4 + y_6 + \ldots + y_{n-2})$ *des ordonnées intermédiaires d'indices pairs.*

Pour $n = 8$, on a

$$S = \frac{E}{3 \times 8}\left[y_0 + y_8 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)\right].$$

Remarque. Dans le cas où l'une ou les deux extrémités C et D de la courbe se trouveraient sur la droite AB, il suffirait de faire égales à 0, dans l'expression précédente et dans celle du n° 1302, les ordonnées y_0, y_n qui correspondent aux points qui se trouvent sur AB.

Si l'on avait une courbe fermée, pour évaluer l'aire, on la diviserait en deux parties par une droite, et l'on obtiendrait la surface de chaque partie en opérant comme dans le cas précédent. On peut, dans ce cas, obtenir l'aire totale par une seule application de la formule; il suffit de prendre pour ordonnées les sommes des ordonnées correspondantes dans les deux parties de la courbe.

1304. M. Poncelet, par une marche différente de celle suivie par Thomas Simpson, a établi la formule suivante pour calculer l'aire S d'une courbe :

$$S = \frac{E}{n}\left[2(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + \frac{1}{4}(y_0 + y_n) - \frac{1}{4}(y_1 + y_{n-1})\right].$$

Cette formule, dans laquelle n est encore un nombre pair, montre que *l'aire* S *est à peu près égale au produit de la distance* $\frac{E}{n}$ *de deux ordonnées consécutives, par le double de la somme* $(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1})$ *des ordonnées d'indices impairs, augmenté du quart de la somme* $(y_0 + y_n)$ *des ordonnées extrêmes, et diminué du quart de la somme* $(y_1 + y_{n-1})$ *des ordonnées immédiatement voisines des deux ordonnées extrêmes.*

La formule de M. Poncelet donne des résultats aussi et même souvent plus approchés que celle de Thomas Simpson, et l'on voit que, à part y_0 et y_n, toutes les autres ordonnées d'indices pairs n'y figurent pas, ce qui est un grand avantage dans tous les cas où ces ordonnées ne sont pas connues, puisque alors on peut se dispenser de les déterminer, ce qui n'a pas lieu quand on emploie la formule de Thomas Simpson.

SIXIÈME PARTIE.

LEVER DES PLANS. ARPENTAGE. NIVELLEMENT.

LEVER DES PLANS.

DÉFINITIONS ET PRINCIPES.

1305. L'opération du *lever du plan d'une machine, d'un bâtiment*, etc., consiste à déterminer les dimensions et les positions rélatives de leurs différentes parties, et, avec ces éléments, de faire à une échelle convenable (1051) le plan de la machine ou du bâtiment (1055).

L'expression *lever des plans* est surtout usitée quand il s'agit des terrains, et dans ce cas on se propose de déterminer les positions des projections sur un plan horizontal des lignes formant les contours du terrain, et des forêts, rivières, routes, etc., que contient ce terrain; puis de faire à une échelle convenable le plan de l'ensemble de ces projections.

Le plan de cette projection *horizontale* est le plan *cutellaire* du terrain.

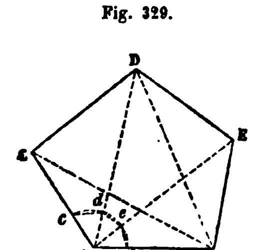
Les résultats s'inscrivent sur un croquis (964) au fur et à mesure qu'on les obtient sur le terrain : c'est faire le *lever* proprement dit. Ce croquis sert ensuite à dessiner le plan du terrain : c'est ce qu'on appelle *rapporter le plan*.

1306. L'*arpentage* consiste à déterminer l'aire de la projection sur un plan horizontal, c'est-à-dire l'aire du plan cutellaire d'une portion déterminée de terrain (1305); ce qui peut se faire, soit immédiatement sur le terrain, soit à l'aide du plan qui en a été levé.

1307. Le plan du terrain est une figure formée de lignes droites, de lignes courbes et de points. Une ligne droite étant déterminée par ses deux extrémités, et une courbe par une série de points convenablement rapprochés situés dans son contour, on voit que l'opération du lever de plan consiste à trouver les positions relatives des projections sur un plan horizontal d'une série de points situés sur la surface du sol.

1308. ABCDE étant des points du terrain à rapporter sur le plan, on prend la droite AB pour *base* des opérations, c'est-à-dire que l'on considère cette droite comme étant la base commune des triangles ABC, ABD, ABE, qui ont pour sommets les autres points C, D, E; puis on mesure assez de parties de ces triangles pour qu'ils soient déterminés, et par suite aussi leurs sommets C, D, E (626).

Fig. 329.



1309. On peut mesurer les longueurs horizontales des trois côtés de chacun de ces triangles, et ramener ainsi toute l'opération à la mesure de longueurs : c'est ce qu'on appelle le *lever au mètre* (1337).

1310. On peut ne mesurer que la longueur horizontale de la base AB, et la valeur des projections horizontales des angles adjacents à cette base dans chaque triangle : c'est le *lever au graphomètre* (1343).

On arriverait au même résultat en mesurant les longueurs horizontales de BA, BE, BD, BC, et en déterminant les valeurs des projections horizontales des angles ABE, ABD, ABC.

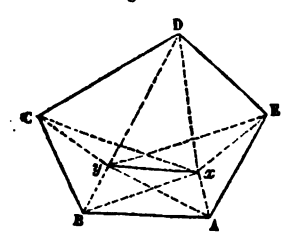
1311. Le *lever à la planchette* n'est autre chose que le lever au graphomètre (1310); seulement la valeur numérique des angles n'est pas donnée, et le plan est rapporté sur le terrain même, sans croquis (1348).

1312. Après avoir déterminé les points A, B, C, D, E (*fig.* 329), prenant une droite CD, qui joint deux de ces points, pour base, on peut déterminer des points situés de l'autre côté de CD, et en continuant ainsi de suite, on conçoit que l'on pourra faire le plan d'une étendue de terrain quelconque.

Cette division du sol en triangles et la suite des opérations qu'on effectue pour avoir les valeurs de leurs angles et de leurs côtés constituent ce qu'on appelle une *triangulation* (1336).

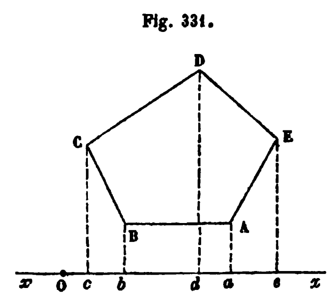
1313. Au lieu de prendre une droite AB qui joint deux points à relever pour base, on est quelquefois obligé d'avoir recours à une droite arbitraire *xy*, que l'on choisit, sur le sol, autant que possible horizontale, et de manière que de ses extrémités tous les points à relever soient visibles et accessibles.

Fig. 330.



1314. On peut encore déterminer les positions des points d'un terrain en abaissant de ces points des perpendiculaires sur une base xx', et en mesurant les longueurs horizontales de ces perpendiculaires et celles des distances de leurs pieds a, b, c, d, e à un point fixe O de la base. Ce mode d'opérer constitue le *lever à l'équerre*, parce que les perpendiculaires à la base se mènent au moyen de l'*équerre d'arpenteur*.(1322, 1340).

Fig. 331.



1315. L'aiguille aimantée prenant une direction que l'on peut considérer comme constante dans une certaine étendue de terrain, supposant que les influences qui peuvent faire varier cette direction restent les mêmes dans l'étendue du terrain et pendant la durée des observations, on a utilisé cette propriété pour construire la *boussole*, instrument à l'aide duquel on peut mesurer les angles, et par suite lever les plans : c'est le *lever à la boussole* (1347).

INSTRUMENTS. LEUR USAGE.

1316. D'après l'exposé que nous venons de faire des principes sur lesquels repose le lever des plans, on voit que l'on a constamment :

1° A déterminer sur le sol une ligne droite, ou plutôt une ligne se projetant sur un plan horizontal suivant une ligne droite : c'est ce qu'on appelle *tracer un alignement ;*

2° A mesurer la longueur d'un alignement, ou mieux de sa projection sur un plan horizontal;

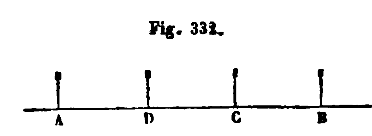
3° A mesurer l'angle de deux alignements, c'est-à-dire l'angle formé par les projections de ces alignements sur un plan horizontal.

1317. *Jalons et balises.* On fixe un alignement au moyen de *jalons*, que l'on plante de distance en distance dans le sol. Ce sont des baguettes de 1^m,30 environ de longueur, appointées à l'extrémité qui doit pénétrer dans le sol, et fendues à l'autre pour recevoir un *voyant* ou feuillet de papier qui les rend visibles à une certaine distance.

Pour les opérations d'une certaine importance, comme pour le tracé d'une route, les jalons sont des piquets ferrés par le pied, et peints alternativement dans leur longueur en couleurs éclatantes, ordinairement rouge et blanche. Souvent même, pour faciliter l'opération et en conserver la trace, quelques jalons sont remplacés par de grands signaux appelés *balises ;* ce sont de grandes perches, au sommet desquelles on fixe souvent un petit drapeau.

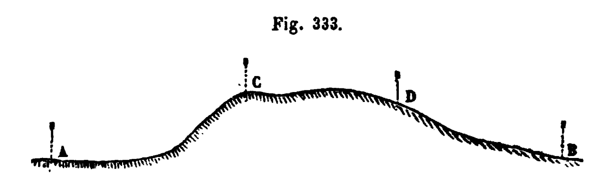
1318. *Tracé d'un alignement.* 1° Si de l'une des extrémités A de l'alignement on peut découvrir l'autre B ou au moins un jalon planté verticalement en B, l'opérateur place un second jalon en A; puis, dirigeant un rayon visuel sur la ligne qui unit les jalons A et B, il en fait planter d'intermédiaires par un aide, en commençant par le plus rapproché de B, et en continuant successivement par ceux qui s'en éloignent davantage. L'aide étant vers le point C, il présente le jalon verticalement et l'avance à droite ou à gauche, d'après les indications que lui fait de la main l'opérateur, qui se tient à une certaine distance en arrière du jalon A. Quand l'opérateur s'est assuré, en visant tangentiellement aux jalons alternativement à droite, à gauche et même par les sommets, que le jalon est bien dans l'alignement, il fait signe à l'aide de le planter dans le sol. Cela fait, on opère de même pour le jalon suivant D et successivement pour tous les autres.

Fig. 332.



2° Quand de l'une des extrémités A, B on ne peut voir un jalon ou un signal quelconque placé à l'autre extrémité, ce qui arrive, par exemple, quand les points A et B sont séparés par une élévation de terrain, deux opérateurs qui remplissent en même temps les fonctions d'aides, en opérant comme dans le cas précédent, placent simultanément, par un double tâtonnement, l'un le jalon D dans l'alignement CA, et l'autre le jalon C dans l'alignement DB. Les deux alignements ACD et CDB ayant une partie commune CD n'en forment qu'un seul AB.

Fig. 333.

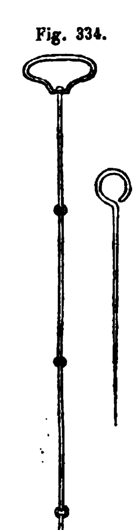


On opérerait encore de la même manière si, voulant agir en toute rigueur, les extrémités A et B étaient séparées par une vallée profonde, quoique de A on pût distinguer un jalon placé en B.

Remarque. Il se présente des cas particuliers où l'on est obligé d'avoir recours à d'autres moyens pour placer les jalons d'un alignement; mais ces moyens seront mieux compris quand nous connaîtrons les instruments dont on est alors obligé de faire usage.

1319. *Chaîne d'arpenteur. Fiches.* La chaîne d'arpenteur sert à mesurer les longueurs sur le terrain; elle est formée de tiges en gros fil de fer recourbées en boucles à leurs extrémités et réunies par des anneaux. Les anneaux sont espacés de $0^m,20$ d'axe en axe. La chaîne se compose de 50 chaînons, et a par conséquent un décamètre ou 10 mètres. Les extrémités sont terminées par des poignées pour la facilité de la manœuvre. Ces poignées sont comptées dans la longueur de la chaîne, ce qui fait que les chaînons extrêmes sont plus courts que les autres. De mètre en mètre, les anneaux de jonction des chaînons sont en cuivre pour faciliter la lecture des longueurs mesurées, et un appendice articulé sur l'anneau du milieu de la chaîne sert à faire reconnaître ce point.

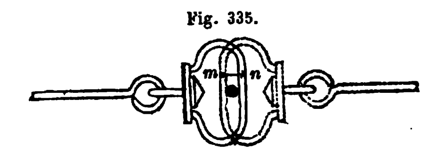
Fig. 334.



Les *fiches* sont de petites tiges en fil de fer de $0^m,004$ environ de diamètre, recourbées en anneau à une extrémité, et appointées à l'autre pour faciliter leur pénétration dans le sol.

1320. *Pour mesurer la longueur horizontale d'un alignement,* l'opérateur tient contre le pied du jalon de départ une des poignées de la chaîne, et son aide, appelé *porte-chaîne,* tenant l'autre poignée, s'éloigne de toute la longueur de la chaîne. Quand l'opérateur s'est assuré que la chaîne est bien tendue horizontalement et dans la direction de l'alignement, il l'indique à son aide, qui plante alors une fiche dans le sol, bien verticalement et tangentiellement à l'intérieur du bord extérieur de la poignée, comme l'indique la *fig.* 335. L'opérateur et l'aide, en entraînant la chaîne, avancent dans la direction de l'alignement; l'opérateur vient appuyer l'intérieur de la poignée contre la fiche, et l'aide plante une seconde fiche en prenant les mêmes précautions que pour la première, et l'on continue ainsi de suite.

Fig. 335.



L'aide a 10 fiches dans la main au commencement de l'opération; à chaque station, il en plante une que l'opérateur retire du sol quand il quitte le point où elle se trouve; lorsqu'il les a toutes en main, il les remet de nouveau à l'aide, et il prend note de la *portée* ou dizaine de décamètres mesurée.

De la manière de placer les poignées par rapport à la fiche, on perd à chaque station, de la longueur totale de la chaîne, une longueur *mn* égale au diamètre de la fiche plus la somme des diamètres des fils de fer formant les poignées. Il y a donc lieu de régler en conséquence la longueur de la chaîne avant de commencer l'opération.

Des opérateurs font placer par leur aide la fiche à l'intérieur de la poignée, comme ci-dessus, et eux appliquent l'extérieur de la poignée contre la fiche. De cette manière, on ne perd de la longueur de la chaîne que le diamètre du fil de fer d'une poignée à chaque station.

Enfin, un autre moyen très-usité consiste à tenir les poignées verticalement et à toujours placer les fiches à l'extérieur des poignées. La longueur de la chaîne est alors augmentée du diamètre de la fiche à chaque station. Ayant eu la précaution de faire disposer les côtés extérieurs des poignées perpendiculairement à la longueur de la chaîne bien tendue, l'aide, en serrant avec la main la fiche contre la poignée, ne peut, en tendant la chaîne, que planter la fiche verticalement.

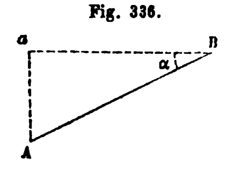
Variation de la longueur de la chaîne. Quand la surface du sol n'est pas droite et horizontale, la chaîne ne reposant plus dans toute sa longueur, quoique bien tendue, elle prend la forme d'une courbe, et ses extrémités sont rapprochées; c'est à l'opérateur à vérifier combien de millimètres il doit retrancher de la longueur de la chaîne pour compenser cette erreur.

La traction à laquelle on soumet la chaîne en la tendant allonge promptement les anneaux et les boucles; c'est pour cette raison que quand on veut opérer avec quelque exactitude, il faut, chaque matin, et même pendant le cours de la journée, vérifier la chaîne sur une longueur *étalon* préparée avec soin.

Lorsque le sol a de fortes ondulations ou une pente considérable, quand la chaîne est tendue horizontalement, les fiches ne sont plus assez longues; alors on laisse tomber tangentiellemement à la poignée une fiche plombée; elle fait un trou dans le sol, et marque la place de la fiche proprement dite. Dans ce cas, des opérateurs remplacent la fiche plombée par un bâton, celui de l'équerre ordinairement, qu'ils dressent verticalement comme une fiche.

Lorsque la pente du sol est longue et régulière, pour éviter les difficultés que l'on éprouve à bien tendre la chaîne et placer les fiches, et pour diminuer les erreurs qui résultent toujours soit de la courbure de la chaîne, soit du placement des fiches, il convient de chaîner suivant la pente AB du sol, puis de déterminer l'angle α, et la distance horizontale cherchée aB est donnée par la formule

Fig. 336.



$$aB = AB \cos \alpha. \qquad (1106)$$

Au lieu de chercher α, il peut être plus commode de déterminer Aa par un nivellement; on a alors (704)

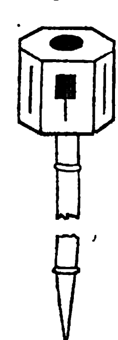
$$aB = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{Aa}^2}.$$

Pour des angles très-petits, $cos\,\alpha$ différant très-peu de l'unité (1138), on a sensiblement $aB = AB$, et l'on peut chaîner suivant la pente.

1321. La chaîne d'arpenteur est quelquefois un simple *ruban* en acier divisé en mètres et fractions de mètre dans sa longueur; elle a alors l'avantage de ne pas s'allonger sous la traction comme quand elle est composée de chaînons.

1322. *Équerre d'arpenteur* (1314). C'est un prisme droit creux, en cuivre, dont la base est un octogone régulier; 4 de ses faces latérales diamétralement opposées forment des *pinnules*, c'est-à-dire qu'on a pratiqué dans chacune d'elles une ouverture, appelée *fenêtre*, qui se prolonge en son milieu par une fente étroite, nommée *œilleton;* un fil de soie ou un crin est tendu dans l'axe de la fenêtre et de l'œilleton, parallèlement à l'axe du prisme. Les crins de deux faces opposées déterminent un plan passant par l'axe de l'équerre, et qu'on appelle *plan de visée*, parce que c'est en appliquant l'œil sur l'œilleton et en regardant par la fenêtre opposée qu'on amène ce plan à passer par l'objet que l'on vise. On a soin en construisant l'équerre de faire correspondre chaque fenêtre à l'œilleton de la face opposée.

Fig. 337.



Les pinnules des 4 autres faces sont de simples fentes étroites surmontées d'un petit trou circulaire.

Il y a ainsi dans l'équerre 4 plans de visée, dont chacun est à angle droit avec un autre, et incliné à 45° avec les deux autres; ce qui permet de tracer sur le terrain des angles de 90° et de 45°.

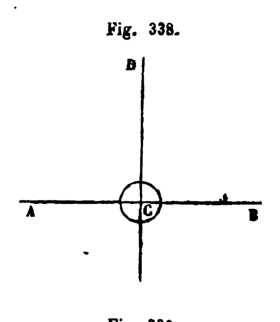
L'équerre s'adapte sur un bâton qui lui sert de pied, au moyen d'une douille qu'on visse au centre de la base inférieure de l'équerre. Ce bâton est ferré en pointe à son pied, afin qu'on puisse le planter verticalement dans le sol.

1323. *Vérification de l'équerre.* Toutes les équerres sortant de chez le fabricant doivent être exactes, c'est-à-dire que les plans de visée principaux doivent être à angles droits, ainsi que les plans de visée secondaires, et les premiers doivent être inclinés à 45° sur les seconds.

Pour s'assurer que deux plans de visée sont à angle droit, on plante l'instrument aussi verticalement que possible; on dirige l'un des plans de visée vers un objet éloigné, et le second plan vers un autre objet; puis on fait tourner l'instrument jusqu'à ce que le premier plan passe par le second objet, et si le second plan passe par le premier objet, c'est que les deux plans forment entre eux 4 angles égaux, et par conséquent droits. En opérant de la même manière on vérifierait si les deux autres plans de visée sont perpendiculaires entre eux, et encore s'ils font des angles de 45° avec les premiers.

1324. *Par un point C mener une perpendiculaire à un alignement* AB.

Fig. 338.



1° Le point C étant sur l'alignement, on plante l'équerre en C ; on dirige un plan de visée sur le jalon B; comme vérification, le même plan de visée doit passer aussi par le jalon A ; puis on fait planter un jalon D dans le plan de visée perpendiculaire au premier, et CD est la perpendiculaire demandée.

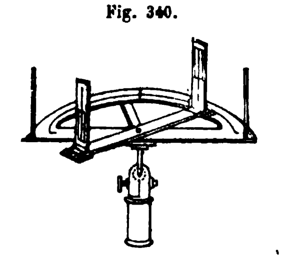
Fig. 339.

2° Si le point C est hors de l'alignement AB, en tenant un plan de visée dans la direction AB, on promène l'équerre sur AB, jusqu'à ce que le plan de visée perpendiculaire au premier passe par le point C, et CD est la perpendiculaire demandée.

Remarque. On opérerait de même pour mener par un point C une droite faisant un angle de 45° avec un alignement AB.

1325. *Graphomètre.* Cet instrument se compose d'un *limbe* ou demi-cercle divisé dans les deux sens, comme le rapporteur (1042), en 180° subdivisés en demi-degrés. Il est muni de deux alidades, ou règles recourbées à angle droit à leurs extrémités et munies de pinnules semblables à celles de l'équerre d'arpenteur. Une des alidades est fixe, et son plan de visée correspond à la *ligne de foi* du demi-cercle, de 0° à 180°; l'autre alidade est mobile autour du centre du demi-cercle, qu'elle peut parcourir, de manière que son plan de visée fasse un angle quelconque avec celui de l'alidade fixe. La grandeur de cet angle est indiquée sur le cercle par l'alidade mobile.

Fig. 340.

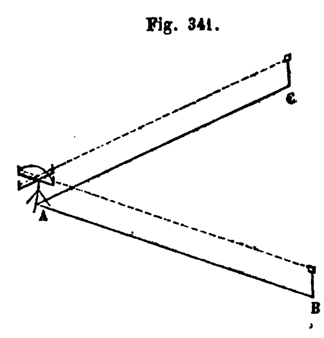


Il est avantageux de remplacer l'alidade à pinnules par une alidade à lunette *plongeante*, c'est-à-dire mobile autour d'un axe horizontal. Cette alidade permet de viser de plus loin, plus juste et à des niveaux très-différents.

L'axe du limbe se prolonge en dessous, et se termine par une sphère qui s'engage entre deux coquilles dont l'une est mobile. La coquille fixe se termine inférieurement par une douille, qu'on emmanche sur une tige fixée au sommet d'un pied à trois branches, sur lequel on place l'instrument quand on veut opérer. Une vis qui traverse la coquille mobile étant desserrée, on donne au cercle la position que l'on veut, et on l'y fixe ensuite en serrant la vis.

1326. *Mesurer l'angle* A *de deux alignements* AB, AC, *au moyen du graphomètre.* On enlève le jalon A, et on place l'instrument de manière que son centre se trouve autant que possible sur la verticale passant par l'axe du trou laissé par le jalon (un petit écart autour de cette position n'influe pas d'une manière sensible sur la valeur de l'angle A). Ayant bien affermi le pied, on desserre la coquille, on amène le cercle dans une position horizontale, et de manière que le plan de visée de l'alidade fixe passe par le jalon B ; on serre la coquille, et, sans secousse, on fait tourner l'alidade mobile jusqu'à ce que son plan de visée contienne le jalon C. On lit alors sur le limbe la valeur de l'angle, ou plutôt la valeur de l'angle réduit à l'horizon.

Fig. 341.

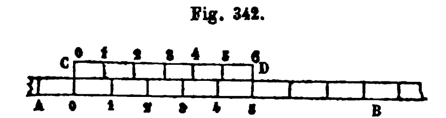


Sur le limbe se trouve ordinairement une petite boussole qui donne l'angle formé par le côté AB avec la direction nord-sud (1331). Cela permet d'orienter l'angle BAC et par suite tout le plan dont les points A, B, C font partie.

1327. *Vernier.* Pour donner plus d'exactitude à la lecture des angles fournis par le graphomètre, à chaque extrémité de l'alidade mobile on a gravé un vernier. C'est un appareil à l'aide duquel on atteint le même but qu'avec l'échelle topographique (*fig.* 230). Il peut être circulaire, comme dans le graphomètre, ou rectiligne (*fig.* 342 et 343).

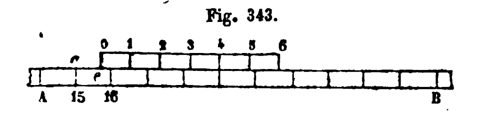
Soit une règle AB divisée en parties égales d'une longueur connue, et une seconde règle, ou *vernier* proprement dit CD, glissant dans une rainure le long de la première. La longueur de CD étant égale à un nombre entier, 5 par exemple, de divisions de AB, et cette longueur étant partagée en 5 + 1 parties égales, 6 parties de CD en valent 5 de AB, une seule en vaut $\frac{5}{6}$, et la différence de ces parties est égale à $\frac{1}{6}$ de la dernière ; par conséquent si deux divisions correspondent sur les deux règles, les 1re, 2e, 3e... divisions à droite et à gauche du point de coïncidence seront respectivement sur CD en avance sur celles de AB, de $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$... d'une partie de AB.

Fig. 342.



Cela établi, supposons qu'un objet appliqué contre la règle AB, à partir du 0 de cette règle, fasse avancer le vernier jusqu'au point *e* ; la

Fig. 343.



longueur de cet objet sera égale à 15 parties de AB, plus *ce* ou $\frac{4}{6}$ d'une partie de AB.

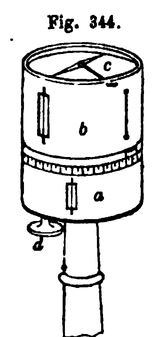
Le vernier du graphomètre s'étend sur 29 divisions du limbe, de chacune un demi-degré, et il est divisé en 30 parties égales ; il en résulte que la différence entre une division du limbe et une du vernier est $\frac{1}{30}$ de un demi-degré ; ainsi ce vernier permet de lire la valeur des angles à une minute près.

1328. *Vérification du graphomètre.* En mesurant les trois angles d'un triangle, la somme des valeurs trouvées est égale à 180° si le limbe est bien divisé. De même, en mesurant tous les angles consécutifs formés autour d'un même point par plusieurs directions, la somme des valeurs trouvées doit être égale à 360°.

1329. La base de chaque pinnule occupant sur le limbe un arc d'environ 12°, on ne peut mesurer directement que des angles supérieurs à 6° et inférieurs à 174°. Quand, par exception bien rare, on a à mesurer des angles hors de ces limites, on mesure deux angles dont la différence ou la somme soit égale à l'angle cherché.

1330. *Equerre-graphomètre* ou *pantomètre.* Cet instrument peut servir à la fois d'équerre et de graphomètre. Il est composé d'un cylindre fixe *a*, percé d'un seul plan de visée déterminé d'un côté par une simple fente et de l'autre par une fenêtre avec fil (1322), et d'un cylindre supérieur *b*, percé de deux plans de visée à angle droit et déterminés comme celui du cylindre *a* par une fente d'un côté et une fenêtre de l'autre. Le cylindre *b* est mobile sur celui *a*, et on lui imprime son mouvement à l'aide d'une crémaillère intérieure qui s'engrène avec un pignon monté sur un axe portant une tête *d*. Cette disposition permet de faire mouvoir le cylindre *b* sans secousse. Le cylindre *a* est surmonté d'un cercle argenté divisé en 360°, le 0 correspondant à la fente du plan de visée, et le cylindre *b* se termine inférieurement par une couronne portant un vernier dont le 0 correspond à la fente de l'un des plans de visée. Enfin le cylindre *b* porte une boussole *c* sur son fond supérieur.

Fig. 344.



On peut se servir du cylindre supérieur, abstraction faite du cylindre *a*, comme d'une simple équerre pour mener des perpendiculaires (1324). Par l'emploi simultané des deux cylindres, on peut mesurer un angle comme avec le graphomètre (1326). Ainsi, disposant l'instrument sur un pied à trois branches au sommet A de l'angle (*fig.* 341), on dirige le plan de visée du cylindre *a* vers le point B; puis on fait tourner le cylindre *b* jusqu'à ce que son plan de visée correspondant au 0 du vernier passe par le point C, et la valeur de l'angle BAC se lit sur le cercle qui surmonte le cylindre *a*, au moyen du vernier que porte le cylindre *b*. La boussole *c* sert à orienter l'angle BAC.

1331. *Boussole* (1315). L'aiguille aimantée reposant librement par son centre sur un pivot, elle prend, sur une certaine étendue de terrain, une direction qui fait un angle à peu près constant avec la direction nord-sud du méridien terrestre. Cet angle, appelé la *déclinaison* de l'aiguille, est en ce moment à Paris de 20°5′, mesurés du nord vers l'ouest, c'est-à-dire de droite à gauche pour l'observateur qui regarde vers le nord.

L'angle de déclinaison varie d'un lieu à un autre, et avec le temps il varie pour un même lieu. A Paris, en 1580, époque des premières observations faites sur la déclinaison de l'aiguille aimantée, la déclinaison était orientale et de 11°30′; en 1663, l'aiguille aimantée marquait le vrai Nord; puis elle a passé à l'ouest, en s'écartant de plus en plus jusqu'à 1785 à 1835, époques entre lesquelles la déclinaison est restée entre 22° et 22°30′. Depuis 1835, l'aiguille a une tendance à se rapprocher du méridien terrestre.

Un plan s'oriente en y figurant par une flèche la direction du méridien terrestre. A l'aide de la boussole, on détermine sur le plan la direction du méridien magnétique, et l'angle de déclinaison permet de tracer la ligne nord-sud astronomique.

L'*azimuth magnétique* d'une droite est l'angle que forme sa projection sur un plan horizontal avec la direction de l'aiguille aimantée, cet angle se mesurant en partant du nord de l'aiguille et allant à gauche jusqu'à la rencontre de la droite. Comme il y a deux rencontres, il y a deux azimuths magnétiques, un pour chacun des sens CA et CB de la droite; l'un NCA varie de 0° à 180° pendant que l'autre NCO + OCB varie de 180° à 360°, et leur différence est toujours égale à 180°.

Fig. 345.

A N C O E S B

La *boussole d'arpenteur* (*fig.* 346) est une boîte en bois carrée à l'extérieur et cylindrique à l'intérieur. Elle peut tourner à frottement autour d'un axe vertical pris dans un genou à coquilles semblable à celui du graphomètre (1325), et on la pose sur un pied à trois branches pour opérer. Le dessus de la boîte est fermé par un verre, qui permet de voir à l'intérieur.

L'aiguille aimantée est azurée du côté qui se dirige vers le nord N; elle porte en son milieu une chape en agate, par laquelle elle repose sur un pivot en acier qui s'élève au centre de la boîte perpendiculairement à son fond. Les extrémités de l'aiguille se meuvent sur un cercle de 0m,10 à 0m,20 de diamètre, divisé en 360°, subdivisés en demi-degrés. La graduation va de 0° à 360° en allant de gauche à droite pour l'observateur placé au centre, et la ligne de foi, qui va de 0° à 180°, est parallèle à deux côtés de la boîte. Latéralement à celui de ces côtés situé près de la division 90°, est fixé un coffre en bois mobile autour d'un axe situé dans le prolongement du diamètre 270°, 90°. Ce coffre fait fonction d'alidade, et à cet effet chacune de ses extrémités est fermée par une plaque métallique percée d'un petit trou circulaire servant d'œilleton et d'une fenêtre à fil (1322). L'œilleton de chaque pinnule

correspond à la fenêtre de l'autre, ce qui permet de viser dans les deux sens. Du reste, les deux plans de visée coïncident et sont parallèles au diamètre 0°, 180°.

Sur le côté de la boîte parallèle à l'alidade, et sur l'un des côtés perpendiculaires, on dispose quelquefois deux petits niveaux à bulle, qui guident pour placer l'appareil bien horizontal. A défaut de ces niveaux, la propriété qu'a l'aiguille de se placer horizontalement, quand elle est tout à fait libre, guide pour amener l'appareil dans cette position, puisqu'alors l'aiguille affleure le limbe par ses deux extrémités.

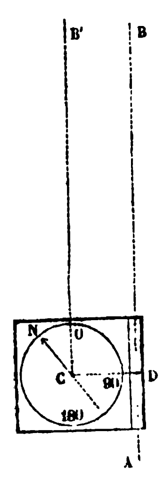
La boussole est recouverte d'un verre transparent, et on peut la fermer complétement, quand on n'opère pas, à l'aide d'une planchette en bois qui s'adapte dans une coulisse. Une petite tige, que l'on fait monter ou descendre en poussant à droite ou à gauche un bouton saillant sur la boîte, permet de rendre l'aiguille libre, ou de l'appliquer contre le verre après l'opération pour éviter que le pivot ne s'émousse.

Le coffre alidade porte quelquefois une lunette qui permet d'opérer à de plus grandes distances.

La mobilité du coffre et par suite de la lunette autour de l'axe situé dans le prolongement du diamètre 270°, 90° permet de viser les points situés à des niveaux très-différents.

Pour déterminer l'azimuth du sens AB d'un alignement AB, on place la boussole horizontalement sur son pied, en faisant en sorte que le plan de visée de l'alidade coïncide aussi exactement que possible avec AB; l'angle 360°—NCB′, que, dans le cas de la figure, C0° fait avec CN, à gauche de CN, est l'azimuth cherché, dont la valeur est indiquée directement par CN sur le limbe de la boussole.

Fig. 346.

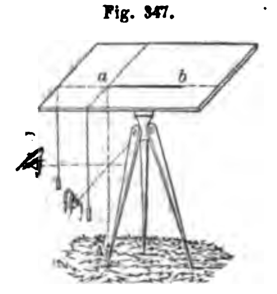


Pour déterminer l'angle que deux alignements font entre eux, plaçant le point D de la boussole au sommet de l'angle, on détermine, en opérant comme il vient d'être indiqué pour trouver un azimuth, les angles formés par les alignements avec la direction CN de l'aiguille, et selon que CN est dans l'angle cherché ou en dehors, celui-ci est égal à la somme ou à la différence des deux angles trouvés.

Il est impossible que le point D de la boussole reste au sommet de l'angle sans changer l'instrument de place; mais l'erreur que l'on commet en ne prenant pas cette précaution est si faible, qu'on se dispense d'y avoir égard.

1332. *Planchette* (1311). Cet instrument n'est autre chose qu'une planche à dessiner (1048) munie à son centre d'une tige à boule maintenue par une coquille, comme le graphomètre (1325), et qu'on place sur un pied à trois branches pour opérer. On remplace quelquefois le genou à coquille par un genou dit à la *Cugnot*, qui est formé de deux axes rectangulaires horizontaux placés l'un au-dessus de l'autre, et autour de chacun desquels la planchette peut s'incliner. Avec cette disposition, plus solide que la précédente, la planchette peut également être inclinée dans tous les sens quand les axes sont desserrés. Afin de pouvoir tourner la planchette sans lui faire perdre l'horizontalité qu'on lui a donnée en la mettant en station, on la rend quelquefois mobile autour de son axe vertical, celui-ci restant fixe comme la partie inférieure du pantomètre (1330). Cette disposition est aussi employée pour la boussole d'arpenteur (1331).

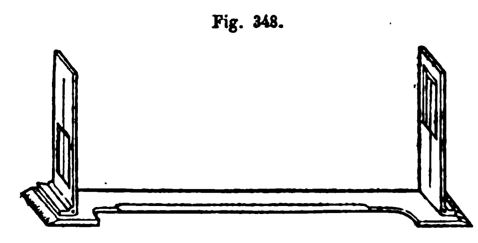
Fig. 347.



Sur la face supérieure de la planchette on colle la feuille de papier à dessiner. Il y a des planchettes munies de rouleaux en bois placées longitudinalement à deux de leurs arêtes parallèles; ces rouleaux servent à fixer la feuille de papier quand elle a des proportions qui ne permettent pas de la coller sur la planchette.

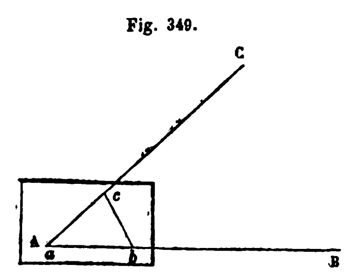
L'emploi de la planchette exige qu'on fasse usage de l'*alidade*, qui n'est autre chose qu'une règle en cuivre garnie à chaque extrémité d'une pinnule semblable à celles du graphomètre. Le plan de visée ou de *collimation* contient une arête de la règle, de sorte que l'alidade étant placée sur la planchette disposée horizontalement, une ligne tracée le long de cette arête est la projection horizontale sur le papier de l'alignement déterminé par le plan de visée de l'alidade.

Fig. 348.



Pour vérifier une alidade, on trace sur la feuille de papier collée sur la planchette la projection horizontale d'un alignement; retournant l'alidade, on fait coïncider son arête avec la projection qu'on vient de tracer, et si dans cette position son plan de visée est encore dans la direction du même alignement, c'est que l'alidade est exacte.

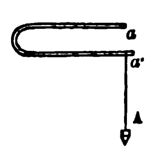
Fig. 349.



Pour relever avec la planchette l'angle formé par deux alignements

AB, AC, on place l'instrument au sommet A, de manière que la verticale contenant le point A rencontre la planchette en un point *a* qui permette de donner aux côtés *ab* et *ac* une longueur convenable. On amène la planchette dans une position horizontale, en se guidant avec un petit niveau à bulle d'air. Alors on détermine le point *a* aussi exactement que possible; la tringle recourbée représentée *fig.* 350 est très-convenable pour cette opération; on lui fait embrasser la planchette, et amenant le petit fil à plomb qu'elle porte au-dessus du point A du sol, l'extrémité supérieure de la tringle indique la position du point *a* sur la feuille de papier. Il est à remarquer qu'un petit écart du point *a* autour de la verticale passant par A n'influe pas d'une manière sensible sur la valeur de l'angle.

Fig. 350.

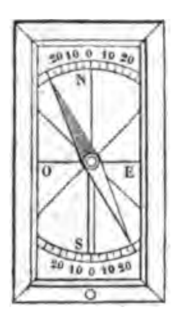


Comme l'indique la figure 347, à l'aide d'un petit fil à plomb tendu sur la planchette successivement suivant *ab* et suivant une perpendiculaire à *ab*, on peut déterminer deux plans verticaux dont l'intersection A*a* est verticale et reporte le point A du sol au point *a* de la feuille de papier.

La planchette étant disposée, on place l'alidade de manière que son arête passe par un point *a* et que son plan de visée contienne le point B (*fig.* 349), et la droite *ab* qu'on trace le long de l'arête de l'alidade est la projection de l'alignement AB sur la feuille de papier. On trace de même la projection *ac* de l'alignement AC, et l'angle *bac* est l'angle cherché. On aurait sa valeur en degrés au moyen du rapporteur (1042).

1333. *Déclinatoire.* C'est une petite boussole sans alidade, dont la boîte est rectangulaire. Les grands côtés de cette boîte sont parallèles à la direction 0° 0° du limbe, et ils servent de règles pour tracer la ligne d'orientation d'un angle ou d'un plan qu'on lève à la planchette. A chaque extrémité de la boîte il y a seulement une portion de limbe. Chacune de ces portions porte les mêmes divisions, de 0° à 35° seulement, à droite et à gauche de 0°; d'où il résulte qu'aux deux extrémités de l'aiguille on lit le même angle sur le limbe.

Fig. 351.



L'angle BAC étant relevé et la planchette étant encore en station (*fig.* 349), on place le déclinatoire sur la feuille de papier, et on le fait tourner jusqu'à ce que l'aiguille coïncide avec le diamètre 0° 0° du limbe; alors traçant une droite en se servant du grand côté de la boîte comme règle, elle détermine la direction du méridien magnétique, et connaissant l'angle de déclinaison on trace la direction du méridien terrestre (1331).

Pour orienter un plan, on le fixe sur la planchette; on met celle-ci en station, et, à l'aide de l'alidade, on fait coïncider l'une des droites du dessin avec l'alignement qu'elle représente. Alors, au moyen du déclinatoire, on trace sur le plan la direction du méridien magnétique,

puis celle du méridien astronomique, en opérant comme on vient de l'indiquer pour l'angle BAC.

1334. *Cercle. Théodolite.* Le cercle est un graphomètre perfectionné, dans lequel le limbe est un cercle entier (1325).

Il se compose d'un arbre vertical fixé au centre d'un pied métallique à trois branches, portant chacune à son extrémité une vis calante. C'est par ces vis que l'appareil repose sur le pied ordinaire en bois quand on veut opérer, et en les serrant plus ou moins on amène le cercle dans la position horizontale.

La moitié environ de la longueur de l'arbre vertical sert d'axe à un manchon auquel est fixé le cercle; de sorte que le cercle peut tourner librement autour de l'arbre. Une vis de pression rend à volonté le cercle solidaire avec l'arbre et s'oppose à son mouvement, et une vis de rappel fixée au pied de l'arbre permet, quand la vis de pression n'est que légèrement serrée, de donner au cercle un mouvement sans secousse aussi petit que l'on veut. Cette disposition permet de terminer d'amener exactement la lunette dans la direction du point visé.

La moitié supérieure de l'arbre est entourée d'un second manchon, qui porte à sa partie inférieure une alidade, et à sa partie supérieure la lunette de visée. L'alidade est sans pinnule; chacune de ses extrémités porte seulement un vernier qui court sur le cercle, ce qui permet de faire deux lectures de l'angle relevé; si, par suite d'une mauvaise division du cercle, les deux lectures ne donnaient pas la même valeur, on prendrait la moyenne des deux valeurs trouvées. A l'une des extrémités de l'alidade se trouve une vis de pression qui la fixe à volonté au cercle, ainsi que le manchon supérieur et la lunette. Une vis de rappel que porte la même extrémité de l'alidade permet encore d'amener exactement l'axe optique de la lunette dans la direction du point visé.

Sur le cercle est fixé un petit niveau à bulle d'air qui guide pour le rendre horizontal.

Lorsque les deux vis de pression sont desserrées, les deux manchons, et par suite le cercle et la lunette, sont indépendants et peuvent prendre des mouvements quelconques autour de l'arbre. En serrant seulement la vis de pression supérieure, les deux manchons, et par suite le cercle et la lunette, deviennent solidaires, et alors leur ensemble peut tourner tout à la fois autour de l'arbre. En serrant seulement la vis de pression inférieure, le cercle devient fixe, et le manchon supérieur peut seul tourner avec la lunette et son alidade. Quand les deux vis de pression sont serrées, tout le système reste fixe.

Pour la facilité des lectures, la ligne de foi de l'alidade est ordinairement à angle droit avec le plan de visée ou de *collimation.*

La lunette oscille autour d'un axe horizontal fixé au manchon supérieur, ce qui permet de viser des points situés à des niveaux différents. Elle porte souvent une alidade qui se meut sur un arc de cercle ver-



tical; quand l'index de cette alidade correspond au 0 de l'arc, c'est que la lunette est horizontale, et au point où s'arrête l'index quand l'axe optique passe par le point visé, on lit la valeur de l'angle formé avec l'horizontale par la droite qu'on relève, angle qu'il est souvent utile de connaître. Dans les cercles ordinaires, l'arc ne s'étend guère que sur une étendue de 45° de chaque côté du 0°, ce qui ne permet pas de mesurer des inclinaisons supérieures à cette limite.

Il y a des appareils dans lesquels l'arc vertical est remplacé par un cercle complet; ce sont des *Théodolites;* le cercle inférieur est appelé cercle *azimutal*, et celui supérieur est dit *vertical*.

Ordinairement les cercles sont munis d'une seconde lunette fixée au manchon inférieur et dite lunette *témoin* ou de *repère*. On dirige cette lunette vers un point fixe éloigné quand l'appareil est en place et que l'alidade correspond au 0° du cercle; de légers mouvements qu'elle peut prendre permettent toujours de l'amener vers un point fixe convenable, et une vis de pression l'y maintient. Si le cercle bougeait pendant qu'on relève un ou plusieurs angles ayant même sommet, la lunette témoin cesserait d'être dirigée vers le point de repère, et il faudrait recommencer l'opération.

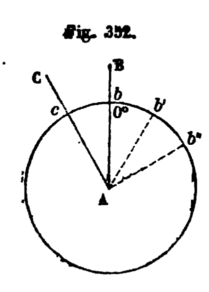
Pour relever un angle BAC avec le cercle (*fig.* 341), au sommet A on dispose l'appareil sur un pied à trois branches comme le graphomètre (1325), et à l'aide des vis calantes on rend le cercle bien horizontal; cela fait, on amène, à la main d'abord, puis à l'aide de la vis de rappel supérieure, l'index de l'alidade sur le 0° du cercle; on rend les deux manchons solidaires l'un de l'autre, et, avec la main d'abord, puis au moyen de la vis de rappel inférieure, on fait tourner tout l'appareil jusqu'à ce que l'axe optique de la lunette principale soit dans la direction du côté AB de l'angle. On serre alors la vis de pression inférieure, et on dirige la lunette témoin sur un point de repère; puis on desserre la vis de pression supérieure, et amenant la lunette principale dans la direction du côté AC, l'alidade indique la valeur de l'angle BAC sur le cercle. Si l'on avait plusieurs angles ayant le même sommet A, on ne desserrerait pas la vis de pression inférieure; l'alidade indiquerait les valeurs des angles formés par les divers côtés avec le premier AB, et par de simples soustractions on aurait les valeurs cherchées.

1335. *Répétition des angles.* En mesurant un angle avec un instrument quelconque, on peut commettre des erreurs de deux sortes: les unes, dites de *pointé*, et les autres de *lecture*. Les premières proviennent de ce que l'alidade ou la lunette n'est pas dirigée exactement suivant les côtés de l'angle; les secondes, de ce que les divisions des instruments ne sont jamais parfaitement exactes, et de ce que le vernier ne permet pas d'évaluer rigoureusement les fractions de ces divisions.

Avec un cercle bien établi (1334), un observateur exercé commet des erreurs de pointé qui peuvent encore atteindre une seconde. Quant à l'erreur de lecture, on peut la rendre aussi petite qu'on veut à l'aide

d'une méthode qui consiste à *répéter* l'angle à mesurer. Soit BAC cet angle ; on le mesure une première fois comme il a été indiqué (1334); puis, rendant la lunette solidaire avec le cercle, on la ramène dans la direction de AB; le 0° du cercle vient au point b', tel que l'on a $b'Ab = bAc$; on fixe le cercle dans cette position, et rendant libre la lunette, on la ramène dans la direction AC; l'alidade indique alors sur le cercle l'angle $b'Ac = 2bAc$. Rendant de nouveau la lunette solidaire avec le cercle; en l'amenant dans la direction AB, le 0° viendra au point b'', qui donne $b''Ab = 2bAc$; puis faisant avancer la lunette jusqu'à la direction AC, l'alidade indiquera sur le cercle l'angle $b''Ac = 3bAc$. Opérant ainsi de suite, on répétera sur le cercle l'angle bAc autant de fois que l'on voudra, soit 10 fois par exemple. Comme il n'y a pas de raison pour que l'erreur de lecture soit moindre pour l'angle simple que pour l'angle 10 fois plus grand indiqué par l'alidade, puisque les inégalités des divisions du cercle se compensent nécessairement sur une certaine étendue, en divisant par 10 l'angle trouvé, on aura l'angle cherché avec une erreur 10 fois moindre. Comme, de plus, on aura une moyenne des erreurs dues aux évaluations des fractions de division, et une moyenne des erreurs de visée, on n'aura pas à craindre une erreur considérable pour ces deux causes.

Fig. 332.



Lorsque le cercle est garni de deux lunettes, on peut faire la répétition des angles par la manœuvre alternative des deux lunettes, en suivant une marche analogue à la précédente.

1336. *Triangulation* (1312). Lorsqu'on mesure des angles uniquement pour les rapporter sur le papier, on peut se contenter de l'exactitude que donne le graphomètre (1325), les procédés graphiques ne permettant guère une approximation supérieure à un quart de degré dans le dessin d'un angle; mais lorsqu'il s'agit d'opérations géodésiques s'étendant sur une grande étendue de pays, une province ou un département par exemple, on a recours au cercle (1334) pour mesurer les angles. De plus, comme la mesure des longueurs est difficile et sujette à des erreurs, on les évite en mesurant avec le plus grand soin une seule base dans une position favorable, et l'on rattache à cette base un réseau de triangles qui couvre tout le pays. L'un de ces triangles a la base pour côté, et chaque triangle a un côté commun avec au moins un des triangles voisins; ce qui permet, en partant de la base, de résoudre successivement tous les triangles en ne mesurant que des angles (1128).

Pour mesurer la base, on emploie deux règles en bois de chacune 4 mètres de longueur, que l'on place successivement l'une au bout de l'autre; on les pose sur des pièces de bois rendues bien horizontales au moyen de chevalets à vis.

Dans la crainte de déplacer une règle en posant l'autre à son extrémité, on laisse entre elles une certaine distance, que l'on mesure avec

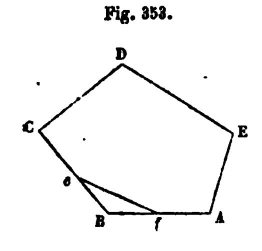
une petite languette graduée qui se meut à coulisse dans l'extrémité de l'une des règles. Un bouton que l'on tourne permet d'amener sans choc la languette au contact de l'autre règle. La languette est divisée en millimètres, et un vernier (1327) tracé sur la règle permet d'évaluer les dixièmes de millimètre.

LEVERS AU MÈTRE.

1337. *Lever au mètre par cheminement.* Le lever au mètre s'effectue de différentes manières suivant l'état du terrain, mais toujours en ne se servant que de la chaîne ou de tout autre instrument à mesurer les longueurs, pour lever les projections horizontales soit des alignements, soit des angles.

Le polygone ABCDE étant le terrain à lever, on commence par faire sur une feuille du carnet un croquis aussi exact que possible de ce polygone; c'est ce qu'on pourrait appeler le *lever à vue* du terrain. Cela fait, on parcourt le contour du polygone en mesurant les longueurs horizontales des côtés et en levant les angles. Pour lever un angle B, à partir du sommet B, on prend sur les côtés deux longueurs horizontales B*e*, B*f*, égales ordinairement à la longueur 10 mètres de la chaîne; on mesure la distance horizontale *ef*, et les trois côtés de la projection horizontale du triangle B*ef* étant connus, on pourra la construire sur le plan, et par suite aussi la projection de l'angle B. On a soin d'inscrire les résultats sur le croquis à mesure qu'on les obtient. Lorsqu'on rapportera le plan, le polygone se fermera complétement si les résultats sont exacts.

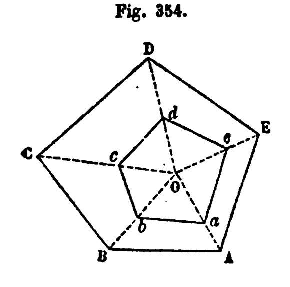
Fig. 353.



Ce mode, appelé *lever au mètre par cheminement*, est applicable à un terrain quelconque, quand son contour est accessible, soit que ce terrain soit couvert d'eau, de bois ou de constructions. Il pourrait arriver cependant que l'on ne pût pas mesurer *ef*; alors on lèverait, en opérant comme il a été indiqué pour l'angle B, l'angle extérieur formé par le côté BC et le prolongement de AB.

1338. *Lever au mètre par rayonnement.* Lorsque la surface du terrain est partout accessible, on joint un point intérieur O à tous les sommets; on mesure les distances horizontales OA, OB, OC...., et, en opérant comme au numéro précédent, on lève tous les angles autour du point O.

Fig. 354.



Ordinairement, au lieu de lever par ce moyen les angles formés autour du point O, on mesure horizontalement les côtés mêmes du polygone; chacun des triangles qui composent le terrain est alors déterminé par ses trois côtés.

Au lieu de choisir un point O à l'intérieur du polygone, on prend le plus souvent un des sommets de ce polygone.

1339. *Lever au mètre par intersections.* Lorsque le terrain est inaccessible et que tous ses sommets sont visibles, si, par exemple, il est séparé par une rivière du lieu où l'on se trouve, on mesure sur le terrain accessible une base aussi horizontale que possible, et d'une longueur suffisante pour que les angles qu'on aura à lever ne soient ni trop aigus ni trop obtus; on détermine par des jalons plantés sur le sol accessible les alignements joignant chaque extrémité de la base aux divers sommets du polygone; puis on lève, par le moyen indiqué n° 1337, les angles formés par la base avec tous ces alignements. En rapportant sur le plan la base et les angles levés, les intersections des côtés de ces angles déterminent les sommets du polygone à rapporter.

Remarque. Par ce mode des intersections, on peut lever un point quelconque; aussi l'emploie-t-on pour faire le lever des détails que l'on veut figurer sur le plan, quel que soit, du reste, le mode de lever au mètre qu'on a suivi pour le contour du terrain. Il s'applique également à un terrain dont le contour est quelconque, en levant autant de points que l'on veut de ce contour.

LEVERS A L'ÉQUERRE.

1340. *Lever à l'équerre dans le cas où le terrain est accessible et découvert* (1322). On détermine par des jalons une base xx' sur le terrain; par les sommets du polygone, où l'on a planté des jalons, on mène des perpendiculaires à xx'; on mesure les longueurs de toutes ces perpendiculaires, ainsi que les distances des pieds de ces perpendiculaires à un même point O de xx', ou simplement les distances entre les pieds de ces perpendiculaires, et ces éléments suffisent pour rapporter le plan.

Fig. 355.

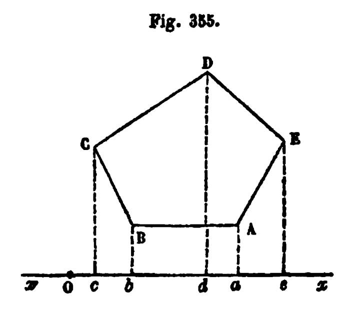


Fig. 356.

Comme vérification, on doit avoir $cb + bd + da + ae = cd + de$, et chacun des membres de cette égalité doit être égal à ce mesuré directement.

Ordinairement on prend pour base d'opération xx' un côté ou une diagonale du polygone (*fig.* 356).

Lorsque le terrain est accessible, mais entouré de murs ou de haies, on emploie toujours une transversale comme base d'opération; le plus souvent cette transversale est une diagonale du polygone.

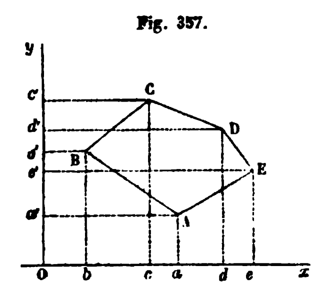
Si le contour du terrain était une ligne quelconque, par les moyens

précédents on en lèverait autant de points que l'on voudrait, et en rapportant ces points, on pourrait faire le plan du périmètre du terrain. C'est par ce moyen qu'on lève ordinairement les détails, même quand les lignes principales sont déterminées au moyen du graphomètre ou de tout autre instrument. Comme il est beaucoup plus facile de mener une perpendiculaire à un alignement par un point pris sur l'alignement que par un point pris en dehors (1324), pour la rapidité de l'opération, on établit successivement l'équerre sur la base en différents points convenablement espacés, et on lève les points correspondants du contour.

1341. Si le terrain est couvert de bois ou de constructions qui arrêtent la vue, ou même s'il est inaccessible à son intérieur, comme dans le cas où il est recouvert d'eau, on trace autour du terrain un rectangle; on lève ce rectangle, puis, par rapport à chacun de ses côtés, on lève les parties du contour du terrain qui en sont le plus approchées. On opère d'une manière analogue pour faire l'arpentage du terrain (1371).

1342. Dans le cas où le terrain est découvert, mais inaccessible à l'intérieur, ou même jusqu'à une certaine distance de son contour, comme dans le cas où il est séparé par une rivière, on trace deux axes rectangulaires sur le terrain accessible; sur chacun de ces axes on détermine les pieds des perpendiculaires qui leur seraient menées par les points à lever, et les distances de ces pieds à l'origine O permettent de rapporter les points dont elles sont les coordonnées. Ce mode constitue un *lever à l'équerre par intersections* (1339).

Fig. 357.



LEVERS AU GRAPHOMÈTRE.

1343. A l'aide du graphomètre et de la chaîne, on peut opérer par *cheminement* (1337), en mesurant les côtés avec la chaîne et les angles avec le graphomètre (1325).

1344. Lorsque la surface du terrain est partout accessible, on applique la méthode par *rayonnement* (1338), en mesurant, bien entendu, les angles avec le graphomètre. Il est évident que le centre de rayonnement peut encore être un sommet du polygone à lever.

1345. *Le lever au graphomètre par intersections* est usité dans les cas de terrains inaccessibles, mais découverts (1342).

1346. Lorsque le terrain est couvert de bois ou de constructions, et même s'il est inaccessible à son intérieur, on l'entoure d'un polygone, appelé *polygone topographique;* on lève ce polygone par cheminement (1343), ou encore par intersections s'il est découvert (1345); puis, prenant ses côtés pour bases, on lève le contour du terrain. Cette dernière partie de l'opération se fait ordinairement avec l'équerre (1340).

LEVERS A LA BOUSSOLE.

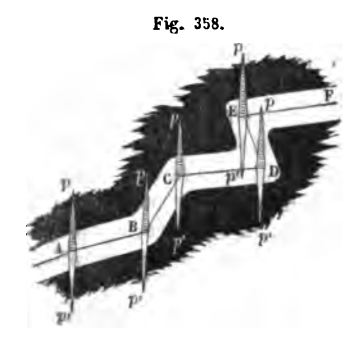
1347. La boussole fournissant les moyens de mesurer un angle (1331), l'on conçoit qu'avec cet instrument on peut résoudre les mêmes problèmes qu'avec le graphomètre ; mais comme elle donne la valeur des angles avec beaucoup moins de précision que ce dernier instrument, elle n'est guère d'un bon usage que pour le lever des détails, à l'égard desquels la position précise est généralement beaucoup moins importante que la rapidité des opérations.

L'incertitude des indications fournies par la boussole donne, plus encore que pour le graphomètre, une grande importance aux diverses vérifications propres à manifester l'inexactitude des résultats. Ainsi, pour un contour polygonal complet, la somme des angles trouvés doit être égale à la somme des angles du polygone (618).

Les mineurs et les forestiers font un usage presque exclusif de la boussole, à cause du moyen commode qu'elle leur fournit pour déterminer les directions des galeries d'une mine ou des chemins d'une forêt.

Supposons qu'il s'agisse de lever une galerie de mine. On fixe par des jalons l'axe ABCDEF de la galerie, et établissant successivement la boussole aux sommets A, B, C, D... de cet axe, on détermine les angles *p*AB, *p*BC, *p*CD... (1331).

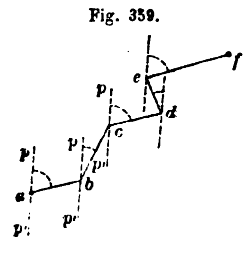
Fig. 358.



Un point A de l'axe de la galerie ayant été rapporté à la surface du sol à l'aide d'un puits, si toutefois il n'est pas à l'entrée à ciel ouvert de la galerie, on trace AB sur la surface du sol en faisant usage de la boussole. La mesure de AB de la galerie permet de déterminer le point B de la surface du sol. La boussole établie en ce point B permet de tracer BC ; puis on détermine le point C, et l'on continue ainsi de suite. L'axe étant tracé sur la surface du sol, on peut tracer les parois de la galerie dont on a mesuré les distances à droite et à gauche de l'axe souterrain aux différents points de cet axe.

Pour rapporter le plan de la galerie sur le papier, on fait (*fig.* 359) l'angle *pab* égal à l'angle *p*AB (*fig.* 358), et on prend la longueur *ab* représentant AB à l'échelle adoptée. On fait ensuite l'angle $pbc = p$BC, et l'on prend *bc* représentant BC à la même échelle. Continuant ainsi de suite, on rapporte tout l'axe de la galerie, dont on peut ensuite rapporter les parois après avoir mesuré leurs distances à l'axe aux différents points de la longueur de cet axe.

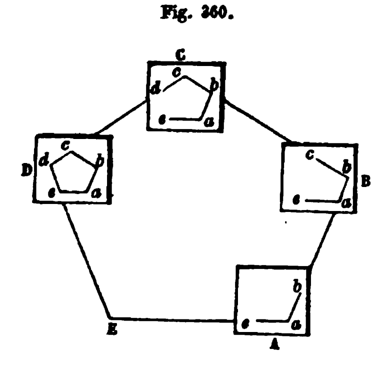
Fig. 359.



LEVERS A LA PLANCHETTE.

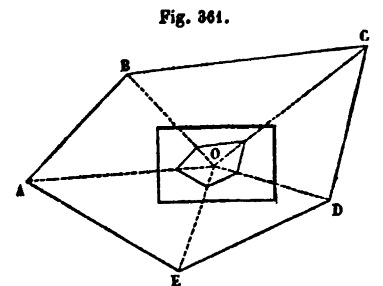
1348. ***Méthode par cheminement*** (1343). Soit ABCDE le contour du terrain ou le polygone topographique à lever (1346). On établit la planchette au sommet A, et on trace l'angle $a = A$ (1332); puis on prend sur ses côtés des longueurs *ae*, *ab* qui représentent AE et AB à une échelle convenable pour que le dessin puisse tenir sur la feuille de papier. Cela fait, on établit la planchette au sommet suivant B, de manière que *b* corresponde à B, et que *ba* soit dans l'alignement BA; puis on trace *bc* dans la direction BC, et l'on prend *bc* proportionnel au côté BC. Une aiguille plantée au point *b* facilite beaucoup le placement et la manœuvre de l'alidade. On met ensuite la planchette en station aux sommets suivants en opérant comme en B, et à l'avant-dernier sommet D le polygone doit se fermer en *e* si l'on a bien opéré.

Fig. 360.



1349. ***Méthode par rayonnement*** (1344). Comme, par ce moyen, on ne met la planchette en station qu'une seule fois, il convient toujours de l'employer quand la surface du terrain à relever est accessible et découverte. La figure montre du reste assez comment on opère.

Fig. 361.



1350. ***Méthode par intersections*** (1345). En prenant pour base un

Fig. 362.

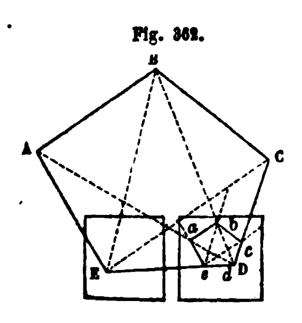
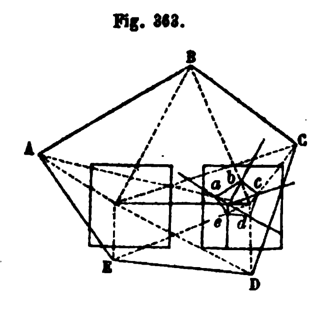


Fig. 363.

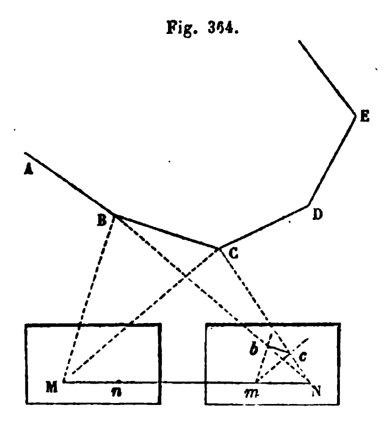


côté de polygone (*fig.* 362), ou une droite tracée dans l'intérieur du po-

lygone (*fig.* 363), et mettant successivement la planchette en station à chaque extrémité de cette base, on peut opérer par intersections.

Dans le cas où le polygone serait inaccessible, mais découvert, en prenant une base MN sur le terrain accessible, duquel on peut apercevoir tous les sommets du polygone, on peut encore opérer par intersections.

Fig. 364.



On fait quelquefois usage de la planchette pour relever les détails d'un plan dont le canevas a été levé au graphomètre ou au cercle (1325, 1334). Pour cela, on emploie la méthode par intersections, en prenant pour base un des côtés du canevas. Cependant c'est avec l'équerre qu'ordinairement on relève ces détails (1340).

PLANS PARCELLAIRES. ÉCHELLES.

1351. *Plan parcellaire.* Pour dresser l'ensemble d'un avant-projet de route, de chemin de fer ou de canal, on se sert ordinairement des levers cadastraux. Ensuite, sur le terrain, on lève la zone qu'il faut acquérir pour établir la voie. Comme chaque parcelle de terrain sera payée d'après les indications de ce plan, on conçoit qu'il doit être fait avec la plus grande exactitude. L'administration prescrit de dresser ces plans parcellaires à l'échelle de 0m,001 pour 1 mètre, et l'on inscrit sur chacun d'eux les noms des communes, et les lettres qui désignent les sections dans lesquelles le cadastre a divisé chacune d'elles.

Chaque parcelle porte en outre :

1° Le numéro d'ordre qui lui a été assigné dans sa section cadastrale;

2° Sa dénomination locale ou vulgaire, s'il y a lieu;

3° Son genre de culture;

4° Le nom du propriétaire inscrit à la matrice cadastrale, ainsi que celui du propriétaire actuel et du fermier, locataire ou usufruitier;

5° Un second numéro d'ordre écrit en rouge et correspondant à celui que porte la même parcelle sur le tableau récapitulatif destiné au règlement des indemnités.

Il est également commode d'indiquer sur le plan la contenance à prendre sur chaque parcelle, et celle qui restera libre après l'exécution des travaux.

On figure avec soin sur les plans parcellaires les murs, fossés, haies et autres clôtures, les chemins d'exploitation, les ruisseaux, et en général tous les objets qui peuvent avoir de l'influence sur la valeur des propriétés ou sur le dommage qui leur sera causé.

A cause de l'enquête publique à laquelle les plans parcellaires sont soumis dans les mairies, on les dresse, et quelquefois même on les scinde par commune.

1352. *Échelle des plans* (1051). Des instructions administratives prescrivent d'adopter exclusivement dans le service des ponts et chaussées, pour les plans proprement dits, des échelles dont le rapport soit simple, c'est-à-dire, selon le cas, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{2000}$, $\frac{1}{2500}$, $\frac{1}{5000}$, $\frac{1}{10000}$.

Lorsque le terrain est vaste, on le divise en plusieurs parties; on fait un plan spécial de chacune de ces parties avec tous ses détails, et, à une échelle plus petite, on dresse un plan d'ensemble pour indiquer la disposition relative des feuilles de détails. Les échelles sont ordinairement :

$\frac{1}{2500}$ pour les plans spéciaux de peu d'étendue, $\frac{1}{5000}$ pour le plan d'ensemble;

$\frac{1}{10000}$ pour les plans spéciaux de moyenne grandeur, et $\frac{1}{20000}$ pour leur ensemble;

$\frac{1}{40000}$ pour les feuilles de détails de la carte de France, et $\frac{1}{80000}$ pour l'ensemble de ces feuilles.

Pour les plans des portions de villes, bourgs ou villages affectées au passage d'une route, comme ils doivent conserver les limites du terrain affecté à la circulation et la trace des alignements adoptés pour les constructions riveraines, on les fait à l'échelle de $\frac{1}{200}$.

Les plans d'ensemble des bâtiments et des travaux d'art en général s'exécutent souvent à l'échelle de $\frac{1}{100}$. Quant aux détails, on les dessine à l'échelle de $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{5}$.

Pour les machines, les ensembles se dessinent assez ordinairement à l'échelle de $\frac{1}{25}$ ou $\frac{1}{20}$, les détails à celles de $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$ ou $\frac{1}{2}$, et les dessins que le chef d'atelier remet à ses ouvriers sont habituellement de grandeur d'exécution.

PROBLÈMES.

1353. *Déterminer l'intersection* I *de deux alignements droits* AB, CD.

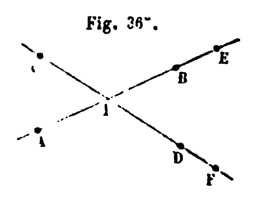


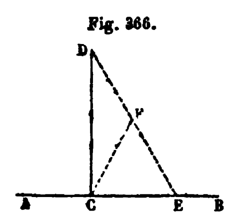
Fig. 36*.

Si l'on opère seul, on plante, s'il n'en existe pas déjà, un jalon E au delà de celui B (1318), et un autre F au delà de celui D; puis, en parcourant AB, on vient, par des observations successives, planter en I un jalon qui soit à la fois dans l'alignement BE et dans celui DF.

Si l'on opère avec un aide, on se place au delà du jalon B ou E, et on fait avancer l'aide dans l'alignement CD, jusqu'à ce que le jalon qu'il tient à la main se trouve à la fois dans les alignements CD et AB, ce qui détermine le point de rencontre I.

1384. *En ne faisant usage que de la chaîne, mener une perpendiculaire à une droite donnée* AB. C étant le point par lequel on veut mener la perpendiculaire, on fixe l'une des extrémités de la chaîne en C et l'autre au point E convenablement éloigné de C; on prend le milieu de la chaîne, et on l'écarte de CE de manière à tendre ses deux moitiés, ce qui forme le triangle isocèle CFE; on amène la moitié FC de la chaîne en FD, dans le prolongement de EF, et l'extrémité D est un second point de la perpendiculaire (974).

Fig. 366.



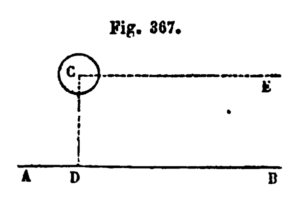
Si l'on avait voulu mener une perpendiculaire par le point extérieur D, on aurait fait les mêmes constructions dans un ordre inverse. Ainsi l'on aurait tendu toute la longueur de la chaîne de D en E; puis replié la moitié FD de F en C, et C eût été le pied de la perpendiculaire. Il est évident que pour cette opération la chaîne peut être remplacée par un simple cordeau, sur lequel on tire le plus uniformément possible en le tendant.

Marquant sur un cordeau trois longueurs consécutives qui soient entre elles comme les nombres 3, 4 5, formant avec ce cordeau un triangle, il sera rectangle, puisque $5^2 = 3^2 + 4^2$ (704). Alors plaçant ce triangle de manière qu'un des côtés de l'angle droit coïncidant avec AB, l'autre passe par le point C ou le point D, ce dernier côté déterminera la perpendiculaire menée à AB par le point C ou par celui extérieur D.

Avec 48 chaînons du décamètre on peut former le triangle rectangle, dont les côtés de l'angle droit comprendront 12 et 16 chaînons, et l'hypoténuse 20.

1385. *Par un point* C *mener une parallèle à un alignement droit* AB. Par le point C on mène une perpendiculaire CD à AB (1324), et la perpendiculaire CE menée à CD est la parallèle demandée.

Fig. 367.



Comme une petite erreur dans le tracé des deux perpendiculaires DC à AC et CE à CD entraîne une erreur considérable dans le parallélisme de CE avec AB, quand cela est possible, il est préférable de mener une seconde perpendiculaire à AB, de prendre sur cette perpendiculaire une longueur égale à CD, et de joindre le point obtenu au point C.

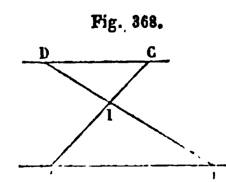


Fig. 368.

Menant AC, joignant un point quelconque I de cette droite au point B, et prenant ID telle qu'on ait

$$ID : IC = IB : IA, \quad \text{d'où} \quad ID = \frac{IC \times IB}{IA},$$

la droite CD est parallèle à AB (663).

1356. *Tracer la bissectrice de l'angle formé par deux alignements droits* AB, AC. L'angle BAC n'étant pas trop grand, on prend AD = AE et AF = AG, on détermine le point d'intersection I de DG avec FE (1353), et AI est la bissectrice demandée.

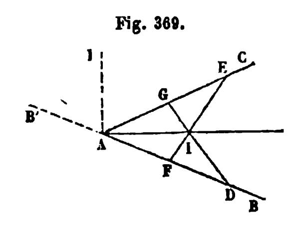


Fig. 369.

Quand l'angle BAC est trop ouvert pour que l'intersection I soit nettement déterminée, on prolonge l'alignement BA, on trace la bissectrice AI' du supplément B'AC, qui est aigu, et la perpendiculaire AI menée par le point A à AI' est la bissectrice demandée.

1357. *Tracer un alignement entre deux points* A *et* B *séparés par un obstacle* M *qui empêche un observateur placé en* A *de voir un jalon en* B (1318). On trace une droite AC qui passe à côté de l'obstacle; du point B on abaisse une perpendiculaire à AC; par des points H, G, F ... on élève des perpendiculaires à AC; on mesure BC et les distances du point A aux points C, D, E ..., et on calcule la longueur HH' à prendre sur une perpendiculaire à l'aide de la proportion

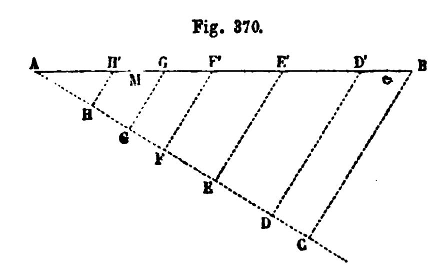


Fig. 370.

$$\frac{HH'}{CB} = \frac{AH}{AC}, \quad \text{d'où} \quad HH' = CB \times \frac{AH}{AC}. \qquad (669)$$

On peut se contenter de déterminer ainsi les points H' et G', aussi rapprochés que possible de l'obstacle M; puis, en opérant comme au n° 1318, déterminer autant de points que l'on veut des alignements AH' et G'B, qui se confondent en un seul AB.

1358. *Prolonger une droite ou un alignement* AH' *au delà d'un obstacle* M *qui arrête la vue*, fig. 370.

1° Comme au numéro précédent, on trace AC; on abaisse de H', aussi voisin que possible de l'obstacle M, une perpendiculaire H'H sur AC, et par les différents points G, F... on élève des perpendiculaires à cette même droite; on mesure HH' et les distances AH, AG...; puis, pour

avoir la longueur GG′ à prendre sur une perpendiculaire, on établit la proportion

$$\frac{GG'}{HH'} = \frac{AG}{AH}, \quad \text{d'où} \quad GG' = HH' \times \frac{AG}{AH}.$$

Après avoir déterminé deux points G′ et B au delà de l'obstacle (*fig.* 370), on peut obtenir tous les autres en plaçant simplement des jalons dans leur alignement; mais la proportion pourra servir de vérification.

2° *Pour prolonger* AB *au delà d'un obstacle qui arrête la vue*, on peut mener à l'équerre respectivement B*b* perpendiculaire à AB, *bc* à B*b*, *c*C=B*b* à *bc* et CD à C*c*; mais comme un petite erreur faite dans le tracé des perpendiculaires conduit à une droite CD qui est loin de se trouver dans le prolongement de AB, il est préférable d'opérer comme au 1°.

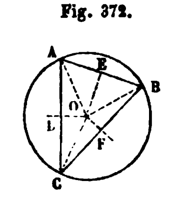
Fig. 371.

Quand on opère sur un terrain étroit, comme dans un rue, on est obligé d'avoir recours à ce dernier moyen; mais alors, pour plus d'exactitude, on mène d'abord *bc* parallèle à AB au moyen de deux perpendiculaires élevées en A et B; puis on mène CD parallèle à *bc* par le même procédé (1355).

1389. *Tracer une circonférence passant par trois points* A, B, C.

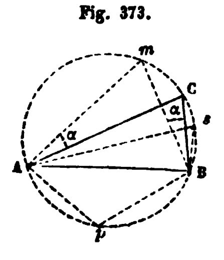
1° *Le terrain étant accessible*, on cherche le centre de la circonférence en élevant des perpendiculaires au milieu de deux des droites qui joignent les points donnés (980, 1324). Puis, suivant des rayonnements autour du point O, portant le rayon OA, on détermine autant de points que l'on veut de la circonférence. Cette courbe peut même être tracée d'une manière continue avec la chaîne ou une corde quand le rayon OA ne dépasse pas 10 ou 20 mètres, et que le terrain n'offre pas de trop grandes aspérités.

Fig. 372.



2° *Lorsque le centre est inaccessible*, ou même quand le rayon dépasse 20^m, remarquant que le point *m* appartenant à la circonférence, on a l'angle *m*=C (654), et par suite *m*AC=*m*BC=α. On établit le graphomètre en A, on dirige son alidade fixe suivant AC, et avec son alidade mobile on fait poser sur le prolongement de A*m* un jalon qui détermine un alignement A*m* faisant avec AC un angle α=20°, par exemple. On établit alors le graphomètre en B, on dirige son alidade fixe suivant BC, et avec l'alidade mobile on fait

Fig. 373.



placer sur le prolongement de Bm un second jalon qui détermine l'alignement Bm faisant avec BC l'angle mBC$=m$AC$=20°$. Un opérateur placé en A et un autre en B font alors poser par un aide un jalon à la rencontre des deux alignements Am et Bm, ce qui donne le point m. On détermine de même autant de points que l'on veut de l'arc CmA. Remarquant que pour un point quelconque s de l'arc CsB on a aussi l'angle sAC$=s$BC, on détermine autant de points que l'on veut de CsB en opérant comme pour l'arc CmA.

Quant à l'arc ApB, on commence par déterminer des stations A et B un de ses points p, en remarquant que l'angle p est le supplément de C (655), et que par suite pAB$+p$BA est le supplément de CAB$+$CBA. Appliquant alors la méthode précédente à chacun des arcs Ap et pB, on détermine autant de points que l'on veut de l'arc ApB.

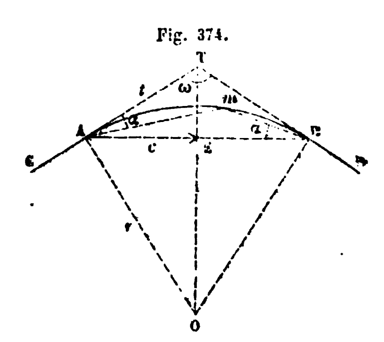
Il est évident que dans la pratique, pendant que le graphomètre sera en station en A, on déterminera à gauche et à droite de AC, et à gauche et à droite de Ap, autant d'alignements qu'il sera nécessaire, et faisant avec AC et avec Ap les angles α de 5°, 10°, 15°... ; ce n'est qu'alors qu'on mettra l'instrument en station en B pour déterminer les alignements faisant avec BC et avec Bp, à gauche et à droite, les mêmes angles α de 5°, 10°, 15°... Chaque couple de deux alignements faisant le même angle α du même côté de AC et BC ou de Ap et Bp déterminera un point tel que m et s.

Il convient de prendre pour stations les extrémités du côté opposé à celui des angles du triangle ABC qui diffère le moins de 90°; les points trouvés sont mieux déterminés.

Deux opérateurs ayant deux graphomètres établis l'un en A et l'autre en B résoudraient le problème précédent beaucoup plus rapidement, puisque, sans faire poser des jalons à l'extérieur de la circonférence, ils feraient directement placer par un aide les jalons qui déterminent des points de cette circonférence.

1360. *Raccordement de deux alignements droits* CA *et* DB. Lorsqu'une route, un chemin de fer ou un canal change de direction, on raccorde ordinairement les deux portions droites par un arc de cercle tangent à ces deux droites. Après avoir mesuré l'angle ω des deux alignements, comme le rayon OA $= r$ est généralement choisi d'après la configuration du sol, la nature et l'importance de la voie, il y a lieu de déterminer les points de contact A et B, c'est-à-dire leur distance t au point de concours T des alignements. Or le triangle rectangle OAT donne

Fig. 374.



$$t = r \operatorname{tang} AOT = \frac{r}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \omega}. \qquad (1109)$$

Si l'on avait donné t, on aurait

$$r = t \operatorname{tang} \frac{1}{2} \omega.$$

Représentant la corde AB par $2c$, les deux triangles rectangles semblables OAE et OTA (675) donnent

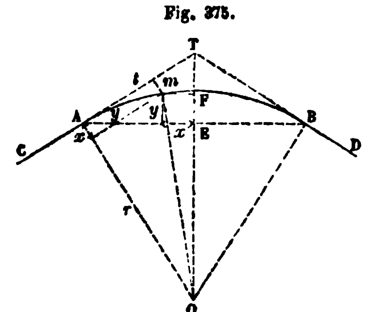
$$c : t = r : \mathrm{OT} \text{ ou } \sqrt{r^2 + t^2}, \quad \text{d'où} \quad c = \frac{rt}{\sqrt{r^2 + t^2}}.$$

Pour tracer l'arc AB, remarquant que, pour un point quelconque m de cet arc, les deux angles α faits l'un par Am avec la tangente AT, et l'autre par Bm avec la corde AB sont égaux (654), il en résulte que l'on peut opérer en suivant la même marche qu'au 2° du numéro précédent, soit avec un, soit avec deux graphomètres.

On peut aussi déterminer les points de l'arc AB *à l'aide de leurs coordonnées.*

1° En prenant AO pour axe des x et AT pour axe des y, on a pour un point quelconque m (676)

Fig. 375.



$$y^2 = x(2r - x),$$

d'où

$$y = \sqrt{x(2r - x)}.$$

Donnant à x différentes valeurs, on calculera à l'aide de cette formule les valeurs correspondantes de y, et l'on déterminera ainsi autant de points qu'on voudra de la courbe.

2° En prenant la corde AB pour axe des x et OT pour axe des y, on a, pour un point quelconque m,

$$y = \mathrm{EF} = \mathrm{OF} - \mathrm{OE}.$$

Le triangle rectangle OFm donnant

$$\mathrm{OF} = \sqrt{r^2 - x^2},$$

et celui OAT (675),

$$r^2 = \mathrm{OE} \times \mathrm{OT}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{OE} = \frac{r^2}{\mathrm{OT}} = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + t^2}},$$

on a donc

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} - \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + t^2}}.$$

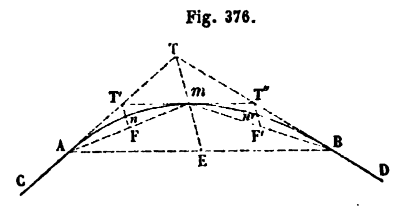
Deux valeurs égales et de signes contraires de x donnent la même valeur pour y; ce qui devait être, puisque la courbe est symétrique par

rapport à l'axe des y. Ainsi il suffira de faire seulement pour un côté de la courbe les calculs qu'exige la formule précédente. On a, du reste, dressé des tables spéciales dont l'emploi abrége et facilite notablement les opérations.

La longueur de l'arc de raccordement se calcule comme il a été indiqué au n° 733.

Les courbures uniformes étant les plus favorables à l'action des moteurs et à la facilité de la circulation, on doit toujours donner la préférence aux raccordements par un arc de cercle; mais la présence d'obstacles, tels que des accidents du sol, un cours d'eau, des constructions, ne permettent pas de faire les tangentes TA, TB égales entre elles, et par suite d'employer un arc de cercle. On a alors recours à un arc de parabole, que l'on trace comme l'indique la *fig.* 316, ou par le procédé suivant, basé sur cette propriété de la parabole : *le point* m, *milieu de la droite qui joint le point de concours* T des tangentes au milieu E de la corde AB des contacts, appartient à la courbe; de plus, menant par m une parallèle T′T″ à AB, cette droite est tangente à la parabole. Il résulte qu'en répétant pour les points T′ et T″ la construction qui a donné le point m, on obtient les points n et n' appartenant aussi à la parabole, et l'on conçoit qu'en continuant ainsi de suite on obtiendra autant de points que l'on voudra de cette courbe. Il est à remarquer que toutes les droites TE, T′F... sont parallèles entre elles.

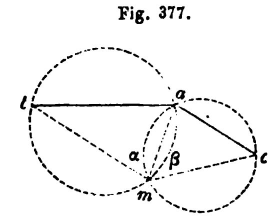
Fig. 376.



Au lieu d'employer un arc de parabole, on peut avoir recours à deux arcs de cercle tangents entre eux, et tangents l'un en A à CA et l'autre en B à DB; mais alors le problème est indéterminé.

1361. *Trois points* A, B, C, *situés sur un terrain uni, étant rapportés en* a, b, c *sur une carte, déterminer sur cette carte la position* m *du point* M, *d'où les distances* AB *et* AC *ont été vues sous des angles* α *et* β *qu'on a mesurés.* Sur ab on décrit un segment capable de l'angle α, et sur ac on en décrit un autre capable de l'angle β (985); les circonférences de ces segments se coupent au point cherché m.

Fig. 377.



Le moyen de déterminer la position d'un point par rapport à trois autres peut être employé dans le lever des plans et la construction des cartes. C'est ce que fait un ingénieur hydrographe en construisant la carte des écueils ou des fonds d'une côte; il détermine la position d'un point M où il pratique un sondage, par

rapport à trois points A, B, C de la côte, en mesurant les angles α et β sous lesquels il voit de ce point les distances AB et AC.

1362. *Déterminer la distance* AB *de deux points séparés par un espace inaccessible.*

Fig. 378.

1° Si d'une extrémité de la droite AB on peut voir un jalon planté à l'autre extrémité, aux points A et B on élève des perpendiculaires à AB (1324), on prend

$$Aa = Bb,$$

et l'on a

$$ab = AB.$$

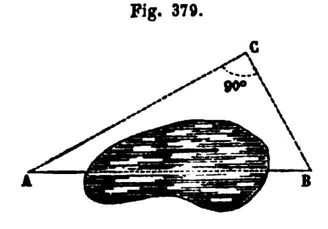


Fig. 379.

2° Si un obstacle empêchait de voir un jalon en B quand on est au point A, on tracerait un alignement AC ; on mènerait par le point B une perpendiculaire BC à cet alignement, et, mesurant AC et BC, on aurait (704)

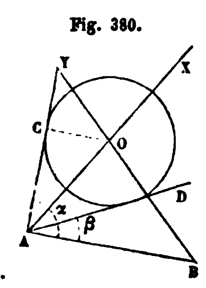
$$AB = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2}.$$

1363. *Trouver le rayon d'une enceinte circulaire dont l'intérieur est inaccessible, d'une tour ou d'un bassin, par exemple.*

1° On circonscrit à la tour un triangle dont on mesure les trois côtés ; on construit sur le papier, à une échelle convenable, un triangle semblable, et le rayon du cercle inscrit dans ce triangle est, à l'échelle choisie, le rayon de la tour (981).

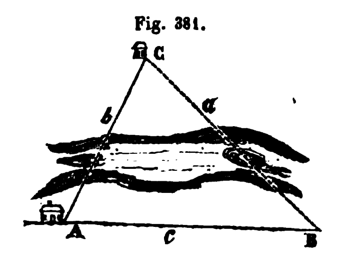
2° On trace une droite ab à une certaine distance de la tour (*fig.* 378) ; à cette droite, on élève des perpendiculaires aA et bB qui soient tangentes au pied de la tour (1324), et la distance ab de ces perpendiculaires est le diamètre de la tour.

3° On trace et mesure une base AB, et l'on détermine les angles α et β que fait AB avec les tangentes AC, AD à la tour. L'angle de ces tangentes est égal à $\alpha - \beta$, et O étant le centre de la tour, on a l'angle $OAB = \beta + \frac{\alpha - \beta}{2}$. On peut de même déterminer l'angle OBA. Dans le triangle ABO, le côté AB étant connu ainsi que les angles adjacents, on peut le construire à une échelle convenable sur le papier ; on peut aussi mener AC, puisque l'angle CAO est connu ; alors abaissant du sommet O une perpendiculaire OC sur AC, elle est, à l'échelle choisie, le rayon de la tour.

Fig. 380.


Remarque. Les constructions des 2° et 3° sont applicables lors même qu'on ne peut approcher du pied de la tour.

Fig. 381.



1364. *Trouver la distance* AC *du point* A *au point inaccessible, mais visible,* C (1135).

1° Après avoir mesuré la base AB, ainsi que les angles A et B, on construit sur le papier, à une échelle convenable, le triangle ABC, ce qui fournit le côté AC à l'échelle choisie, et par suite sa longueur réelle.

Fig. 382.

2° Lorsque le terrain accessible le permet, on trace deux alignements faisant avec la base AB les angles

$$BAC' = BAC \quad \text{et} \quad ABC' = ABC,$$

et C′ étant le point de rencontre de ces alignements, on a

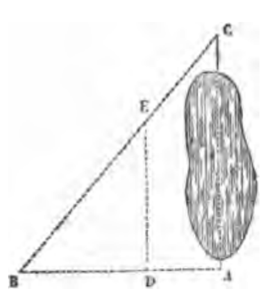
$$AC' = AC.$$

Fig. 383.

3° On peut encore résoudre le problème en menant la base AB perpendiculaire à AC (1324), en prenant AD = DB, et en déterminant le point de rencontre de l'alignement CD avec la perpendiculaire BC′ à AB. On a BC′ = AC (2°, 620).

4° Ayant mené la base AB perpendiculaire à AC (*fig.* 384), en un point D on élève une perpendiculaire à AB, et on la prolonge jusqu'à l'alignement BC; on mesure DE, BD et BA, et les deux triangles semblables BDE, BAC donnent

Fig. 384.



$$\frac{BD}{BA} = \frac{DE}{AC}, \quad \text{d'où} \quad AC = \frac{BA \times DE}{BD}.$$

Cette manière d'opérer peut être employée dans le cas du n° 1362.

Remarque. Par les méthodes des 2°, 3° et 4° on trouve la distance cherchée sur le terrain, sans faire aucun rapport sur le papier.

1365. *Résolutions des problèmes des nos* 1134 et 1136. Après avoir fait sur le terrain les opérations indiquées nos 1134 et 1136, au lieu d'appliquer les formules trigonométriques, on peut obtenir la hauteur cherchée en rapportant sur le papier, à une échelle convenable, la figure déterminée sur le terrain.

1366. *Trouver la distance* CC′ *de deux points inaccessibles.*

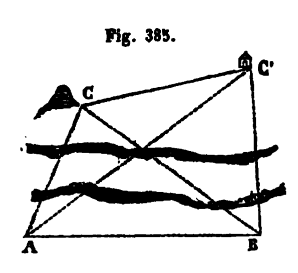


Fig. 385.

1° Après avoir fait sur le terrain les constructions indiquées au n° 1137, on a toutes les données nécessaires pour rapporter sur le papier la figure ABC′C, et par suite déterminer CC′ sans appliquer les formules trigonométriques.

2° On peut, en opérant comme au 2° du n° 1364, construire au-dessous de AB chacun des triangles ABC, ABC′, et la distance des sommets de ces nouveaux triangles est égale à CC′, et peut se mesurer directement sur le terrain.

3° On abaisse des points C et C′ des perpendiculaires sur une base xy; par le milieu D de AB on trace les alignements CD, C′D; on détermine leurs points de rencontre avec les prolongements des perpendiculaires AC et BC′, et la distance $cc' = CC'$, et peut se mesurer sur le terrain. Les deux triangles ADC, BDc' étant égaux (2°, 620), on a $DC = Dc'$. De même $DC' = Dc$; donc CC′$c'c$ est un parallélogramme (624); et, par suite, cc' est égal et parallèle à CC′ (605).

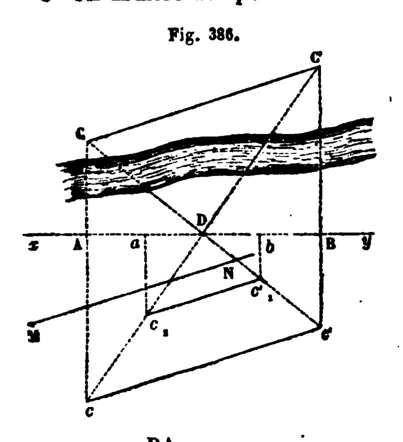


Fig. 386.

Si le terrain était trop restreint pour recevoir les constructions précédentes, on prendrait $Da = Db = \frac{DA}{2}$, et en terminant sur ces données la construction précédente on arriverait à $c_1c'_1 = \frac{CC'}{2}$.

1367. *Mener par un point donné* M *une parallèle* MN *à une droite inaccessible* CC′ (*fig.* 386). En opérant comme au 3° du numéro précédent, on mène cc' parallèle à CC′; puis menant par M une parallèle à cc' (1355), elle est aussi parallèle à CC′.

ARPENTAGE.

1368. Tous les végétaux croissant verticalement, la surface utile, c'est-à-dire productive, d'un terrain est la projection sur un plan horizontal de sa surface proprement dite. Le but que l'on se propose en arpentage (1306) est donc de déterminer l'aire de cette projection, c'est-à-dire l'aire de la surface prise par *cutellation* (1305).

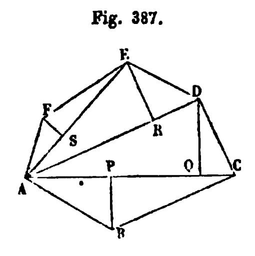
Si l'on a levé le plan du terrain, la géométrie et la trigonométrie fournissent des règles pour calculer l'aire de la figure que forme le plan, d'après les cotes qui y sont inscrites, ou en prenant les longueurs et les angles nécessaires à l'échelle et au rapporteur.

Quand on n'a pas le plan du terrain, on peut le lever d'abord, puis évaluer l'aire; mais on se contente le plus souvent d'un simple croquis, sur lequel on inscrit, à mesure qu'on les obtient sur le terrain, les longueurs nécessaires à l'application des règles de la géométrie.

Les arpenteurs ne se servent habituellement que de leur équerre, de la chaîne et de jalons (1317, 1319, 1322).

1369. *Soit à déterminer la surface d'un terrain* ABCDEF *dont le contour est polygonal et l'intérieur accessible.*

Fig. 387.



1re *méthode.* On décompose le polygone en triangles, et mesurant les côtés de ces triangles, on en détermine l'aire par la formule 3° du n° 1132.

2° *méthode.* Après avoir mené et mesuré les diagonales AC, AD, AE, on les considère comme étant les bases des triangles qui composent la surface du terrain; avec l'équerre d'arpenteur on mène les hauteurs BP, DQ... de ces triangles; on mesure ces hauteurs, et l'on applique la règle du n° 692.

3° *méthode.* On mène une diagonale, la plus grande ordinairement (*fig.* 356), à laquelle on mène avec l'équerre d'arpenteur des perpendiculaires par les sommets. Le polygone se trouve ainsi décomposé en triangles et en trapèzes rectangles faciles à évaluer (692, 697, 1302).

Au lieu d'une diagonale, on peut prendre une transversale quelconque du polygone. La forme du terrain indique ordinairement la direction qu'il convient de donner à cette transversale pour rendre les opérations faciles; le plus souvent on la trace dans la direction de la plus grande dimension, et de manière à diviser le terrain en deux parties à peu près équivalentes.

On peut encore remplacer la transversale par une droite extérieure au polygone. L'aire est alors égale à la différence de deux sommes de trapèzes (*fig.* 355)

1370. *Lorsque le terrain est accessible à l'intérieur et limité par une courbe quelconque*, on applique la 3° méthode du numéro précédent. Ainsi l'on trace une transversale aussi grande que possible, et on lui mène des perpendiculaires assez rapprochées pour qu'on puisse négliger la courbure des parties qu'elles interceptent sur le contour. Il convient que les perpendiculaires divisent la transversale en un nombre pair de parties égales, afin de pouvoir appliquer les formules des n°s 1303 et 1304.

Si le contour du terrain n'est courbe que dans une partie, en joignant par une droite les extrémités de la courbe, le terrain se trouve divisé en deux portions, dont l'une se mesure par une des méthodes du numéro précédent, et l'autre comme ci-dessus.

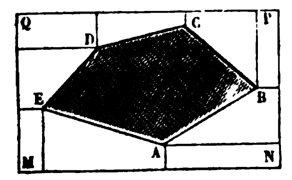
Ordinairement, pour abréger les opérations, on emploie la méthode dite *par compensation*, qui consiste à substituer au terrain à mesurer un terrain polygonal qui l'excède en de certaines parties et y rentre dans d'autres, mais de manière que les parties ajoutées et retranchées se compensent; c'est ce qu'indique la figure 388, dans laquelle les parcelles internes et externes désignées par le même numéro sont approximativement équivalentes.

Fig. 388.

On conçoit, du reste, qu'on pourrait, si l'on voulait agir en toute rigueur, mesurer d'abord le polygone auxiliaire, puis, à l'aide des formules des nos 1303 et 1304, les parties ajoutées et retranchées. Lorsqu'on opère ainsi, on prend ordinairement un polygone auxiliaire ayant ses sommets sur le contour du terrain.

1371. *Quand le terrain* ABCDE *est inacccessible à l'intérieur;* s'il est par exemple couvert de constructions, d'arbres ou d'eau, on trace en dehors un polygone MNPQ dont l'aire est facile à mesurer, tel qu'un rectangle ou un trapèze rectangle. On évalue, en opérant comme aux nos 1369 et 1370, la surface comprise entre le périmètre de ce polygone et celui du terrain, et retranchant cette surface de celle du polygone, on a l'aire cherchée.

Fig. 389.



Si le terrain était limité par une courbe quelconque, on opérerait d'une manière analogue, en appliquant les formules des nos 1303 et 1304.

Dans le cas où le terrain serait inaccessible, mais découvert, s'il était, par exemple, séparé du terrain où l'on se trouve par une rivière, on déterminerait les coordonnées d'autant de points qu'il serait nécessaire de son contour par rapport à deux axes rectangulaires Ox, Oy tracées sur le terrain accessible (*fig.* 357), et à l'aide de ces coordonnées on calculerait l'aire du terrain par la 3e Méthode du no 1369, pour le cas où l'on a recours à une droite tracée hors du polygone.

PROBLÈMES.

1372. Soit à résoudre le problème le plus habituel de l'arpententage, qui consiste à prendre dans une pièce de terre une partie d'une surface déterminée.

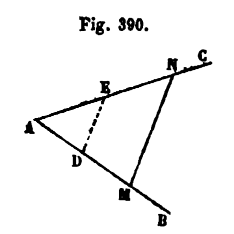


Fig. 390.

1° *Soit à prendre dans la pointe* A *une surface déterminée* S *qui soit limitée par une droite parallèle à une droite donnée.* Sur AB ou AC on mesure une certaine longueur AD; par le point D on mène une parallèle DE à la droite donnée (1355); on détermine l'aire s du triangle ADE; on calcule le quatrième terme de la proportion

$$s : S = \overline{AD}^2 : x^2, \quad \text{d'où} \quad x = \sqrt{\overline{AD}^2 \times \frac{S}{s}};$$

on prend AM $= x$, et menant MN parallèle à DE, le triangle AMN satisfait à la question. En effet, les deux triangles ADE et AMN étant semblables, S′ étant l'aire du second, on a (700)

$$s : S' = \overline{AD}^2 : \overline{AM}^2,$$

et les deux proportions précédentes ayant trois termes égaux, on a bien S = S′.

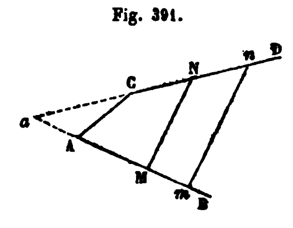


Fig. 391.

2° Dans le cas où la première pointe A du terrain serait insuffisante, on déterminerait l'aire s du triangle aAC, et le problème serait ramené, comme au 1°, à prendre dans la pointe a une partie aMN dont l'aire fût égale à S + s.

3° Dans le cas où l'on aurait à prendre un trapèze MNnm à partir de MN qui peut être un côté du terrain, on mesurerait aM et l'aire du triangle aMN, et l'on calculerait am en opérant comme on l'a fait au 1° pour AM.

Remarque. Les trois problèmes précédents montrent assez comment l'on opérera dans un cas quelconque, et les deux derniers font voir qu'en général les problèmes de cette espèce ne sont que la réunion de plusieurs semblables au 1er, auquel on les ramène toujours.

1373. *Pour partager un triangle en un certain nombre de parties équivalentes par des droites allant du sommet à la base,* on divise la base en un même nombre de parties égales, et on joint le sommet aux points de division (692).

Par la même marche, on peut diviser le triangle en parties qui soient proportionnelles à des nombres donnés (994).

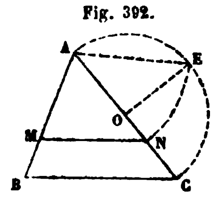
1374. En divisant les deux bases d'un trapèze en un même nombre de parties égales, ou qui soient proportionnelles à des nombres donnés, et joignant les points de division, le trapèze se trouve divisé en parties équivalentes ou en parties proportionnelles aux nombres donnés (697, 994).

Pour diviser de même un rectangle ou un parallélogramme, on divise la base en parties égales ou en parties proportionnelles aux nom-

bres donnés, et par les points de division on mène des parallèles aux côtés adjacents à la base (690, 695, 994).

1378. *Diviser un triangle* ABC *en parties équivalentes, ou en parties proportionnelles à des nombres donnés, par des droites parallèles à la base* BC. Ce problème peut être résolu comme celui 1° du n° 1372.

Fig. 392.



Pour diviser de même un trapèze, on opérerait comme au 2° du n° 1372.

MN étant la droite qui divise le triangle en deux parties équivalentes, on a (700)

$$\frac{S}{2} : S = \overline{AN}^2 : \overline{AC}^2, \quad \text{d'où} \quad AN = \sqrt{\frac{\overline{AC}^2}{2}}.$$

On peut déterminer AN *géométriquement*. Sur AC comme diamètre on décrit une demi-circonférence; au centre O on élève une perpendiculaire; on joint AE, et prenant AN = AE, le point N appartient à la parallèle MN. En effet, on a (676)

$$AC : AE = AE : AO \quad \text{ou} \quad AC : AN = AN : \frac{AC}{2},$$

d'où

$$AN = \sqrt{\frac{\overline{AC}^2}{2}}.$$

Si AMN était le tiers du triangle ABC, on aurait

$$\frac{S}{3} : S = \overline{AN}^2 : \overline{AC}^2, \quad \text{d'où} \quad AN = \sqrt{\frac{\overline{AC}^2}{3}}.$$

Si AMN était les $\frac{2}{3}$ de ABC, on aurait

$$\frac{2}{3} S : S = \overline{AN}^2 : \overline{AC}^2, \quad \text{d'où} \quad AN = \sqrt{\frac{2}{3}\overline{AC}^2}.$$

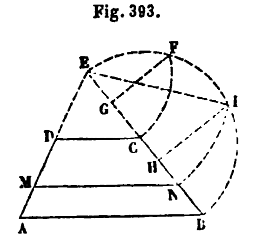
On opérerait de même pour un rapport quelconque, c'est-à-dire pour résoudre d'une manière générale le problème énoncé.

Ce problème général se résout aussi géométriquement. Ainsi l'on divise AC en parties égales ou en parties qui soient proportionnelles à des nombres donnés (994); par les points de division on élève des perpendiculaires à AC; on joint le point A aux intersections de ces perpendiculaires avec la demi-circonférence AEC; on reporte les cordes qui en résultent sur AC à partir du point A, et les parallèles à BC menées par les points obtenus divisent le triangle ABC en parties qui sont entre elles comme les parties de AC. Ainsi, AC ayant été divisé en deux parties égales (*fig.* 392), le triangle se trouve divisé par MN en deux parties équivalentes; si AC a été partagé en trois

parties égales, le triangle l'est également en trois parties équivalentes, etc.

1376. *Diviser un trapèze* ABCD *en parties équivalentes, ou en parties proportionnelles à des nombres donnés, par des parallèles aux bases.*

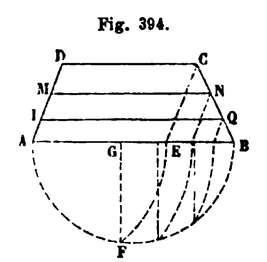
Fig. 393.



On prolonge les côtés non parallèles AD, BC jusqu'à leur rencontre en E; sur BE comme diamètre on décrit une demi-circonférence; du point E comme centre, avec EC pour rayon, on décrit un arc de cercle CF, et du point F on abaisse FG perpendiculaire à BE. Cela fait, divisant BG en parties égales, ou en parties proportionnelles aux nombres donnés (994), et opérant pour les points de division obtenus comme on l'a fait au numéro précédent pour les points de division de AC de la figure 392, le problème est résolu. Ainsi pour diviser le trapèze en deux parties équivalentes, par exemple, on divise BG en deux parties égales; au point H, milieu de BG, on élève la perpendiculaire HI à BE; du point E comme centre, avec EI pour rayon, on décrit l'arc de cercle IN, et la parallèle MN aux bases divise le trapèze ABCD en deux parties équivalentes.

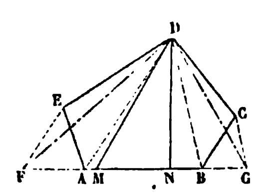
Si le point de concours des deux côtés AD et BC est très-éloigné, on opère sur la grande base AB comme on l'a fait sur BE de la figure 393. Ainsi sur AB comme diamètre on décrit une demi-circonférence, on mène CE parallèle à AD, du point A comme centre, on décrit l'arc EF, et l'on abaisse du point F la perpendiculaire FG à AB. Cela fait, divisant GB en parties qui soient entre elles dans les rapports donnés, et opérant pour les points de division obtenus comme on l'a fait pour ceux de GB dans la figure 393, le trapèze se trouve partagé de la manière demandée. Dans la figure 394, le trapèze est partagé en trois parties équivalentes par les parallèles MN, PQ aux bases.

Fig. 394.



1377. *Partager un polygone* ABCDE *en parties équivalentes, ou en parties proportionnelles à des nombres donnés, par des droites partant d'un sommet* D.

Fig. 395.

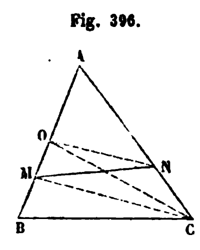


On détermine le triangle DFG équivalent au polygone donné (1021); on divise la base FG de ce triangle en parties égales ou en parties proportionnelles aux nombres donnés, et joignant le sommet D aux points de division obtenus, le problème est résolu. Ainsi divisant FG en trois parties égales, par exemple, aux points M et N, les droites DM, DN partagent le polygone donné en trois parties équivalentes.

Il est à remarquer que le problème n'est entièrement possible par cette marche qu'autant que tous les points de division M, N se trouvent sur un même côté AB du polygone proposé.

1378. *Diviser le triangle* ABC *en deux parties équivalentes par une droite partant d'un point* M *pris sur l'un des côtés du triangle.* M est, par exemple, un puits qui doit rester commun aux deux parties d'un terrain. Par le point O, milieu de AB, on mène une parallèle ON à MC, et MN est la droite demandée. En effet, menant CO, le triangle CAO est moitié du triangle proposé (693), et comme de plus il est équivalent au triangle AMN, comme étant composé de la même partie AON et du triangle CNO équivalent à celui MNO comme ayant même base NO et même hauteur, il en résulte bien que AMN est moitié de ABC, et par suite équivalent au quadrilatère BCNM.

Fig. 396.



Remarquant que les parallèles NO, CM donnent

$$\frac{AN}{AC} = \frac{AO}{AM}, \quad \text{d'où} \quad AN = AC \times \frac{AO}{AM},$$

on voit que sur le terrain, sans mener aucune parallèle, il suffit de prendre AN égale à la longueur ainsi calculée et de joindre MN.

Pour diviser le triangle ABC *en deux parties qui soient entre elles dans un rapport donné* $m:n$, on diviserait AB en deux parties telles que l'on ait

$$\frac{AO}{OB} = \frac{m}{n};$$

par le point O on mènerait ON parallèle à MC, et MN répondrait à la question.

En effet, les triangles ACO et BCO ayant même hauteur, ils sont entre eux dans le rapport $\frac{AO}{OB}$ ou $\frac{m}{n}$, et le triangle ACO étant encore équivalent à celui AMN, le triangle AMN est bien au quadrilatère BCNM dans le rapport $\frac{m}{n}$.

Pour éviter de mener la parallèle ON, de

$$\frac{AO}{OB} = \frac{m}{n}, \quad \text{ou} \quad \frac{AO}{AO + OB} = \frac{m}{m+n}, \quad \text{on tire} \quad AO = AB \times \frac{m}{m+n}.$$

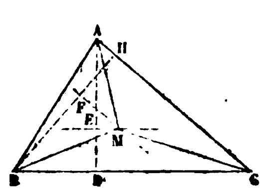
On a ensuite

$$AN = AC \times \frac{AO}{AM} = \frac{AC \times AB \times m}{AM(m+n)}.$$

On détermine alors le point N sur le terrain, et l'on mène MN.

1379. *Diviser un triangle en trois triangles équivalents ayant un sommet commun* M, *et pour base les côtés du triangle.*

Fig. 397.



On mène AD perpendiculaire à BC, on prend $DE = \frac{AD}{3}$, et par le point E menant une parallèle à BC, elle contient le point M, puisque la hauteur du triangle MBC doit être le tiers de celle du triangle ABC. Faisant la même construction pour le côté AC, la parallèle menée par le point F rencontre la parallèle à BC au point M.

On peut étendre cette construction à la division du triangle en trois autres MBC, MAC, MAB dont les surfaces soient proportionnelles aux nombres m, n, p; seulement on a

$$DE = AD \times \frac{m}{m+n+p}, \quad \text{et} \quad HF = BH \times \frac{n}{m+n+p}.$$

NIVELLEMENT.

PRINCIPES.

1380. *But du nivellement. Plan ou surface de comparaison. Cote. Altitude. Repère.* Nous avons vu comment on obtient la projection d'un terrain sur un plan horizontal (1337 et suivants); mais si cette projection est suffisante pour l'arpentage (1368), il n'en est pas de même lorsqu'il s'agit d'établir des travaux de construction, tels par exemple que des conduites d'eau, des canaux, des routes, des chemins de fer, etc.; il est alors nécessaire d'avoir les distances des divers points de la surface du sol à traverser à ce même plan horizontal, ou mieux à une surface sans aspérités, concentrique avec la surface de la terre. Le *but du nivellement* est de déterminer ces distances, ou les différences entre ces distances.

La surface concentrique à laquelle on rapporte les différents points nivelés est dite *plan* ou mieux *surface de niveau* ou *de comparaison*. La distance d'un point à la surface de niveau est la *cote* de ce point.

La surface de comparaison se prend de manière qu'elle laisse tous les points à niveler d'un même côté, afin que toutes les cotes aient le même signe. Le plus habituellement on prend la surface de comparaison au-dessous du point à niveler le plus bas; mais on peut la prendre au-dessus du point à niveler qui est le plus élevé.

Quand on veut que le nivellement d'un terrain serve à constater les variations de niveau que la surface du sol pourra subir par la suite, on rapporte les cotes des points nivelés à un plan de comparaison pris à

une distance connue d'un point parfaitement fixe ou *repère*, tel qu'un point d'un monument ou d'un travail d'art solide et immuable. On se donne arbitrairement la cote du repère; par un nivellement préliminaire, en plaçant d'abord la mire sur le repère, on détermine la cote d'un point à niveler, et ensuite on procède au nivellement comme il va être indiqué. Le registre du nivellement doit contenir la désignation et la cote du repère, et le nivellement préliminaire.

A défaut de monument public ou de travail d'art, on prend pour repère un seuil de porte, un appui de croisée, etc.; mais comme ces repères peuvent ne pas avoir une fixité suffisante, on les rattache, autant que possible, à des *contre-repères* déterminés par un signe conventionnel fait sur un rocher, un arbre, etc.

A Paris, dans presque toutes les rues, la municipalité a fait fixer contre des murs des plaques en fonte aux armes de la ville, et sur lesquelles on lit :

1° A gauche, la hauteur du repère au-dessus du niveau moyen de la mer. La hauteur d'un point au-dessus du niveau moyen de la mer est l'*altitude* de ce point;

2° A droite, la hauteur du repère au-dessus de l'*étiage*, c'est-à-dire du niveau des plus basses eaux, au pont de la Tournelle;

3° A la partie inférieure, la distance du repère au-dessous du plan général de comparaison adopté dans le nivellement de Paris. Ce plan ayant été choisi à 50 mètres au-dessus de la surface de l'eau dans le bassin de la Villette, alimenté par le canal de l'Ourcq, par rapport à ce plan les cotes sont comptées de haut en bas.

La face latérale supérieure de la plaque qui porte ces inscriptions forme le repère proprement dit; on l'a élargie à l'aide d'une saillie venue à la plaque, afin qu'on puisse y reposer facilement la semelle de la mire. On a gravé *repère* en toutes lettres sur cette face latérale supérieure.

Un repère situé dans l'île Saint-Louis porte les inscriptions :

36m,24 au-dessus du niveau moyen de la mer;

9m,99 au-dessus de l'étiage du pont de la Tournelle;

65m,25 nivellement de Paris.

Ainsi la cote du niveau moyen de la mer au-dessous du plan de comparaison du nivellement de Paris est 36m,24 + 65m,25 = 101m,49, et celle du niveau de l'étiage au pont de la Tournelle, 9m,99 + 65m,25 = 75m,24. Par suite, le niveau de l'eau dans le bassin de la Villette est à l'altitude 51m,49, et celui de l'étiage au pont de la Tournelle à 26m,25; de plus le niveau de l'eau dans le bassin de la Villette est à 25m,24 au-dessus de celui de l'étiage au pont de la Tournelle, ou à 25m,24 — 9m,99 = 15m,25 au-dessus du repère de l'île Saint-Louis.

1381. Les instruments dont on fait usage pour niveler sont le *niveau* et la *mire*. La mire est une règle graduée que l'on fait successivement poser verticalement, par un aide appelé *porte-mire*, sur les points à niveler. Les niveaux permettent de diriger dans l'espace, vers la mire, des rayons visuels horizontaux.

1382. *Soit à déterminer les cotes de deux points* A *et* B *de la surface du sol.* On établit le niveau en un point S, situé à peu près à la même distance horizontale de A et B; puis, faisant placer la mire en A, on dirige un rayon horizontal qui

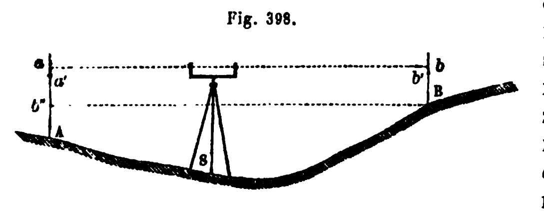


Fig. 398.

détermine le point a, et par suite la distance Aa, qu'on lit sur la mire. Ensuite, faisant placer la mire au point B, on détermine la distance Bb.

Supposant $Aa = 1^m,347$ et $Bb = 0^m,754$, la différence de niveau des points A et B est $1^m,347 - 0^m,754 = 0^m,593$, et si le plan de comparaison a été pris à 100 mètres au-dessous du point A, la cote de ce point est $100^m,000$ et celle du point B, $100^m,000 + 0^m,593 = 100^m,593$.

1383. *Nivellement simple.* Il peut arriver que d'une même station du niveau on puisse niveler un certain nombre de points A, B, C, D... Dans ce cas, au fur et à mesure qu'on obtient les résultats, on les inscrit sur le cadre suivant, préparé à l'avance, et qui constitue un *carnet* de nivellement.

POINTS nivelés.	DISTANCES horizontales consécutives.	COUPS de niveau.	DIFFÉRENCES		COTES.	OBSERVATIONS.
			positives.	négatives.		
1	2	3	4	5	6	7
	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt	
A (*)	»	1,347	»	»	100,000	(*) Position du point, nature du sol, etc.
B	125,54	0,754	0,593	»	100,593	
C	140,67	1,042	»	0,288	100,305	
D	75,27	0,621	0,421	»	100,726	

Dans la première colonne, on désigne les points nivelés. Ces points sont ordinairement désignés par des numéros d'ordre, et, sur le sol, on les fixe par des piquets.

La deuxième colonne contient la distance horizontale de chaque point nivelé au précédent.

Dans la troisième colonne, on inscrit les hauteurs lues sur la mire.

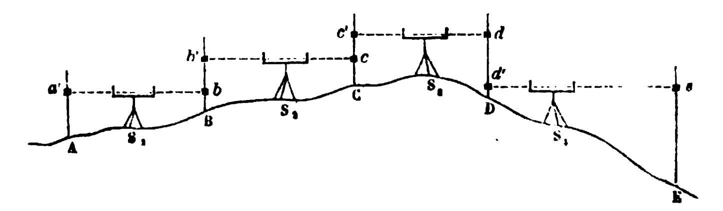
Une différence entre un nombre de la troisième colonne et celui immédiatement inférieur s'écrit dans la quatrième ou cinquième colonne, suivant que le premier nombre est plus grand ou plus petit que le second.

Une différence positive, ajoutée à la cote du point précédent, donne la cote du point considéré. On obtient ce même résultat en retranchant la différence, si elle est négative.

1384. *Nivellement composé.* Lorsqu'on ne peut déterminer les cotes de deux points A et E sans changer le niveau de place, par un pre-

mier nivellement simple, de la cote du point A on passe à celle d'un point intermédiaire B (1383); puis, par un second nivellement simple,

Fig. 399.



on passe à celle d'un autre point intermédiaire C, et l'on continue ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait déterminé la cote du point extrême E.

Dans un nivellement composé, on appelle *coups arrière* les hauteurs A*a'*, B*b'*, C*c'* ... indiquées par la mire quand on vise du côté du point de départ A, et *coups avant* les hauteurs B*b*, C*c* ... indiquées par la mire lorsqu'on vise en avant.

Au fur et à mesure qu'on obtient les résultats, on les inscrit sur le carnet de nivellement, dont la disposition ne diffère pas sensiblement de celle du numéro précédent.

POINTS nivelés.	DISTANCES horizontales des points.	COUPS arrière.	COUPS avant.	DIFFÉRENCES positives.	DIFFÉRENCES négatives.	COTES.	OBSERVATIONS.
1	2	3	4	5	6	7	8
	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	
A (*)	»	1,244	»	»	»	100	(*) Position du point, nature du sol, propriétaire, etc.
B	130,65	1,546	0,638	0,606	»	100,606	
C	145,32	1,627	0,726	0,820	»	101,426	
D	135,46	0,234	1,698	»	0,071	101,355	*Vérification :*
E	194,63	»	2,406	»	2,172	99,183	5,468— 4,651=
Totaux.	606,06	4,651	5,468	1,426	2,243		2,243— 1,426= 100—99,183= 0,817

Les différences entre les nombres de la troisième colonne et ceux de la quatrième qui se trouvent à la ligne immédiatement inférieure s'écrivent dans la cinquième ou dans la sixième colonne, selon que les premiers nombres sont plus grands ou plus petits que les seconds, c'est-à-dire selon que la surface du sol va en montant ou en descendant.

Quant aux nombres de la septième colonne, ayant pris la cote 100 mètres pour le point de départ A (1382), pour avoir la cote des points successifs B, C, D ..., à la cote 100 mètres et successivement à la dernière cote obtenue on ajoute la différence correspondante de la cinquième colonne, ou on en retranche la différence correspondante de la sixième colonne.

Comme vérification des calculs, la différence de hauteur 100 — 99,183 = 0m,817, des deux points extrêmes A et E, doit être égale à la différence entre la somme des coups avant et celle des coups arrière, ou encore à la différence entre la somme des nombres de la sixième colonne et celle des nombres de la cinquième colonne.

Pour *vérifier le nivellement*, on le recommence en allant en sens inverse, c'est-à-dire de E vers A, et si l'on a bien opéré on doit trouver la même différence de niveau entre les points extrêmes A et E. On considère en général comme bien faites, des opérations qui fournissent entre les points extrêmes des différences de niveau qui ne diffèrent entre elles que de 10 à 12 millimètres par kilomètre de la longueur nivelée.

1588. *Hauteur du niveau apparent au-dessus du niveau vrai.*

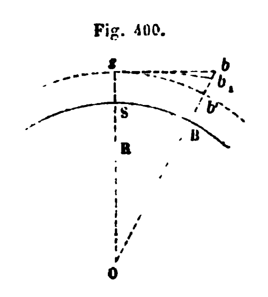


Fig. 400.

L'instrument ayant été établi au point S de la surface de la terre, si l'on dirige un rayon visuel sb, ce rayon sera perpendiculaire à la verticale Ss, et il rencontrera en un point b une mire tenue verticalement en B. Or comme le point de la verticale OB qui est au même niveau que le point s est b', la droite sb n'est donc qu'une ligne de *niveau apparent*, et l'on voit que la hauteur du niveau apparent au-dessus du niveau vrai est égale à bb'. Désignant cette quantité par h, la distance sb par d, et supposant que Os est égal au rayon R de la terre, on a (679)

$$d^2 = h \times 2R, \quad \text{d'où} \quad h = \frac{d^2}{2R}. \qquad (1)$$

Outre la modification du niveau vrai par suite de la sphéricité de la terre, il en est une seconde due à la *réfraction de l'air;* mais qui se retranche de la première. Lorsqu'un rayon de lumière traverse l'air, il se dévie de la ligne droite en passant d'une couche à une autre plus ou moins dense, et en général il suit une courbe dont la concavité est tournée vers la terre. De cet effet, il résulte que le rayon de lumière parti de la mire et qui passe par le point s vient d'un point b_1 situé au-dessous de b, et la ligne réelle de niveau apparent est sb_1.

Sous nos climats tempérés et dans les conditions atmosphériques ordinaires, on a $bb_1 = 0{,}16bb'$; d'où il suit que la quantité h' à retrancher du niveau apparent pour avoir le niveau vrai est

$$h' = 0{,}84h = 0{,}84\,\frac{d^2}{2R}. \qquad (2)$$

La terre n'est pas tout à fait sphérique; elle a la forme d'un ellipsoïde de révolution (1208) dont le grand axe ou *axe équatorial* a, d'après les mesures de plusieurs savants, 12 754 863 mètres, et le petit axe ou *axe polaire* 12 712 251 mètres.

Faisant R = 6 366 600 mètres, les formules (1) et (2) donnent les résultats du tableau suivant :

DISTANCES du niveau à la mire.	VALEURS DE h	VALEURS DE 0,16 h.	VALEURS DE h'	DISTANCES du niveau à la mire.	VALEURS DE h.	VALEURS DE 0,16 h.	VALEURS DE h'.
mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
0	0,0000	0,0000	0,0000	900	0,0636	0,0102	0,0534
20	0,0000	0,0000	0,0000	920	0,0665	0,0106	0,0558
40	0,0001	0,0000	0,0001	940	0,0694	0,0111	0,0583
60	0,0003	0,0001	0,0002	960	0,0724	0,0116	0,0608
80	0,0005	0,0001	0,0004	980	0,0754	0,0121	0,0634
100	0,0008	0,0001	0,0007	1000	0,0785	0,0126	0,0660
120	0,0011	0,0002	0,0009	1020	0,0817	0,0131	0,0686
140	0,0015	0,0002	0,0013	1040	0,0849	0,0136	0,0714
160	0,0020	0,0003	0,0017	1060	0,0882	0,0141	0,0741
180	0,0025	0,0004	0,0021	1080	0,0916	0,0147	0,0769
200	0,0031	0,0005	0,0026	1100	0,0950	0,0152	0,0798
220	0,0038	0,0006	0,0032	1120	0,0985	0,0158	0,0828
240	0,0045	0,0007	0,0038	1140	0,1021	0,0163	0,0857
260	0,0053	0,0008	0,0045	1160	0,1057	0,0169	0,0888
280	0,0062	0,0010	0,0052	1180	0,1094	0,0175	0,0919
300	0,0071	0,0011	0,0059	1200	0,1131	0,0181	0,0950
320	0,0080	0,0013	0,0067	1220	0,1169	0,0187	0,0982
340	0,0091	0,0014	0,0076	1240	0,1208	0,0193	0,1014
360	0,0102	0,0016	0,0085	1260	0,1247	0,0199	0,1047
380	0,0113	0,0018	0,0095	1280	0,1287	0,0206	0,1081
400	0,0126	0,0020	0,0106	1300	0,1327	0,0212	0,1115
420	0,0138	0,0022	0,0116	1320	0,1368	0,0219	0,1150
440	0,0152	0,0024	0,0128	1340	0,1410	0,0226	0,1185
460	0,0166	0,0027	0,0140	1360	0,1453	0,0232	0,1220
480	0,0181	0,0029	0,0152	1380	0,1496	0,0239	0,1256
500	0,0196	0,0031	0,0165	1400	0,1539	0,0246	0,1273
520	0,0212	0,0034	0,0178	1420	0,1584	0,0253	0,1330
540	0,0229	0,0037	0,0192	1440	0,1629	0,0261	0,1368
560	0,0246	0,0039	0,0207	1460	0,1674	0,0268	0,1406
580	0,0264	0,0042	0,0222	1480	0,1720	0,0275	0,1445
600	0,0283	0,0045	0,0237	1500	0,1767	0,0283	0,1484
620	0,0302	0,0048	0,0254	1520	0,1815	0,0290	0,1524
640	0,0322	0,0051	0,0270	1540	0,1863	0,0298	0,1565
660	0,0342	0,0055	0,0287	1560	0,1911	0,0306	0,1605
680	0,0363	0,0058	0,0305	1580	0,1961	0,0314	0,1647
700	0,0385	0,0062	0,0323	1600	0,2011	0,0322	0,1689
720	0,0407	0,0065	0,0342	1620	0,2061	0,0330	0,1731
740	0,0430	0,0069	0,0361	1640	0,2112	0,0338	0,1774
760	0,0454	0,0073	0,0381	1660	0,2164	0,0346	0,1818
780	0,0478	0,0076	0,0401	1680	0,2217	0,0355	0,1862
800	0,0503	0,0080	0,0422	1700	0,2278	0,0363	0,1907
820	0,0528	0,0084	0,0444	1720	0,2323	0,0372	0,1952
840	0,0554	0,0089	0,0465	1740	0,2370	0,0380	0,1997
860	0,0581	0,0093	0,0488	1760	0,2433	0,0389	0,2044
880	0,0608	0,0097	0,0511	1780	0,2488	0,0398	0,2090

DISTANCES du niveau à la mire.	VALEURS DE *h*.	VALEURS DE 0,16 *h*.	VALEURS DE *h'*.	DISTANCES du niveau à la mire.	VALEURS DE *h*.	VALEURS DE 0,16 *h*.	VALEURS DE *h'*.
mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
1800	0,2545	0,0407	0,2137	5500	2,3758	0,3801	1,9957
1820	0,2602	0,0416	0,2185	5600	2,4630	0,3941	2,0689
1840	0,2659	0,0425	0,2233	5700	2,5518	0,4083	2,1435
1860	0,2717	0,0435	0,2282	5800	2,6421	0,4227	2,2193
1880	0,2776	0,0444	0,2332	5900	2,7340	0,4374	2,2965
1900	0,2835	0,0454	0,2382	6000	2,8274	0,4524	2,3750
1920	0,2895	0,0463	0,2432	6100	2,9225	0,4676	2,4549
1940	0,2956	0,0473	0,2483	6200	3,0191	0,4830	2,5360
1960	0,3017	0,0483	0,2534	6300	3,1172	0,4988	2,6185
1980	0,3079	0,0493	0,2586	6400	3,2170	0,5147	2,7023
2000	0,3142	0,0503	0,2639	6500	3,3183	0,5309	2,7874
2100	0,3464	0,0554	0,2909	6600	3,4212	0,5474	2,8738
2200	0,3801	0,0608	0,3193	6700	3,5256	0,5641	2,9615
2300	0,4155	0,0665	0,3490	6800	3,6317	0,5811	3,0506
2400	0,4524	0,0724	0,3800	6900	3,7393	0,5983	3,1410
2500	0,4909	0,0785	0,4123	7000	3,8484	0,6157	3,2327
2600	0,5309	0,0849	0,4460	7100	3,9592	0,6335	3,3257
2700	0,5726	0.0916	0,4809	7200	4,0715	0,6514	3,4201
2800	0,6157	0,0985	0,5172	7300	4,1854	0,6697	3,5157
2900	0,6605	0,1057	0,5548	7400	4,3008	0,6881	3,6127
3000	0,7069	0,1131	0,5938	7500	4,4179	0,7069	3,7110
3100	0,7548	0,1208	0,6340	7600	4,5365	0,7258	3,8106
3200	0,8042	0,1287	0,6756	7700	4,6566	0,7451	3,9116
3300	0,8553	0,1368	0,7184	7800	4,7784	0,7545	4,0138
3400	0,9079	0,1453	0,7626	7900	4,9017	0,7843	4,1174
3500	0,9621	0,1539	0,8082	8000	5,0265	0.8042	4,2223
3600	1,0179	0,1629	0,8550	8100	5,1530	0,8245	4,3285
3700	1,0752	0,1720	0,9032	8200	5,2810	0,8450	4,4360
3800	1,1341	0,1815	0,9527	8300	5,4106	0,8657	4,5449
3900	1,1946	0,1911	1,0035	8400	5,5418	0,8867	4,6551
4000	1,2566	0,2011	1,0556	8500	5,6745	0,9079	4,7666
4100	1,3202	0,2112	1,1090	8600	5,8088	0,9294	4,8794
4200	1,3854	0,2217	1,1638	8700	5,9447	0,9511	4,9935
4300	1,4522	0,2323	1,2198	8800	6,0821	0,9731	5,1090
4400	1,5205	0,2433	1,2772	8900	6,2211	0,9954	5,2258
4500	1,5904	0,2545	1,3360	9000	6,3617	1,0179	5,3438
4600	1,6619	0.2659	1,3960	9100	6,5039	1,0406	5,4123
4700	1,7349	0,2776	1,4573	9200	6,6476	1,0636	5,5840
4800	1,8096	0,2895	1,5200	9300	6,7029	1,0869	5,7060
4900	1,8859	0,3017	1,5840	9400	6,9398	1,1104	5,8294
5000	1,9635	0,3142	1,6493	9500	7,0882	1,1341	5,9541
5100	2,0428	0,3268	1,7160	9600	7,2382	1,1581	6,0801
5200	2,1237	0,3398	1,7839	9700	7,3898	1,1824	6,2074
5300	2,2062	0,3530	1,8532	9800	7,5430	1,2069	6,3361
5400	2,2902	0,3664	1,9238	9900	7,6977	1,2316	6,4661
				10000	7,8540	1,2566	6,5973

Remarque 1. Cette table ayant été calculée dans l'hypothèse d'une surface de niveau sphérique, les résultats qu'elle contient ne doivent être considérés que comme approximatifs.

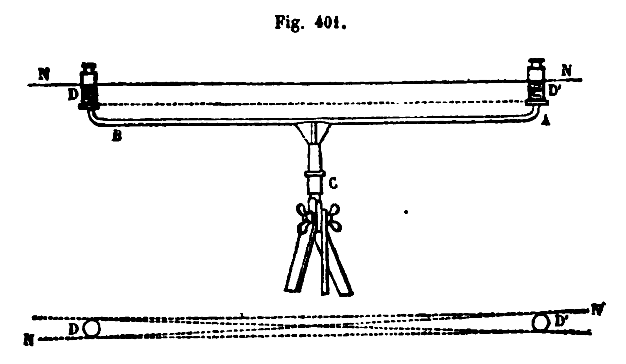
Remarque 2. Dans les limites ordinaires d'un nivellement simple (*fig.* 398), les corrections indiquées dans la table devant se faire sur le coup porté vers A et sur celui porté vers B, l'une des corrections se retranche de l'autre dans le calcul de la différence de niveau des points A et B, et il en résulte qu'elles sont en général négligeables; leur influence est d'autant moindre sur cette différence de niveau, que les distances horizontales de l'instrument aux points A et B diffèrent moins, et elle est tout à fait nulle quand ces distances sont égales.

Remarque 3. En général, dans un nivellement composé, les erreurs dues à ce qu'on a négligé, dans chaque nivellement simple, les corrections indiquées au tableau se compensent, et l'on a un résultat définitif suffisamment exact.

INSTRUMENTS.

1386. *Niveau d'eau.* Ce niveau se compose d'un tube AB de 1 mètre à 1ᵐ,30 de longueur sur 0ᵐ,02 à 0ᵐ,03 de diamètre, recourbé à angle droit à chaque extrémité, et muni au milieu de sa longueur d'une douille C à l'aide de laquelle on repose l'instrument sur un pied à trois branches.

Fig. 401.



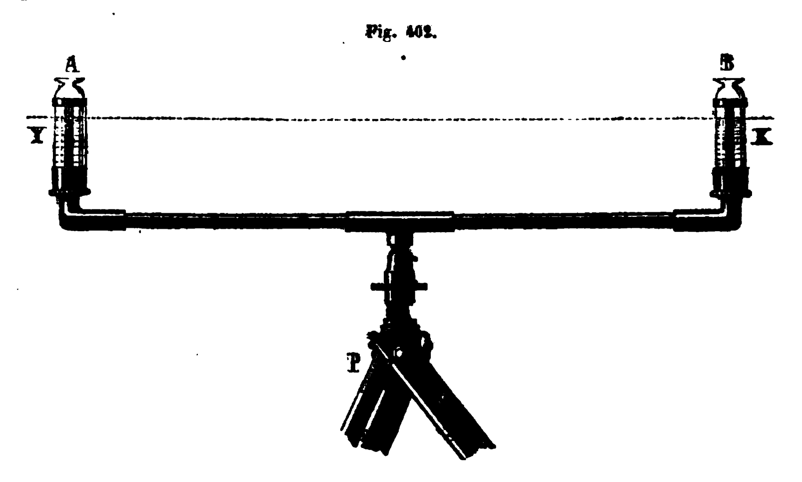
Chaque extrémité A et B porte un renflement dans lequel on lute une fiole en cristal au moyen de mastic ou de cire.

Les fioles ont de 0ᵐ,03 à 0ᵐ,04 de diamètre et de 0ᵐ,08 à 0ᵐ,12 de longueur visible calibrée; elles sont complétement ouvertes à l'extrémité engagée dans le tube, mais l'extrémité libre se referme en gorge de manière à ne laisser qu'une ouverture de 0ᵐ,01 de diamètre. Les fioles d'un même instrument doivent avoir le même diamètre, et elles doivent être le plus rigoureusement possible cylindriques.

Les tubes sont ordinairement en fer-blanc; mais l'on fabrique des niveaux plus soignés, dans lesquels ils sont en cuivre. La douille est

alors garnie d'une genouillère à coquille qui permet de faire tourner plus facilement l'instrument sur son pied P. Il existe même des niveaux

Fig. 402.



qui se composent de plusieurs parties réunies par des pas de vis; ce qui permet de les démonter pour les placer dans une boîte.

Le niveau se remplit d'eau jusqu'à la moitié ou les deux tiers de la hauteur des fioles. En hiver, pour éviter la congélation, on emploie de l'alcool au lieu d'eau. Pour chasser l'air qui a pu rester emprisonné dans le tube, on incline celui-ci après avoir bouché la fiole inférieure avec la main, et on lui imprime quelques vibrations au moyen de petits chocs.

1387. *Emploi du niveau d'eau.* Pour se servir du niveau d'eau, on le place en station (*fig.* 398), où on l'affermit sur son pied, et de manière qu'en le faisant tourner, il reste le mieux possible dans le même plan horizontal; il approche d'autant plus de cette position, qu'en le plaçant successivement dans deux directions perpendiculaires entre elles, le niveau du liquide varie moins dans chaque fiole. On dirige alors l'instrument vers la mire, et, se plaçant à 1 mètre ou 1^{m},50 en arrière de la fiole voisine, on mène un rayon visuel NN' tangent intérieurement ou extérieurement aux courbes D, D' formées par les bords des surfaces du liquide dans les fioles (*fig.* 401); le point où ce rayon visuel rencontre la mire donne le coup de niveau. Plaçant la mire sur le second point à niveler, on détermine le second coup de niveau en opérant comme pour le premier, et l'on continue de même pour tous les autres points qu'on peut niveler de la même station. Alors on établit le niveau à la seconde station, où l'on opère comme à la première, et l'on continue ainsi de suite (1383, 1384).

En vertu du principe de physique que les surfaces d'un même liquide, dans deux vases qui communiquent, se trouvent dans un même plan horizontal, les rayons visuels qu'on détermine avec le niveau d'eau sont horizontaux; mais il faut que les fioles aient le même dia-

mètre, sans quoi l'attraction du verre sur le liquide produirait des *ménisques* d'une concavité différente dans les deux fioles, et les lignes noires formées par les ménisques, lesquelles guident dans le pointage, ne seraient plus dans le même plan horizontal.

Il est nécessaire que le plan du niveau du liquide reste constant pendant tout le temps qu'on opère à une même station; il faut donc :

1° Éviter les pertes d'eau, soit par les suintements à travers des fissures, soit par la vaporisation; il faut aussi éviter que l'eau de pluie s'introduise dans les fioles. Une enveloppe qui recouvre chaque fiole diminue la vaporisation et préserve de la pluie; elle est surtout nécessaire quand l'appareil reste longtemps en station exposé au soleil ou à l'orage.

2° Éviter qu'il reste de l'air dans le tube; car il pourrait se dégager pendant qu'on opère, et le niveau du liquide baisserait.

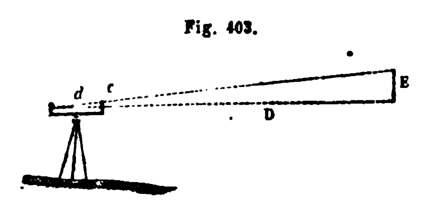
3° Que les fioles aient la même section horizontale; sans quoi la fiole qui a la plus grande section venant à passer, dans son mouvement horizontal, à un niveau inférieur, le niveau du liquide dans les deux fioles baisserait nécessairement.

4° Que toutes les visées d'une même station soient faites par la même personne, deux opérateurs prenant rarement les mêmes points des ménisques ou *onglets* pour diriger leurs rayons visuels.

Afin de rendre plus apparentes les lignes formées par les bords des onglets, on colore quelquefois l'eau avec du carmin. C'est aussi pour atteindre ce but, que dans quelques instruments soignés les fioles sont garnies d'*obscurateurs*, c'est-à-dire d'enveloppes cylindriques portant latéralement une échancrure qui ne laisse voir que la portion de la surface du liquide nécessaire pour diriger le rayon visuel. La paroi intérieure de ces enveloppes étant noircie ou rougie, l'eau en reçoit un reflet qui rend sa surface plus visible.

1588. Ce qui précède indique assez que le niveau d'eau, qui est du reste d'un usage habituel pour les petits nivellements, est sujet à trop de causes d'erreurs pour qu'on puisse l'employer lorsqu'il s'agit de nivellements d'une certaine importance.

Fig. 403.



Supposant que le rayon visuel s'écarte de l'horizontale d'une quantité e dans l'étendue de la longueur d du niveau, pour la distance D, l'erreur sera

$$E = e\,\frac{D}{d}.$$

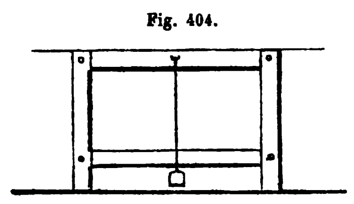
Supposant que e n'excède pas $0^m,0005$, et faisant $d = 1^m,30$, pour $D = 25$ mètres, on a

$$E = \frac{0,0005 \times 25}{1,30} = 0^m,0096.$$

Sans pouvoir rien prescrire sur la valeur de D, qui dépend de la vue et du degré d'habileté de l'opérateur, il convient cependant de ne pas la porter au delà de 25 à 30 mètres, si l'on veut opérer avec un certain degré d'exactitude.

1389. *Niveau de maçon.* C'est un système composé de deux petites règles en bois assemblées dans deux montants de même largeur et de même épaisseur, et dont l'une se trouve à 6 ou 7 centimètres des extrémités inférieures des montants. Au milieu de la traverse supérieure est suspendu un petit plomb, dont le fil correspond à un trait marqué sur la traverse inférieure quand les pieds des deux montants reposent sur un plan horizontal.

Fig. 404.



1390. Pour vérifier ce niveau, on le place sur une surface, et l'on constate la distance du cordeau au petit trait de la traverse inférieure; puis on retourne l'instrument *bout pour bout*, de manière que chaque pied ait exactement pris la place de l'autre. Dans cette nouvelle position, le cordeau a passé de l'autre côté du trait, et s'il en est à la même distance, c'est que l'instrument est exact.

Si le cordeau passait par le trait dans les deux positions, non-seulement l'instrument serait exact, mais aussi les points sur lesquels il repose seraient dans un même plan horizontal.

Ce mode de vérification, qui consiste à placer l'instrument bout pour bout, et qui est usité pour toutes les espèces de niveau, est dit *méthode par retournement.*

1391. Une fois qu'on s'est assuré que le niveau est bien exact, on conçoit qu'en faisant reposer ses pieds en tous sens sur une surface, si le cordeau, rendu libre en tenant convenablement le niveau, coïncide toujours avec le petit trait marqué sur la traverse inférieure, c'est que cette surface est horizontale. Faisant reposer une règle de largeur uniforme sur deux points suffisamment éloignés, et posant le niveau sur la règle, il indiquera encore si les deux points sont à la même hauteur, ou lequel est le plus élevé.

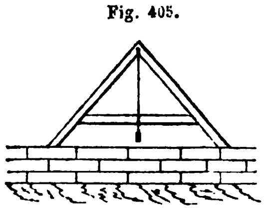
Pour poser une règle de niveau ou obtenir un point de niveau avec un autre, il suffit de reposer une des extrémités de la règle de largeur uniforme sur le point donné, et de placer le niveau sur le milieu de cette règle, dont on élève ou abaisse l'autre extrémité, jusqu'à ce que le fil à plomb vienne battre dans le petit trait; la règle est alors de niveau, et tous les points de son côté inférieur le sont également avec le point donné. C'est en opérant ainsi que les maçons tracent journellement des lignes de niveau dans les bâtiments.

Une règle étant posée de niveau, en dirigeant un rayon visuel suivant l'arête de la règle, on pourra obtenir à une certaine distance un point qui sera de niveau avec l'arête de la règle; mais, à cause de la grande

erreur qui résulterait d'un léger écart du fil à plomb par rapport au trait, et de la difficulté de bien diriger le rayon visuel, il faut limiter l'usage du niveau de maçon à de petites distances et à des opérations qui ne demandent pas une grande précision.

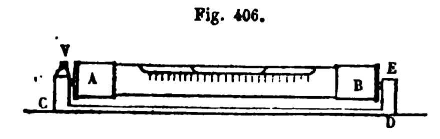
1392. Le *niveau de poseur*, ainsi appelé parce qu'il est particulièrement employé par les maçons poseurs de pierres, au lieu d'être rectangulaire comme le précédent, a la forme d'un triangle rectangle isocèle; le fil à plomb est suspendu au sommet de l'angle droit, et le petit trait est marqué au milieu du côté opposé. La vérification et l'emploi de ce niveau se font en opérant comme pour le précédent.

Fig. 405.



1393. *Niveau à bulle d'air*. Ce niveau consiste simplement en un tube de verre très-légèrement courbé et emprisonné dans une gaîne en cuivre AB, qui laisse voir la partie convexe du tube sur une certaine longueur. Avant d'envelopper le tube dans sa gaîne, on l'a rempli d'eau en y laissant une bulle d'air, et on l'a fermé à la lampe aux deux extrémités. Le tout est fixé sur une règle CD, dressée de manière que quand cette règle repose sur une surface horizontale, la bulle d'air occupe le milieu du tube; une échelle gravée sur le tube indique son milieu et par suite la position que doit occuper la bulle. Afin de pouvoir amener plus facilement le tube dans une position parallèle à la règle CD, sa gaîne est quelquefois fixée à la règle par une charnière à l'extrémité E, et par une vis de rappel à l'autre extrémité V.

Fig. 406.



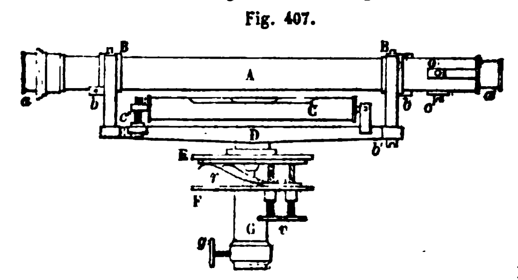
Pour remplir le tube, au lieu d'eau, on emploie souvent de l'alcool ou de l'éther, on obtient ainsi plus de mobilité, et on évite l'action de la gelée. Dans tous les cas, il convient de carminer un peu le liquide, afin de rendre la bulle d'air plus apparente.

1394. Pour vérifier le niveau à bulle d'air, on opère comme pour le niveau de maçon (1390), et on peut l'employer aux mêmes usages (1391); mais sa grande fragilité fait qu'on ne l'emploie guère que pour des travaux plus minutieux, tels que ceux de mécanique, par exemple.

1395. *Niveau à lunette*. Pour faire des nivellements importants et qui demandent une grande précision, on fait usage du niveau à bulle d'air (1393); mais alors il est accompagné d'une lunette dont l'axe optique est parallèle à la règle du niveau, ce qui permet de donner des coups de niveau d'une grande portée. Il existe bien des dispositions de niveaux à lunette; nous nous contenterons de décrire celle due à M. l'ingénieur en chef Egault et celle de Lenoir, dont l'usage est le plus habituel.

1398. *Niveau d'Egault. Description.*

Fig. 407.



A lunette. Les rayons lumineux, partis de la mire, pénètrent par l'extrémité *a*; traversent un assemblage de verres, appelé *objectif;* se réfractent à l'intérieur, et forment une image renversée de la mire. Cette image, qui est très-petite, se regarde à travers un appareil grossissant, appelé *oculaire*, placé en *a'*. Afin de conserver à l'image toute sa netteté, on ne la fait pas redresser par l'oculaire; de sorte que les objets sont vus le haut en bas à travers la lunette, léger inconvénient auquel le praticien s'habitue promptement. Entre l'objectif et l'oculaire se trouvent deux fils d'araignée ou de ver à soie, qui se croisent à angle droit au point où se forme l'image de l'objet qu'on observe. Ces fils, dont l'un est horizontal, sont fixés à un anneau, et l'on donne à l'ensemble le nom de *réticule*. Le réticule est fixé à un tube qui entre à frottement doux dans le corps de la lunette, ce qui permet d'amener le plan des fils au point où se forme l'image, selon que l'objet qu'on vise est plus ou moins éloigné, circonstance qui fait varier la distance de l'image à l'objectif. L'oculaire est fixé dans un autre tube qui entre à frottement doux dans celui du réticule. Quand on veut observer, on fait pénétrer le tube qui contient l'oculaire dans celui qui porte le réticule jusqu'à ce qu'on distingue bien les fils; puis on fait mouvoir l'ensemble des deux tubes jusqu'à ce que l'image de la mire soit bien nette. Dans cette position, l'image doit se trouver au point de croisement des fils, ce dont on s'assure en visant le plus possible par le haut, par le bas et par les côtés de l'oculaire; si l'image coïncide toujours avec les fils, c'est qu'elle est dans leur plan; s'il n'en était pas ainsi, on modifierait le tirage en conséquence.

o, *o'*, vis à l'aide desquelles on *centre la lunette*. Il arrive presque toujours que les centres de courbure des verres ne sont pas sur l'axe de figure de la lunette, et que, par suite, l'image ne s'y trouve pas non plus. A l'aide des vis *o*, *o'*, on amène la croisée des fils sur l'image, et l'on conçoit que quand on tournera la lunette, la croisée et l'image décriront la même circonférence autour de l'axe de figure, en s'accompagnant toujours, et si l'axe de figure est horizontal, tout point visé dont l'image tombera au croisement des fils sera sur cet axe.

B, B, étriers portant des collets sur lesquels reposent les tourillons de la lunette. Ces collets doivent être exécutés avec le plus grand soin, et avoir des diamètres égaux entre eux et égaux à ceux des tourillons de la lunette, afin que quand on fait tourner la lunette

sur ses tourillons, ou quand on la retourne bout pour bout de manière à reposer chacun de ses tourillons sur le collet de l'autre, son axe ne change pas de position. Il y a des collets qui sont circulaires comme les coussinets ordinaires de machines, et d'autres qui sont prismatiques, de manière à ne maintenir les tourillons de la lunette que suivant quatre génératrices.

b, *b*, taquets fixés aux étriers et traversés par des vis contre lesquelles viennent buter deux goujons quand on fait tourner la lunette pour amener le fil du réticule dans une position horizontale.

C, niveau à bulle d'air (1393).

D, traverse servant de règle au niveau, et supportant en outre la lunette A.

b', *c'*, vis servant à amener, l'une l'axe de figure de la lunette, et l'autre le niveau, dans des plans perpendiculaires à l'axe de rotation de leur ensemble; de sorte que cet axe de rotation étant vertical. l'axe de la lunette et le niveau soient horizontaux.

E, plateau circulaire au centre de la face supérieure duquel est fixé un gros tourillon, qui est perpendiculaire à son plan et sert d'axe de rotation à l'ensemble de la traverse D, du niveau et de la lunette.

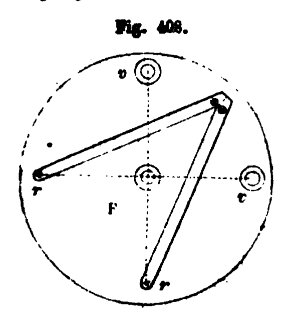
Une vis de serrage, placée latéralement, permet de rendre solidaires la traverse D et le plateau E.

F, second plateau, prolongé en dessus par un petit axe qui se termine dans l'intérieur du plateau E par un segment sphérique. Par cette disposition, le plateau E peut s'incliner par rapport à cet axe, sans pouvoir prendre aucun mouvement latéral.

G, douille fixée au plateau F, et dans laquelle pénètre un fort goujon quand on place l'appareil sur le pied à trois branches.

g, vis de pression servant à rendre bien solidaires la douille G et le goujon fixé au centre de la tablette du pied à trois branches.

Fig. 406.



v, *v*, vis placées aux extrémités de deux diamètres perpendiculaires du plateau F. *r*, *r*, ressorts dont les extrémités correspondent aux autres extrémités de ces mêmes diamètres. Ces vis et ces ressorts s'appliquent sous le plateau E et servent à l'amener dans une position horizontale quand on veut opérer.

1397. Ayant bien compris la composition du niveau d'Égault et l'office de chacune de ses pièces, on comprendra facilement les moyens de le *régler*, c'est-à-dire de rendre l'horizontale de la bulle bien parallèle au plateau E ou perpendiculaire à l'axe de rotation, d'amener l'un des fils à être bien horizontal, de centrer la lunette et d'amener son axe de figure dans une position parallèle au plateau E.

Pour rendre l'horizontale de la bulle parallèle au plateau supérieur E, on établit solidement l'instrument sur son pied; on le fait tourner jusqu'à ce que le tube du niveau soit dans l'un des plans régulateurs *rr* (*fig.* 408); à l'aide de la vis correspondante *v*, on amène le niveau dans une position horizontale, et faisant décrire à tout l'instrument un angle de 180° autour de son axe, si dans cette nouvelle position la bulle revient bien entre ses repères, c'est que le niveau est parallèle au plateau E. S'il n'en était pas ainsi, on corrigerait la déviation moitié avec la vis *c'* du niveau et moitié avec celle *v*.

Le niveau étant parallèle au plateau E, *si l'on voulait amener ce plateau dans une position horizontale*, on ferait décrire à l'instrument un angle de 90°, et dans cette nouvelle position on amènerait le niveau dans l'horizontale au moyen de la seconde vis *v*. Plaçant alors successivement le tube du niveau dans la direction des deux diamètres régulateurs *rr*, si la bulle reste bien entre ses repères, c'est que le plateau E est horizontal.

Quand le niveau est supporté par trois vis à caler, qui dispensent alors des vis *v*, *v* et des ressorts *r*, *r*, on amène d'abord la bulle à être horizontale dans une position parallèle à deux des vis, puis dans une position perpendiculaire à la première.

Pour vérifier si l'axe de figure de la lunette est parallèle au plateau E, on vise la mire posée à une portée ordinaire; on place la lunette bout pour bout sur ses collets, et, en faisant tourner tout l'instrument, on ramène la lunette vers la mire; si la ligne de foi du voyant est encore sur la ligne de visée, c'est que la lunette est parallèle au plateau E; s'il n'en était pas ainsi, à l'aide de la vis *b'*, on corrigerait la déviation par tâtonnement.

Pour vérifier si l'axe optique est parallèle à l'axe de figure de la lunette et par suite au plateau E, on vise un point convenablement éloigné; on fait tourner la lunette autour de son axe, de manière à amener le dessus en dessous, et si l'image du point visé se trouve encore sur le fil horizontal, c'est que la lunette est centrée par rapport à ce fil; si au contraire l'image se trouvait en dessus ou en dessous du fil, à l'aide de la vis placée à l'extrémité du fil vertical, on ferait avancer le fil horizontal de la moitié de l'intervalle qui le séparait de l'image. Par une opération analogue, et en prenant pour point de mire une ligne verticale, on amènerait l'autre fil dans une position convenable, et alors la lunette serait complétement centrée.

1398. *Emploi du niveau.* Le niveau étant bien réglé, il est susceptible d'être transporté, et on l'établit sur son pied à la 1re station (1384); on amène son plateau E dans une position horizontale, et l'on donne les coups de niveau arrière et avant; puis on va à la seconde station, où l'on opère de même, et ainsi de suite.

Nous avons dit (1396) que la position de l'image, et, par suite, celle du réticule, variaient avec la distance du point visé; or comme de ce déplacement la lunette peut se trouver décentrée, l'on voit un second motif à ajouter à celui donné au n° 1385 pour placer autant que pos-

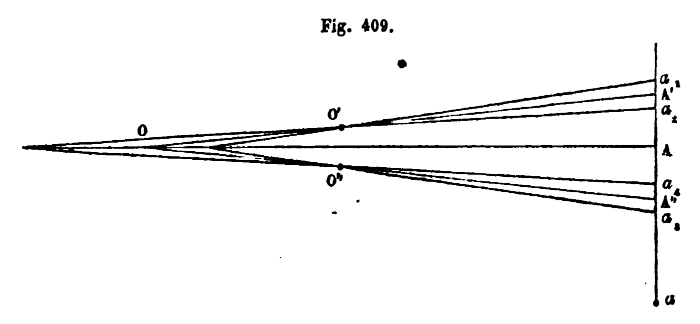
sible la mire à égale distance du niveau; de plus même, cette distance ne devrait pas varier d'une station à l'autre.

1399. *Méthode d'Égault.* L'impossibilité dans laquelle on se trouve très-souvent de placer la mire à la même distance du niveau, et le temps qu'exigerait cette précaution, ont fait chercher un moyen d'opérer à l'aide d'une lunette décentrée. M. Égault a indiqué la méthode suivante, qui permet d'opérer en toute sécurité avec un instrument dont non-seulement la lunette est décentrée, mais aussi dont l'axe de figure de la lunette et l'horizontale de la bulle ne sont pas parallèles au plateau supérieur.

Cette méthode consiste, après avoir amené le plateau supérieur dans une position autant que possible horizontale, et réglé les distances de l'oculaire et du réticule à la demande de la vue de l'observateur et à la distance de la mire, à donner sur le point nivelé quatre coups correspondant aux quatre positions que peut prendre la lunette sans que le même fil cesse d'être horizontal.

La lunette n'étant pas horizontale, son axe de figure prendra une direction inclinée OA'; $O'a_1$ étant le premier rayon visuel parti de la

Fig. 409.



lunette décentrée, faisant faire à la lunette une demi-révolution autour de son axe, qui reste fixe, le rayon visuel prendra la nouvelle position $O'a_2$, symétrique de $O'a_1$ par rapport à OA'. Retournant la lunette bout pour bout sur ses collets, son axe de figure prend la direction OA'' symétrique de OA' par rapport à l'horizontale OA, et, dans cette position, la lunette, par sa demi-révolution autour de son axe, fournit deux nouveaux rayons visuels $O''a_3$ et $O''a_4$ symétriques par rapport à OA'', et symétriques des premiers rayons $O'a_1$, $O'a_2$ par rapport à l'horizontale OA. On a donc pour le coup réel de niveau

$$aA = \frac{aa_1 + aa_2}{2} = \frac{aa_3 + aa_4}{2} = \frac{aa_1 + aa_2 + aa_3 + aa_4}{4}.$$

Quand on opère d'après cette dernière valeur de aA, les quatre cotes lues sur la mire par les quatre visées s'inscrivent au carnet de nivellement (1384), dans une colonne qui précède celles des coups arrière et avant, et ces coups sont les moyennes de ces quatre cotes.

Ordinairement, pour abréger les opérations sur le terrain et dimi-

nuer les calculs, on opère d'après la première valeur de aA. Ainsi, une première visée fournit aa_1; puis, tournant la lunette bout pour bout, lui faisant faire une demi-révolution autour de son axe, et visant de nouveau la mire, on obtient aa_2. On inscrit, comme dans le cas précédent, les valeurs de aa_1 et aa_2 dans la troisième colonne du carnet de nivellement, et en prenant la moyenne on a le coup de niveau réel, soit arrière, soit avant. La seconde expression de la valeur de aA conduit à opérer d'une manière identique.

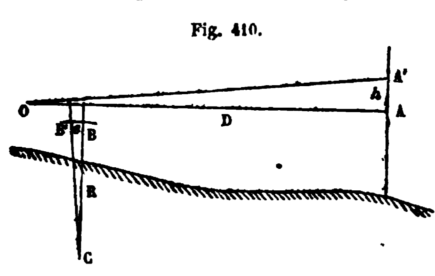
Dans le cas où l'axe de figure de la lunette et l'horizontale de la bulle seraient parfaitement parallèles au plateau E, A' tomberait en A, et l'on aurait $aA = \frac{aa_1 + aa_2}{2}$. Ainsi dans ce cas les deux visées se feraient sans retourner la lunette bout pour bout; aussi opère-t-on encore assez souvent de cette manière, mais l'instrument doit être bien réglé, et mis parfaitement de niveau à chaque station.

Un grain de poussière ou une parcelle d'oxyde interposé entre les coussinets et la lunette, ou encore un usé inégal des parties frottantes empêchant l'axe de figure de la lunette de coïncider avec sa première position quand on retourne la lunette bout pour bout, la méthode Égault est sujette à des causes d'erreur, même avec un instrument bien réglé, et l'on ne peut annuler l'effet de ces erreurs qu'en plaçant le niveau à égale distance des points nivelés. Quoi qu'il en soit, il faut toujours régler l'instrument le mieux possible avant d'en faire usage, afin de rendre très-petites les corrections, qui avertissent alors que l'instrument est dérangé si elles deviennent trop fortes.

1400. Quoiqu'on puisse distinguer nettement les objets très-éloignés avec de bonnes lunettes, le degré de sensibilité de la bulle, qui dépend du rayon de courbure du tube, limite cependant la portée des niveaux à lunette.

Soit h la quantité dont le rayon de visée OA' s'écarte de l'horizontale OA à la distance D, pour une erreur e que l'on commet dans l'appréciation de la position de la bulle. Les deux triangles semblables OAA', CBB' (4°, 670) donnent

Fig. 410.



$$D : R = h : e,$$

d'où $D = R\frac{h}{e}$.

Aujourd'hui on fait le rayon de courbure $R = 15$ mètres; l'œil n'apprécie guère la position de la bulle qu'avec une approximation $e = 0^m,00025$, et si l'on admet que h puisse être de $0^m,002$ sans qu'il en résulte d'inconvénient sensible sur le résultat définitif du nivellement, on a donc

$$D = 15 \times \frac{0,002}{0,00025} = 120 \text{ mètres.}$$

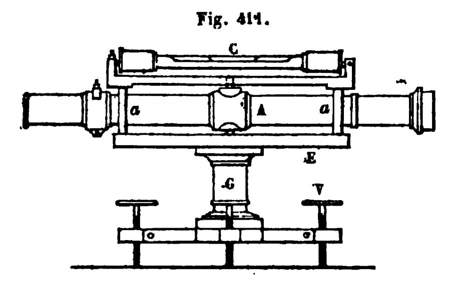
Pour les grandes opérations, la valeur 100 mètres de D est une bonne moyenne, que l'habileté de l'opérateur, la précision de l'instrument et les circonstances locales peuvent parfois faire augmenter.

Dans plusieurs instruments de géodésie on a $R = 60$ mètres; alors on a $D = 120$ mètres pour $e = 0^m,0005$ et $h = 0^m,001$. Une plus grande sensibilité permettrait difficilement de rappeler et de maintenir la bulle entre ses repères. Les bulles très-sensibles ne sont guère employées que dans les observatoires.

1401. *Niveau de Lenoir.* Ce niveau présente les mêmes moyens de vérification et de correction que celui d'Égault, dont il ne diffère qu'en ce que l'axe de rotation, au lieu d'être amené dans la position verticale au moyen de vis v agissant sur un plateau E (*fig.* 407), l'est par quatre vis disposées aux extrémités de deux diamètres rectangulaires d'un manchon conique que l'axe traverse.

Dans l'instrument appelé plus spécialement *Niveau de Lenoir*, ou mieux *Niveau-cercle de Lenoir* pour le distinguer du précédent, à la lunette A sont fixés invariablement deux prismes à base carrée a, a. Par ces prismes, la lunette repose sur un plateau E, et un tourillon, qu'elle porte en son milieu, la maintient au centre de ce plateau quand on la fait mouvoir. Le plateau E est fixé sur une colonne G supportée par trois branches munies chacune d'une vis calante V.

Fig. 411.



Le niveau à bulle C repose sur les prismes a, a, ou directement sur le plateau E. Dans le premier cas un petit tourillon fixé au milieu de la lunette, et qui pénètre dans la règle du niveau, guide pour placer convenablement celui-ci sur les prismes a, a.

Pour se servir de cet instrument, on le place sur son pied à trois branches; puis on amène le plateau E dans une position horizontale au moyen des vis calantes V et en se guidant avec le niveau C, comme il a déjà été indiqué pour le niveau d'Égault (1397). Cela fait, on vérifie si l'un des fils est bien horizontal; s'il ne l'est pas, on desserre la vis qui serre le manchon du réticule contre le corps de la lunette, et l'on fait tourner ce manchon en conséquence.

Pour centrer la lunette, on fait usage de vis qui se meuvent dans le plan du réticule. Reposant la lunette sur le plateau E successivement par les faces inférieures et supérieures des prismes a, a, on centre la lunette par rapport à l'un des fils (1397), ce qui est suffisant. Du reste, en faisant successivement reposer la lunette par les faces latérales des prismes a, a, on la centrerait par rapport à l'autre fil.

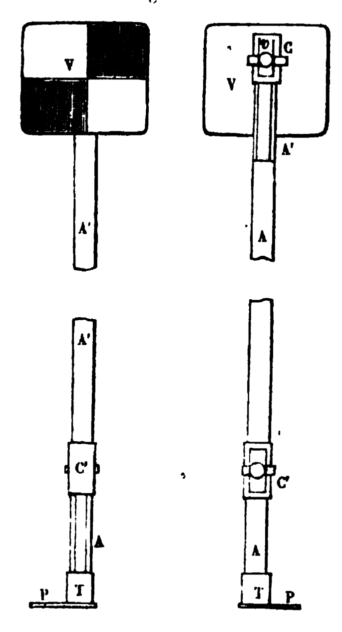
Quand le plateau E est horizontal et la lunette centrée, on s'assure que l'axe de cette dernière est horizontal. Pour cela, on place le niveau

sur les prismes a, a, et si la bulle reste en son milieu comme quand on repose directement le niveau sur le plateau E, c'est que les prismes a, a ont la même hauteur et que l'axe de la lunette est horizontal. Si cette condition n'était pas remplie, il faudrait diminuer le prisme le plus élevé, ou s'en rendre indépendant en se plaçant à égale distance des points à niveler.

Quand la bulle s'écarte un peu de ses repères, en passant d'une direction à une autre, on l'y ramène au moyen de la vis à caler la plus voisine; ce qui ne change pas d'une quantité appréciable la hauteur du plateau et du plan des visées.

1402. *Mire à coulisse.* Cette mire est celle dont l'emploi est le plus général. Elle est formée d'une première règle en bois dur bien sec A, armée à son pied d'un *talon* en fer T, muni d'une *semelle* ou *pédale* P, par laquelle la mire repose sur le sol quand on la place verticalement.

Fig. 412.



Une plaque de tôle V, appelée *voyant*, a sa face que l'on vise divisée en quatre carrés égaux par des droites joignant les milieux de ses côtés opposés. Deux de ces carrés opposés par un sommet sont rouges et les deux autres blancs, afin de rendre plus apparente la ligne de foi.

C est un collier en cuivre auquel est fixé le voyant. Ce collier peut glisser sur toute la longueur de la règle A en traînant le voyant, qui peut alors être monté ou baissé à volonté. Une vis de pression v sert à fixer le voyant en un point quelconque de la règle A.

Le dos de la mire est divisé en centimètres, dont le zéro est au pied de l'instrument; les décimètres sont seuls écrits. Cette échelle se continue jusqu'à deux mètres, et quand le voyant atteint cette limite, un ressort l'arrête. La hauteur à laquelle se trouve la ligne de foi du voyant est indiquée par une arête horizontale du manchon C; on lit les mètres et centimètres sur l'échelle, et une petite échancrure, faite dans la partie inférieure du manchon, a une de ses arêtes verticales divisée en millimètres, ce qui permet d'apprécier la hauteur du voyant à moins de un millimètre près.

A' est une seconde règle portant dans toute sa longueur une languette qui peut glisser dans une coulisse faite dans la règle A.

Un collier C', semblable à celui du voyant, et muni également d'une vis de pression, permet de rendre les deux règles solidaires, quand on opère sur des portions de verticales qui ne dépassent pas deux mètres.

Pour des cotes supérieures, on fixe le voyant sur la division deux mètres de la première échelle; là il est solidaire avec la règle A′, et il est indépendant de celle A, qui ne s'élève pas jusqu'à ce point. On desserre la vis du collier inférieur C′, les deux règles deviennent indépendantes, et l'on peut faire monter à volonté la règle A′ et par suite le voyant.

L'extrémité de la règle A′ ne descendant que jusqu'au sommet du talon T, une seconde échelle, faite sur la face latérale de la règle A, et qui commence à l'extrémité inférieure de la règle A′, sert à évaluer de combien le voyant s'est élevé au-dessus de la cote deux mètres. Le collier C′, qui se meut avec la règle A′, avec laquelle il est solidaire, porte, comme celui C, une échancrure dont une arête verticale sert encore à évaluer les millimètres.

Comme la règle A′ peut coulisser de 1^m,80 le long de la règle A, il en résulte que l'on peut mesurer des cotes s'élevant jusqu'à 3^m,80.

Quand on fait usage du niveau d'eau, le voyant n'est ordinairement divisé qu'en deux rectangles, l'un rouge et l'autre blanc, séparés par une ligne de foi horizontale; mais avec les niveaux à lunettes, il convient d'employer la première forme, dont le trait vertical doit coïncider avec le fil vertical de la lunette.

1403. *Manœuvre de la mire.* Le *porte-mire* la repose sur le sol par sa pédale, et il la tient dans une position aussi verticale que possible; avec un peu de pratique et d'attention il ne tarde pas à la placer toujours dans une position convenable. Quand elle penche à droite ou à gauche, l'observateur peut s'en apercevoir à simple vue, ou en se guidant avec le fil vertical de la lunette ou même avec le côté de l'une des fioles du niveau d'eau, et il en avertit le porte-mire en portant la main du côté opposé, la distance qui les sépare excédant généralement la portée de la voix.

L'opérateur indique au porte-mire de monter ou de baisser le voyant en élevant ou en abaissant la main à plusieurs reprises; il a soin de diminuer l'amplitude et la vitesse de ses mouvements à mesure que le voyant approche davantage du point de visée, afin que le porte-mire prenne plus de précautions pour ne pas dépasser ce point.

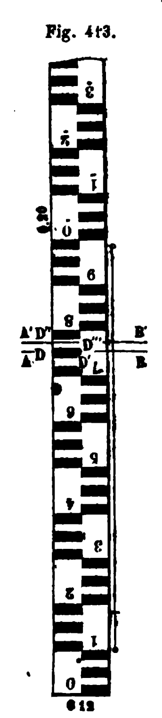
Pour indiquer qu'il faut faire usage de la coulisse, l'opérateur porte la main au-dessus de la tête et il l'élève à plusieurs reprises. Alors l'aide fixe le voyant à la cote deux mètres, il desserre la vis du collier inférieur C′, et il fait monter la règle A′ et par suite le voyant d'après les indications qui lui sont faites.

L'opérateur indique que le voyant est au point convenable, par un mouvement horizontal de la main; alors le porte-mire le fixe avec la vis C ou C′; il remet la mire en place, et l'y maintient jusqu'à ce que l'opérateur lui indique par un dernier signe que le coup a été bien donné.

L'opérateur se fait lire à haute voix la cote par le porte-mire; puis il se fait présenter la mire, et il contrôle la première lecture, dont il avait préalablement écrit le résultat au crayon.

1404. *Mire parlante.* Pour éviter toutes les causes d'erreurs auxquelles est sujette la mire à coulisse, soit dans la lecture de la cote, soit dans la fixation du voyant, et supprimer la manœuvre, toujours assez longue, de celui-ci, M. Bourdaloue, conducteur des ponts et chaussées, a imaginé de diviser la mire d'une manière assez apparente pour que l'opérateur puisse viser directement sur les divisions sans le secours d'un voyant, et lire lui-même la cote.

Fig. 413.



Après bien des essais, la disposition que M. Bourdaloue paraît préférer, consiste en une règle en bois de $0^m,12$ environ de largeur, divisée en parties égales de $0^m,04$, alternativement rouges et blanches. Ces parties sont réunies par groupes de 5, équivalant par conséquent à deux décimètres. Chaque groupe n'occupe que la moitié de la largeur de la règle, dont l'autre moitié porte un gros chiffre indiquant le nombre entier des groupes qui se trouvent en dessous. Les groupes de rang pair occupent la gauche de la mire et ceux de rang impair la droite.

Comme on voit la mire renversée, les chiffres qui s'y trouvent ont la tête en bas, afin qu'on les voie droits, ce qui facilite la lecture. Les chiffres de la seconde dizaine portent un point en dessous; ceux de la troisième en ont deux, et dans l'évaluation des cotes par la méthode Égault, le nombre des points est celui des mètres qui entrent dans la cote.

Avec cette disposition, si l'on ne donnait qu'un coup de niveau, pour avoir la cote, il faudrait doubler le chiffre correspondant écrit sur la mire, ce qui donnerait des décimètres, quadrupler les petites divisions entières comprises entre ce chiffre et le point visé, ce qui donnerait des centimètres; puis enfin évaluer la portion de petite division, inférieure au point visé, et faire la somme des trois résultats. Ainsi la ligne de visée aboutissant en AB, qui correspond aux $\frac{2}{3}$ de la division DD', la cote est $0^m,70 \times 2 + 0,04 \times 2 + 0,04 \times \frac{2}{3} = 1^m,507$. Cette évaluation n'est pas sans quelques difficultés, qu'on évite par l'application de la méthode de M. Égault (1399), qui consiste, dans ce cas, non à prendre la moitié de la somme des cotes données par les deux coups de niveau, mais à évaluer ces cotes en considérant les chiffres de la mire comme exprimant des décimètres, et les subdivisions comme valant deux centimètres, et à faire la somme des deux cotes trouvées pour avoir la cote réelle. Ainsi la ligne de visée du premier coup aboutissant en AB, on inscrit sur le carnet la cote $0,70 + 0,02 \times 2 + 0,02 \times \frac{2}{3} = 0,753$; retournant le niveau et la lunette, et donnant le second coup, dont la

ligne de visée aboutit en A'B', qui correspond aux $\frac{3}{4}$ de la division D''D''', la seconde cote à inscrire sur le carnet est 0,775, et le coup réel est 0,753 + 0,775 = 1^m,528.

Les mires parlantes ont ordinairement 3 mètres de longueur; elles se replient en leur milieu à l'aide d'une charnière pour la facilité du transport. On a même porté la longueur jusqu'à 6 mètres. Quelquefois on fait usage de deux mires, l'une avant, l'autre arrière, qui peuvent au besoin être réunies bout à bout au moyen de boulons réunissant des têtes à oreilles.

Afin de pouvoir placer verticalement des mires aussi longues, elles sont garnies d'un fil à plomb, dont s'occupe le porte-mire, qui n'a pas de voyant à mouvoir. Du reste, comme la lecture du coup de niveau est très-rapide, on peut prendre, comme se rapprochant le plus de la verticale, le plus petit de ceux qu'on lit pendant que la mire oscille.

La division de la mire en centimètres paraît devoir être au premier abord la plus convenable; mais des intervalles aussi petits sont à peu près cachés par le fil de la lunette, et il est difficile d'évaluer les millimètres. Quelle que soit l'incertitude qui existe dans l'appréciation des parties d'intervalles de 0^m,04, d'après plusieurs opérateurs, la mire parlante a une supériorité incontestable sur celle à coulisse, tant sous le rapport de l'exactitude des résultats que sous celui de la célérité des opérations.

PROFILS. PLANS COTÉS.

1405. Il peut arriver qu'un seul profil en long suffise pour l'objet qu'on se propose; c'est ce qui arrive, par exemple, pour l'établissement d'une conduite d'eau dans une ville. La position des tuyaux est fixée par celle de la rue, et il suffit d'un profil en long pour déterminer les hauteurs relatives de tous les points de la conduite, et s'assurer que l'eau arrivera en tous ces points.

Pour établir un canal, une route, un chemin de fer, un simple profil devient insuffisant. On est obligé de rattacher au profil en long fait suivant l'axe choisi préalablement pour la voie, et que l'on appelle *ligne magistrale* ou d'*opération*, des profils en travers s'étendant à une certaine distance à droite et à gauche, afin de pouvoir, dans la zone nivelée, choisir la position définitive de l'axe, qui doit conduire à la plus faible dépense d'établissement et d'entretien.

Ces profils en travers se dirigent normalement à la direction du profil en long, et on les relève ordinairement par rayonnement (1383), de la station d'où l'on donne le coup arrière sur le piquet correspondant d'un profil en long. On pourrait de la même station relever le profil correspondant au coup avant; mais il est préférable de ne relever qu'un profil à chaque station.

Le carnet le plus simple, et peut-être le plus commode, consiste, pour les profils en travers comme pour les profils en long, en un croquis sur

lequel on inscrit sur place les résultats trouvés. Cependant, on a encore le plus souvent recours à un carnet à colonnes, mais que l'on rend plus simple que pour le profil en long, en raison de la moindre importance d'une erreur; il peut être disposé de la manière suivante (carnet du n° 1384) :

DÉSIGNATION des profils.	POINTS nivelés.	DISTANCES des piquets.	COUPS de niveau.	COTES CALCULÉES des plans de visée des profils	COTES CALCULÉES des points nivelés.	OBSERVATIONS, croquis, etc.
1	2	3	4	5	6	7
PROFIL A (100m).		mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	
Pied du roc.	*c*		0,15		100,19	
Pied du talus.	*b*	5,54	0,27		100,07	
Axe du chemin.	*a*	3,16	0,59		99,75	
PIQUET D'AXE.	A	4,00	0,34	100,34	100,00	
Gros chêne.	*a'*	3,17	0,79		99,55	(*) La démolition du mur donnera 0mc,35 de moellon par mètre courant.
Arête de la banquette (*).	*b'*	4,09	0,70		99,64	
Fond du ruisseau. . . .	*c'*	5,34	1,54		98,80	
PROFIL B (100m,606).						
⋮						

La cote 100m,34 de la 5e colonne est la cote du plan de visée du profil par rapport au plan général de comparaison; elle est égale à la cote 100 mètres du piquet d'axe par rapport au même plan, augmentée du coup 0m,34 donné sur le piquet d'axe.

En retranchant de la cote 100m,34 les nombres de la 4e colonne, qui sont les coups donnés sur les divers points nivelés, on obtient les nombres de la 6e colonne, qui sont les cotes de ces points par rapport au plan général de comparaison du profil en long.

Ordinairement les profils en travers se relèvent après le profil en long, à l'aide du niveau d'eau (1386).

Il peut arriver que tous les points des profils en travers ne puissent pas se niveler de la station du profil en long. Alors, partant du piquet du profil en long, on fait successivement, à droite et à gauche de ce profil, un nivellement composé d'un nombre suffisant de stations, que l'on rattache au premier. On peut commencer le nivellement d'un profil en travers par une des extrémités; mais alors on ne peut calculer les cotes de ses piquets que quand on est arrivé au piquet du profil en long.

1406. Supposant qu'une droite verticale se meuve en s'appuyant sur l'axe du profil, elle engendrera une surface cylindrique, et en développant cette surface, son intersection avec le plan de comparaison devien-

dra une ligne droite, et son intersection avec la surface du sol sera une ligne sinueuse qui n'aura rien de géométrique. Pour simplifier le tracé de cette dernière ligne, on suppose qu'entre deux points consécutifs nivelés la surface du sol est plane; alors cette ligne devient une ligne brisée dont les sommets se trouvent aux points nivelés. Pour la tracer, on porte, à une échelle convenable, sur la droite figurant le plan de comparaison, à partir d'un point désignant le premier piquet, des longueurs égales aux distances de ce piquet aux suivants; puis on élève aux points obtenus des ordonnées égales aux cotes du profil, et joignant les sommets de ces ordonnées, on obtient une ligne qui figure d'une manière assez exacte pour la pratique les sinuosités de la surface du sol. Le plus souvent même, pour rendre ces sinuosités plus sensibles, on prend pour les ordonnées une échelle double, quintuple et même décuple de celle adoptée pour les abscisses (1085).

Les profils en travers se dessinent sur la même feuille que le profil en long, en regard des points correspondants de ce dernier.

On conçoit que le profil ainsi déterminé représente d'autant mieux les sinuosités du profil de la surface du sol, qu'on a mis plus de soin à niveler tous les points bas et tous les points hauts de cette surface.

Pour les profils en travers, les cotes sont ordinairement à la même échelle que les longueurs, et pour ménager la place, au lieu de prendre les ordonnées égales aux cotes de la 6ᵉ colonne du carnet, on les fait égales aux coups de niveau de la 4ᵉ colonne, pris négativement. Le plan de visée du profil devient ainsi plan de comparaison, et pour tracer le profil les ordonnées se portent en dessous et égales aux coups de niveau.

1407. *Plans cotés.* Quelquefois, au lieu de dessiner les profils, on se contente de tracer sur le papier, ou sur le plan des lieux qui peut exister, la projection horizontale de la trace du nivellement, et d'indiquer les points nivelés sur cette ligne, en les accompagnant de leurs cotes, que l'on écrit ordinairement entre parenthèses pour les distinguer des nombres indiquant les distances des points nivelés. C'est ainsi qu'on opère pour des détails qui sont plus utilement représentés par la projection de leurs contours que par leur élévation; tels sont les ruisseaux des rues, les trottoirs, les seuils des maisons, et en général tous les objets qui occupent sur le plan un espace considérable en s'écartant peu du niveau du sol.

1408. Les surfaces des terrains se représentent souvent par leurs plans cotés, qui doivent toujours être assez complets, pour qu'à l'aide des cotes qui s'y trouvent on puisse dessiner un profil suivant une direction quelconque. Pour atteindre ce but, on relève et nivelle tous les points remarquables dont les cotes sont les plus propres à faire connaître la forme de la surface du sol; naturellement tous les points saillants et déprimés sont de ce nombre. S'il s'agit d'une montagne ou de toute autre grande perturbation du sol, on ne peut plus se contenter de niveler des points isolés; alors on a recours à des courbes, dites de

niveau, qui passent par tous les points de la surface du sol ayant la même cote (*fig.* 414).

1408. Quand on opère par points isolés, ayant mis le niveau en station, par rayonnement, on nivelle tous les points remarquables qui sont à la portée du niveau. On place l'instrument dans une autre station, que l'on choisit, autant que possible, telle que le premier coup se porte sur la mire restée au dernier point nivelé de la première station, afin que le second nivellement simple se rattache plus facilement au premier. En prenant les mêmes précautions, on place le niveau dans une troisième station, et l'on continue ainsi de suite.

A mesure qu'un premier opérateur fait les nivellements, un second peut, au moyen de la planchette (1348), relever les points nivelés. Cependant, on ne fait ordinairement sur le terrain qu'un croquis du plan, sur lequel on marque les points nivelés. Quand ces points ne sont pas très-multipliés, on peut les coter directement sur le croquis; mais dans le cas contraire, pour éviter la confusion, on inscrit les cotes sur un carnet, comme l'indique le tableau suivant, qui a la plus grande analogie avec celui du n° 1405:

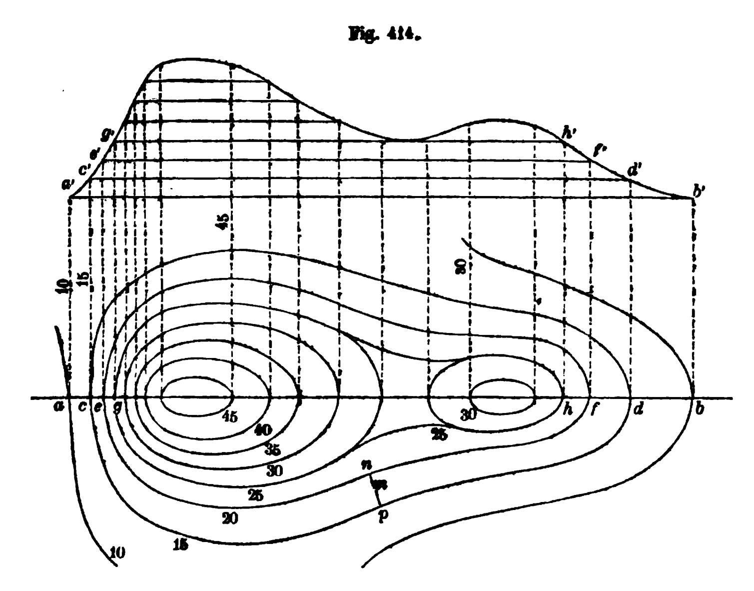
N°s des stations.	Points nivelés.	Coups de niveau		Cotes calculées		Observations.
		élémentaires.	moyens.	des plans de visée des stations.	des points nivelés.	
1	2	3	4	5	6	7
		mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	
I	*a* (*)	0,827 0,821	0,824	100,824	100,000	(*) Repère pris sur la plinthe du pont.
	b	1,253 1,261	1,257		99,567	
	c	1,722 1,714	1,718		99,106	
	d	1,916 1,928	1,922		98,902	
II	*d*	0,425 0,419	0,422	99,324	98,902	Angle nord du socle de la maison d'école.
	e	0,936 0,944	0,940		98,384	
	etc.	...	...	...	...	

Ayant pris 100 mètres pour la cote du premier point *a*, la cote du plan de visée de la première station est $100 + 0{,}824 = 100^{m}{,}824$; retranchant de cette dernière cote le coup de niveau d'un point quelconque de la première station, on a la cote de ce point.

Ajoutant à la cote 98m,902 du point *d*, le coup 0m,422 donné de la seconde station sur ce point, on a la cote 99m,324 du plan de visée de la seconde station, à l'aide de laquelle on calcule, comme ci-dessus, les cotes des points de cette station. On continue ainsi de suite pour tout le nivellement.

1410. Quand on a recours aux courbes de niveau, on les espace

Fig. 414.



ordinairement de manière que la différence des cotes de deux courbes consécutives soit un nombre entier de mètres. Pour tracer l'une de ces courbes, celle inférieure *ab*, par exemple, on pose la mire sur un point par lequel on veut faire passer la courbe ; on amène le voyant à la hauteur du plan de visée du niveau mis en station dans le voisinage, et, sans changer le niveau de place, on cherche, en promenant la mire, des points ayant la même cote que le premier, c'est-à-dire pour lesquels le voyant reste à la même hauteur. Ayant déterminé ces points suffisamment rapprochés et dans toute l'étendue de la portée du niveau, on place l'instrument à une nouvelle station, on amène le voyant, qu'on a eu la précaution de laisser sur le dernier point nivelé, à la hauteur du nouveau plan de visée, et l'on continue la détermination des points comme à la première station. Le dernier point de la courbe *ab* étant déterminé, on fait baisser le voyant de la distance de deux courbes successives, et on promène la mire sur le sol jusqu'à ce que le plan de visée passe par la ligne de foi. Le point où se trouve la mire appartient à la courbe suivante *cd*, dont on détermine les autres points en opérant comme pour *ab*.

Quand il est impossible de baisser le voyant d'une quantité égale à la distance verticale de deux courbes consécutives, à l'aide de quelques

coups de niveau donnés de stations différentes, on détermine un point de la courbe suivante.

Ayant, par exemple, choisi la cote 10 mètres pour la première courbe, les cotes des courbes suivantes sont successivement 15^m, 20^m, 25^m... si la distance verticale de deux courbes consécutives est de 5 mètres.

Ayant rapporté les courbes sur le plan, leur position relative indique la forme du terrain; ainsi, où elles sont très-rapprochées, comme en a, la surface est très-inclinée. Il est du reste facile de dessiner un profil suivant une direction quelconque, en opérant comme au n° 1406. La partie supérieure de la figure 414 représente le profil fait suivant la direction droite ab ; seulement, au lieu de se contenter d'unir par des droites les points dont les cotes sont connues, on les a raccordés par une courbe continue.

Entre deux courbes consécutives, la surface du terrain n'a rien de régulier; mais on s'écarte peu de la vérité en supposant, comme on le fait dans la pratique, qu'elle est engendrée par une droite NP qui se meut en s'appuyant sur les deux courbes et en restant constamment normale à la courbe inférieure.

Pour avoir la cote Mm d'un point situé entre deux courbes de niveau, si l'on opère sur le plan, on mène par m la droite pn normale à la courbe inférieure cd (*fig.* 414); on porte les distances pm et mn sur une droite, et terminant la fig. 415, les deux triangles semblables P Mm', P Nn' donnent

Fig. 415.

$$Mm' : Pm' = Nn' : Pn'$$

ou

$$Mm' : pm = (Nn - Pp) : pn, \quad \text{d'où} \quad Mm' = \frac{pm\,(Nn - Pp)}{pn}.$$

On a ensuite

$$Mm = Mm' + Pp = \frac{pm\,(Nn - Pp)}{pn} + Pp.$$

Si l'on avait opéré sur le terrain, on aurait déterminé les longueurs PM et PN, et les deux triangles semblables P Mm' et P Nn' auraient encore permis de calculer Mm' et par suite Mm.

Pour avoir sur une normale np à la courbe cd un point m d'une cote déterminée Mm, des deux triangles semblables P Mm' et P Nn' on conclut

$$Pm' : Mm' = Pn' : Nn'.$$

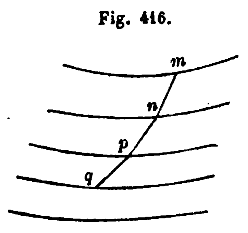
ou

$$pm : (Mm - Pp) = pn : (Nn - Pp), \quad \text{d'où} \quad pm = \frac{(Mm - Pp)pn}{Nn - Pp}.$$

On conçoit que par ce moyen on peut déterminer autant de points que l'on veut ayant la même cote, et, par suite, tracer des courbes de niveau intermédiaires.

1411. Pour tracer sur un plan coté, et à fleur du sol, *c'est-à-dire* avec le moins possible de déblais et de remblais, un chemin ou une rigole dont la pente α par mètre est donnée (1097), m étant la projection du point de départ, on commence par déterminer la longueur mn de la projection de la partie de chemin ou de rigole comprise entre le point M et la courbe voisine inférieure; or α correspondant à une distance horizontale de 1 mètre, et h étant la différence de hauteur des courbes consécutives, la longueur de mn est égale à $\frac{h}{\alpha}$. Du point m comme centre, avec mn pour rayon, décrivant un arc de cercle, il coupe la courbe inférieure au point n, et mn est le tracé cherché. Opérant de même entre le point n et la courbe voisine inférieure, et continuant ainsi de suite, on obtient le tracé complet mnp..., dont on a soin d'arrondir les angles à l'exécution. Comme les arcs décrits des points m, n, p... peuvent déterminer plusieurs points sur les courbes inférieures, le problème comporte en général un grand nombre de solutions.

Fig. 416.



Quand le tracé doit passer par des points déterminés, on le cherche par tâtonnement, en opérant comme ci-dessus. L'on conçoit que dans ce cas il peut arriver qu'on soit obligé de modifier la pente, au moins dans quelques parties du tracé.

1412, Si le tracé devait avoir entre chaque courbe la plus grande pente, et, par suite, la plus petite longueur possible, par le point m on mènerait une normale mn à la courbe voisine; par le point n, on en mènerait une autre à la courbe suivante, et ainsi de suite. La ligne mnp... ainsi déterminée prend le nom de *ligne de pente du plan.*

Quand la surface du terrain est plane, les courbes de niveau sont des droites horizontales équidistantes, et la ligne de pente devient une ligne droite perpendiculaire aux premières; c'est la *ligne de plus grande pente* du plan, c'est-à-dire la ligne qui a la plus grande pente parmi toutes celles que l'on peut tracer dans le plan (744, 1097).

Cette ligne de plus grande pente se représente sur un côté du dessin par deux lignes parallèles très-rapprochées (*fig.* 417), et on la divise en parties égales représentant les projections des distances des points du plan dont les cotes diffèrent de 1 mètre. Les points de division sont ceux où les projections horizontales des lignes du niveau rencontrent la ligne de pente, quand la différence des cotes des lignes de niveau est de 1 mètre. La ligne de pente ainsi divisée est appelée *échelle de pente du plan*, et comme on a soin de la coter comme le plan, qui n'est du reste en général coté que par cette échelle, elle permet d'obtenir immédiatement, soit la cote d'un point quelconque du plan, en lui menant par ce point une perpendiculaire, soit les points du plan qui ont une cote donnée.

1413. A l'aide de l'échelle de pente on peut aussi *tracer par un point a du plan une droite ayant une pente donnée.* Par le point *k* de l'échelle, qui a une cote égale à celle du point *a* augmentée ou diminuée d'une certaine quantité, de 2m,40 par exemple, on mène une horizontale *kh* du plan. La pente de la droite devant être de 0m,30 par exemple, sa projection horizontale comprise entre *a* et *kh* sera de $\frac{2,40}{0,30} = 8$ mètres; alors, du point *a* comme centre, avec un rayon de 8 mètres, pris à l'échelle du plan, décrivant un arc de cercle, il rencontrera *kh* en deux points *x*, *y*, et les deux droites *ax* et *ay* répondront à la question. Si l'arc *xy* était tangent à *kh* il n'y aurait qu'une solution, et s'il ne rencontrait pas *kh* il n'y en aurait pas. Tant que la droite est moins inclinée que le plan il y a deux solutions, il n'y en a qu'une quand elle a la même pente, et il n'y en a aucune quand sa pente est plus forte.

Fig. 417.

1414. L'*échelle de pente d'une droite* est la projection horizontale de cette droite, sur laquelle on a marqué les projections des points de la droite dont les cotes diffèrent de 1 mètre (1412).

SEPTIÈME PARTIE.

MÉCANIQUE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1415. Le *temps* est cette quantité non matérielle infinie qui n'a pas eu de commencement, qui n'aura pas de fin, dont la notion nous est acquise parce que tous les événements qui nous arrivent n'existent que par son concours, mais que nous ne pouvons définir.

1416. De même que de toute quantité infinie, et par conséquent non évaluable, on peut mesurer les parties, on a trouvé le moyen de comparer entre elles les différentes portions du temps. Ayant remarqué que la terre met toujours la même durée à faire sa révolution autour du soleil, on conçoit que l'on puisse prendre cette durée, qui est l'*année*, *pour l'unité de temps*. Le *jour* est aussi pris pour unité de temps (220).

Outre ces unités naturelles fondamentales, créées, comme le temps, par l'Être suprême qui préside à tout, l'homme a établi des machines qui lui permettent de diviser, aussi exactement que le comporte l'intelligence dont il est doué, le jour en 24 parties égales, appelées *heures*, l'heure en 60 *minutes* et la minute en 60 *secondes*, et l'on conçoit que chacune de ces portions bien déterminées de temps peut aussi être prise pour unité de temps.

1417. Une partie infiniment petite du temps se nomme un *instant*. Une portion quelconque du temps commence par un instant appelé *instant initial*, et se termine par un instant dit *instant final*.

1418. Un corps est en *repos* ou en *mouvement* selon qu'à deux instants successifs quelconques tous ses points occupent ou non la même position dans l'espace.

Dans la pratique, on considère un corps comme étant en repos quand il ne change pas de position par rapport à des corps qui l'entourent, considérés comme étant en repos, c'est-à-dire quand sa distance à ces points reste constante ; mais tous les corps du globe terrestre participant aux mouvements autour de l'axe de la terre et autour du soleil, l'on conçoit qu'il n'y a peut-être aucun corps en repos absolu, et que le repos que nous pouvons remarquer n'est qu'apparent ou mieux relatif.

De même, le mouvement ne dépendant que de la variation des distances du mobile à d'autres corps, les mouvements que nous considérons en mécanique ne sont que relatifs.

Un homme assis sur le pont d'un navire est en repos par rapport au navire; il a un mouvement déterminé par rapport à la ville de laquelle il s'éloigne ; mais ce repos et ce mouvement ne sont que relatifs.

1419. On nomme *trajectoire*, la ligne que suit un point mobile. Le mouvement est dit *rectiligne* ou *curviligne*, selon que la trajectoire est une droite ou une courbe.

1420. *Loi de l'inertie* (1447). L'expérience a fait admettre une loi à laquelle tous les corps sont soumis, et qui constitue un premier *principe fondamental* de la mécanique. Cette loi, reconnue par Newton, consiste dans la propriété qu'a la matière de persévérer dans l'état où elle se trouve : ainsi un corps ne peut par lui-même passer de l'état de repos à celui de mouvement, ni modifier, soit en intensité, soit en direction, le mouvement dont il est doué.

Cette propriété de la matière est ce qu'on appelle son *inertie.*

C'est elle qui fait qu'un corps frappé par un autre résiste plus ou moins à son impulsion, et absorbe une partie ou la totalité de son mouvement. C'est encore en vertu de l'inertie qu'un corps qui a reçu une impulsion primitive se mouvrait indéfiniment en ligne droite et d'une manière uniforme, s'il n'était sollicité par aucune cause étrangère. Si, dans la nature, nous n'avons pas d'exemple d'un tel mouvement continu, c'est que, en outre de la première impulsion, un corps est constamment sollicité, soit par la gravité (1438), soit par la résistance de l'air, soit encore par d'autres causes qui modifient son mouvement.

Quand un voyageur descend de voiture, dès que ses pieds touchent le sol, ils y trouvent une résistance au mouvement de translation, et le haut du corps, qui en vertu de l'inertie tend à conserver le mouvement du véhicule, est projeté en avant. C'est ce qui cause souvent des chutes dangereuses, que l'on parvient à éviter en descendant la face tournée du côté qu'avance la voiture, en penchant le haut du corps en arrière et en s'imprimant vers l'arrière un mouvement à peu près égal à celui du véhicule.

Quand on est à cheval, ou sur une voiture, un wagon ou un bateau, si la vitesse change brusquement, en vertu de l'inertie on tend à conserver le mouvement primitif, et une chute est encore à redouter.

Les ouvriers, pour emmancher leurs outils, utilisent souvent l'inertie. Les ouvriers *bardeurs* l'utilisent également pour charger les pierres de taille sur le *chariot* bas à deux roues employé à leur transport.

Inertie de la matière ne veut pas dire, en mécanique, inactivité de la matière ; il sera établi au contraire qu'une portion quelconque de celle-ci, en vertu de la loi de la gravitation universelle, reconnue par Newton, attire vers elle toutes les autres parties de la matière, qui à leur tour l'attirent avec une intensité égale et de signe contraire. Inertie ne signifie pas non plus résistance absolue de la matière à l'action des forces; nous verrons même qu'une force, quelque petite qu'elle soit,

suffit pour mettre en mouvement un corps quelconque *tout à fait libre*, ou modifier le mouvement que possède ce corps.

1421. Quand un corps passe du repos au mouvement, ou quand son mouvement se modifie d'une manière quelconque, soit en intensité, soit en direction, c'est qu'il est soumis à l'action d'une cause étrangère, qu'on appelle *force*. Ainsi, *une force est la cause quelconque qui modifie l'état de repos ou de mouvement d'un corps*, ou encore qui tend à le modifier, car il peut arriver qu'une autre cause également puissante détruise son effet et que le corps reste dans son état primitif.

1422. Les forces se désignent souvent par la source où elles prennent naissance; on distingue ainsi les forces dues à la *pesanteur*, les *forces musculaires*, la *force expansive des gaz et des vapeurs*, les *forces moléculaires*, les *forces électriques et magnétiques*, etc. Selon les cas, on les désigne aussi sous les noms de *traction*, *attraction*, *gravitation*, *poids*, *tension*, *pression*, *propulsion*, *répulsion*. *effort*.

Sans connaître la nature des forces, les sensations qu'elles nous font éprouver d'une manière permanente font que nous acquérons presque en naissant l'idée de leur *intensité* et de leur *direction*.

Il est naturel de représenter les directions des forces par les lignes droites suivant lesquelles elles tendent à faire mouvoir les corps qu'elles sollicitent. En convenant de représenter leurs intensités par des longueurs qui leur soient proportionnelles, il en résulte qu'on peut soumettre les forces au calcul comme toutes les autres quantités.

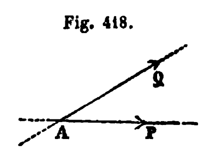
Le *point d'application* d'une force est le point d'un corps sur lequel elle agit directement pour modifier l'état de repos ou de mouvement de ce corps.

Le *sens* d'une force est celui dans lequel elle tend à faire avancer son point d'application (556).

Les droites représentant les intensités des forces se mesurent dans le sens des forces, à partir des points d'application. Les points d'application se désignent ordinairement par les lettres A, B, C, D..., et les forces par celles F, P, Q, R, S... qu'on place aux extrémités opposées aux points d'application.

Ainsi dans la figure 418 les forces sont P et Q ; le point A est leur point d'application commun; leurs directions sont AP et AQ, et leurs intensités relatives sont AP et AQ. Si l'on a adopté une certaine longueur pour représenter l'unité de force, et que AP et AQ aient été prises proportionnelles à cette unité, ces longueurs représentent les valeurs réelles des forces.

Fig. 418.



1423. Une force capable de remplacer un système de forces agissant sur un corps, sans changer l'état de ce corps, se nomme la *résultante* de toutes ces forces. Ces dernières sont appelées les *composantes* de la force unique capable de les remplacer.

1424. *La mécanique est la science des forces et de leurs effets.* Ainsi elle a pour but : 1° *de trouver quelles doivent être les relations des forces*

qui sollicitent un corps ou un système de corps, pour que ce corps ou ce système prenne dans l'espace un mouvement déterminé ; 2° réciproquement, étant donné un corps ou un système de corps sollicité par des forces données, de trouver le mouvement que ce corps ou système de corps prendra dans l'espace.

Ce problème général comprend comme cas particulier celui où les forces ne changent rien à l'état du corps ou du système, cas dans lequel on dit que les forces se font *équilibre*.

De là vient la division de la mécanique en *statique*, qu'on définit la science de l'équilibre des forces, et en *dynamique* ou science du mouvement.

Lorsqu'il s'agit de fluides, la statique prend le nom d'*hydrostatique*, qui traite de l'équilibre des fluides, et la dynamique celui d'*hydrodynamique*, qui est relative à leur mouvement.

Toutes les questions de statique pouvant être résolues comme conséquences des questions analogues de la dynamique, en supposant le mouvement égal à zéro, c'est sous ce point de vue que nous les examinerons; mais disons tout d'abord qu'en statique on ne compare les forces que d'après des grandeurs supposées, sans avoir égard aux effets qu'elles produisent sur les corps, tandis qu'en dynamique on les étudie d'après leurs grandeurs réelles, c'est-à-dire d'après les mouvements qu'elles impriment aux corps.

On peut étudier les mouvements des corps en ayant égard seulement à leur direction, à leur intensité et à leur durée, et en faisant abstraction de la matière dont les corps sont formés et des forces qui produisent ou modifient les mouvements. Cette étude forme une partie de la mécanique à laquelle on donne le nom de *cinématique*, et que l'on peut appeler *mécanique géométrique*. L'examen que nous allons faire de quelques mouvements est de son domaine (1425).

Dans la partie de la mécanique appelée *mécanique rationnelle*, qui comprend la statique et la dynamique, on considère comme axiomes (16) un petit nombre de *principes* ou lois simples de la nature, et l'on en déduit des théorèmes (15) ou vérités mathématiques qui s'appliquent sans exception en tous lieux et en toutes circonstances.

La *mécanique appliquée* traite de la *stabilité des constructions*, de la *théorie dynamique des machines* ou des relations entre leurs mouvements et les causes qui les produisent, et de l'*hydraulique* ou de la manière d'élever, de diriger et de conduire les liquides de la manière la plus convenable à un but proposé. En même temps qu'elle repose sur les propositions de la mécanique rationnelle, elle s'appuie sur des données expérimentales; d'où il résulte que les règles qu'elle fournit ne peuvent avoir la généralité de celles de la mécanique rationnelle.

La *mécanique usuelle* ou *industrielle* traite des propriétés des machines et des procédés employés pour les construire. Elle comprend la *mécanique géométrique* des machines, leur *théorie dynamique* et leur *construction*. Sous le nom de *technologie mécanique*, elle traite des connaissances concernant les instruments dits *machines-outils*, lesquels,

conduits par des appareils de transmission convenables, exécutent immédiatement les diverses opérations de l'industrie; telles sont les machines à presser, à laminer, à raboter, à pulvériser, à filer, à tisser, etc. Les objets dont s'occupe cette dernière partie de la mécanique industrielle sont le but principal auquel tendent ses autres parties; mais la science possède à leur égard peu de préceptes généraux, et ils appartiennent pour la plupart à l'enseignement descriptif et à l'expérience.

MOUVEMENT UNIFORME.

1425. Le *mouvement est uniforme* (1418) lorsque, en temps égaux quelconques, les longueurs parcourues sont égales.

1426. La *vitesse dans le mouvement uniforme* est l'espace parcouru dans l'unité de temps, ou qui serait parcouru pendant cette unité si la durée du mouvement uniforme était suffisamment prolongée.

1427. *Relation entre l'espace parcouru, la vitesse et le temps dans le mouvement uniforme.* De la définition du mouvement uniforme (1425), il résulte que l'espace E parcouru est proportionnel à la durée du mouvement, et que par conséquent v étant l'espace parcouru pendant l'unité de temps, c'est-à-dire la vitesse (1426), on a

$$\frac{E}{v} = \frac{t}{1},$$

d'où

$$E = vt, \quad v = \frac{E}{t} \quad \text{et} \quad t = \frac{E}{v}. \tag{1}$$

Représentant l'unité de temps par la longueur qui a servi à exprimer v, la première formule (1) montre que l'espace parcouru E est représenté par l'aire du rectangle qui a v et t pour côtés (690), c'est-à-dire que le rectangle contient autant d'unités de surface que E contient d'unités de longueur. Cela serait encore vrai si la longueur représentant l'unité de temps différait de celle qui a servi à exprimer v; mais alors l'unité de surface serait un rectangle ayant pour côtés les 2 unités de longueur choisies; E serait toujours exprimé en mêmes unités de longueur que v.

D'après la seconde formule (1), *la vitesse dans le mouvement uniforme est égale à l'espace divisé par la valeur numérique du temps employé à le parcourir; elle est donc constante.*

Dans le cas où le mobile aurait déjà parcouru un certain espace E_0 quand on commence à compter le temps t, l'espace total parcouru après le temps t serait

$$E = E_0 + vt.$$

Un autre mouvement uniforme donnerait des équations identiques aux précédentes; ainsi l'on aurait

$$E' = v't'.$$

Divisant membre à membre la première des équations (1) par cette dernière, on a

$$\frac{E}{E'} = \frac{vt}{v't'}.$$

Ce qui fait voir que *pour des mouvements uniformes quelconques les espaces sont entre eux comme les produits des vitesses par les temps.*

Si les temps t, t' sont égaux, l'égalité précédente devient

$$\frac{E}{E'} = \frac{v}{v'};$$

ainsi, en temps égaux, *les espaces sont entre eux comme les vitesses.*

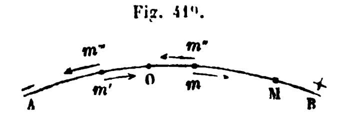
Pour $v = v'$, la même égalité devient

$$\frac{E}{E'} = \frac{t}{t'},$$

les espaces sont entre eux comme les temps,

1428. *Problème.* Un mobile partant d'un point m se meut avec une vitesse constante v sur une ligne déterminée AB; il s'agit de trouver à quelle distance OM il se trouve d'un point fixe O pris sur AB après le temps t.

Fig. 410.



Ayant $$OM = Om + mM,$$

faisant $OM = E$, $Om = E_0 = 2^m$, $v = 1^m,25$ par seconde, et $t = 3''$, comme on a $mM = vt$, il vient

$$E = E_0 + vt = 2 + 1,25 \times 3 = 5^m,75.$$

Considérant les espaces parcourus dans le sens OB comme positifs, et ceux parcourus dans le sens OA comme négatifs (1083), selon que le mobile part de m', m'', m''', avec une vitesse ayant le sens de la flèche correspondante, on a, en conservant à E_0, v et t les mêmes valeurs pour l'application numérique :

(m') $\quad E = -E_0 + vt = -2 + 1,25 \times 3 = 1^m,75,$

(m'') $\quad E = E_0 - vt = 2 - 1,25 \times 3 = -1^m,75,$

(m''') $\quad E = -E_0 - vt = -2 - 1,25 \times 3 = -5^m,75.$

Les quatre équations précédentes, qui se réduisent à l'équation générale

$$E = \pm E_0 \pm vt,$$

sont la solution complète du problème; elles donnent non-seulement la valeur absolue de E, mais aussi elles indiquent, par le signe qui affecte cette valeur, si après le temps t le mobile est sur OB ou sur OA.

MOUVEMENT VARIÉ.

1429. Le *mouvement* est dit *varié* lorsque, contrairement à ce qui existe dans le mouvement uniforme (1425), les espaces parcourus en temps égaux quelconques sont inégaux, c'est-à-dire quand la vitesse du mobile n'est pas constante pendant toute la durée du mouvement.

1430. Lorsqu'un mobile parcourt certains espaces égaux en temps égaux, sans que la même condition soit remplie pour les parties de ces espaces, on dit que le *mouvement* est *périodique uniforme*.

Un des espaces égaux parcourus en temps égaux est le chemin parcouru pendant une *période*, et le temps employé à le parcourir est la *durée de la période*.

Prenant la durée d'une période pour unité de temps, et le chemin parcouru pendant cette unité de temps pour vitesse v, l'espace E, parcouru pendant le temps t qui se compose d'un nombre entier de durées de période, est, comme dans le mouvement uniforme (1427) donné par la formule

$$E = vt.$$

1431. *Vitesse dans le mouvement varié.* Quoique la vitesse puisse ne pas être la même à deux instants successifs du mouvement, on peut la considérer comme constante pendant une portion quelconque infiniment petite de la durée du mouvement; alors, à l'instant considéré, *la vitesse est égale à l'espace infiniment petit divisé par le temps infiniment petit employé à le parcourir* (1427), ou bien encore *à l'espace qui serait parcouru pendant l'unité de temps, si, à partir de l'instant considéré, le mobile se mouvait avec une vitesse constante égale à celle qu'il a acquise à cet instant* (1426).

Désignant par dE l'espace infiniment petit parcouru, et par dt le temps infiniment petit employé à le parcourir, la vitesse est donc

$$v = \frac{dE}{dt}.$$

Dans la pratique, il est impossible de prendre dE et dt infiniment petits, et par suite d'avoir v exactement; mais la valeur de cette quantité est d'autant plus exacte que dE et dt sont pris plus petits.

Traçant deux axes rectangulaires (1085), puis prenant sur Ox, à partir de l'origine O (*fig.* 420), différentes longueurs proportionnelles aux valeurs du temps t (1427), et élevant aux différents points obtenus des ordonnées représentant les valeurs correspondantes de E, la courbe AA″ passant par toutes les extrémités des perpendiculaires est telle, que l'ordonnée A′B′ d'un quelconque de ses points est, avec l'exactitude que comporte un tracé graphique, l'espace parcouru pendant un temps représenté par l'abscisse correspondante OB′.

Pendant l'instant bb', différence des temps Ob' et Ob, l'espace parcouru est $a'b' - ab = a'c$, et supposant que aa' est droit, on a $\frac{a'c}{ac} =$

tang $a'ac$ (1091). Mais quand aa' est droit, il n'est autre chose qu'un élément infiniment petit qui se confond avec la tangente aT à la courbe au point a; alors tang $a'ac$ est la tangente trigonométrique de l'angle α formé avec l'axe Ox par la tangente aT à la courbe au point a; de plus, comme bb' et $a'c$ deviennent infiniment petits, $\frac{a'c}{ac}$ n'est autre chose que $\frac{dE}{dt} = v$; donc

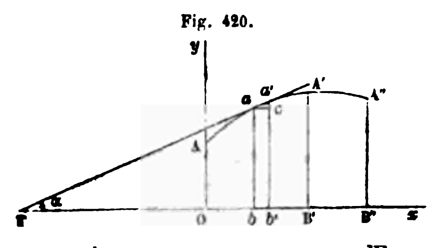


Fig. 420.

$$v = \text{tang}\, \alpha.$$

Ainsi, *après un temps quelconque* Ob, *la vitesse est représentée en intensité et en signe par la tangente trigonométrique de l'angle* α *formé avec l'axe* Ox *par la tangente à la courbe au point correspondant* a.

On prend pour le sens de la tangente à la courbe le sens aa' ou AA' (556), et l'angle positif α (1088) est déterminé par ce sens avec Ox; il est alors facile d'avoir l'angle α et par suite tang α ou v (1094). Le point de contact variant de A à A' dans la *fig.* 420, α reste aigu, et tang $\alpha = v$ reste positive, ce qui doit être, puisque l'espace parcouru va en augmentant. Le point de contact étant arrivé vers A', il y a une position pour laquelle α devient nul, ainsi que tang α ou v; en effet, à l'instant correspondant, l'espace parcouru cessant d'augmenter pour commencer à diminuer, on peut le considérer comme ne variant pas pendant cet instant, ce qui ne peut être qu'autant que la vitesse est nulle.

Le point de contact passant à droite de A', entre A' et A'', α est compris entre 360° et 270°, et tang $\alpha = v$ devient négative; ce qui doit être, puisque l'espace parcouru diminue, le mobile se rapproche du point de départ. En continuant de tracer la courbe au delà du point A'', elle pourra passer au-dessous de Ox; mais en un point quelconque la détermination de α n'offrira pas plus de difficultés.

Les points où la courbe rencontre Ox indiquent, par leurs distances à l'origine O, les temps après lesquels l'espace parcouru est nul; le mobile se trouve après ces temps au point d'où l'on compte les espaces parcourus.

1432. *Variation de la vitesse dans le mouvement varié.* v étant la vitesse du mobile à la fin du temps t, après le temps t plus l'instant dt la vitesse aura augmenté ou diminué d'une quantité infiniment petite dv, et sera devenue $v + dv$, les quantités v et dv ayant des signes quelconques.

dv étant la variation de la vitesse pendant le temps dt, la variation moyenne est, pour l'unité de temps, pendant le temps dt,

$$dv \times \frac{1}{dt} = \frac{dv}{dt}.$$

Cette valeur, qui a le signe de dv, est la quantité dont varierait la vitesse pendant l'unité de temps qui succéderait à t, si pour chaque instant dt de cette unité la variation de la vitesse était constante et égale à dv.

Il est encore évident que dans la pratique on aura d'autant mieux la variation de la vitesse à l'instant qui succède au temps t, que dt et par suite dv seront plus petits.

$\frac{dv}{dt}$ *est l'accélération de vitesse pendant l'unité de temps*, ou simplement *l'accélération de vitesse* à l'instant considéré, c'est-à-dire à l'instant qui succède au temps t.

Dans la fig. 420, les abscisses étant toujours proportionnelles aux temps, mais les ordonnées représentant les vitesses correspondantes, on a

$$\operatorname{tang} a'ac \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang} \alpha = \frac{a'c}{ac} = \frac{dv}{dt}.$$

Ainsi, *l'accélération de vitesse est représentée par la tangente trigonométrique de l'angle* α *formé avec l'axe des* x *par la tangente à la courbe au point* a.

Remarque. Ayant par l'observation déterminée les espaces parcourus par un mobile après différentes valeurs du temps, traçant une courbe comme il a été indiqué au n° 1431, cette courbe fournira, à l'aide de ses tangentes, les vitesses après les temps correspondants aux points de contact. Ces vitesses permettront ensuite de tracer, comme il a été indiqué ci-dessus, une nouvelle courbe qui donnera les accélérations de vitesse.

1433. *Courbe dont l'aire représente l'espace parcouru dans le mouvement varié.* Si, comme au numéro précédent, dans la fig. 420, les abscisses représentent les temps, et les ordonnées les vitesses correspondantes, l'espace parcouru pendant un temps quelconque $t = OB'$ est représenté par l'aire OB'A'A (1427). En effet, pendant l'instant $dt = bb'$, on peut supposer la vitesse constante et égale à la moyenne des deux vitesses ab et $a'b'$; l'espace parcouru pendant cet instant est donc représenté par $\frac{ab + a'b'}{2} \times bb'$, c'est-à-dire par la surface du trapèze $aa'b'b$ (697). Pendant un autre instant quelconque du temps t, l'espace parcouru étant de même représenté par la surface du trapèze élémentaire correspondant, l'espace total parcouru pendant le temps t le sera par la somme de tous les trapèzes, c'est-à-dire par l'aire totale OB'A'A, qu'on pourra calculer à l'aide de la formule de Simpson ou de celle de M. Poncelet (1303, 1304).

1434. Lorsque la vitesse v et l'accélération $\frac{dv}{dt}$ sont de même signe, c'est-à-dire à la fois positives ou négatives, le *mouvement* est *accéléré*, dans le sens vulgaire de ce mot. Si, au contraire, ces deux quantités sont de signes différents, le *mouvement* est *retardé*: la vitesse va d'abord



en diminuant, et tant qu'elle n'est pas nulle, le mouvement est retardé; puis la vitesse change de signe, va en augmentant, et le mouvement est accéléré, mais rétrograde.

1435. Lorsque l'accélération de vitesse $\frac{dv}{dt}$, que nous représenterons par j, est constante, le *mouvement* est dit *uniformément varié.*

1436. *Expression de la vitesse dans le mouvement uniformément varié.* j étant l'accélération de vitesse pendant chaque unité de temps, pendant une seconde par exemple, après le temps quelconque t secondes, elle devient jt, et il en résulte que le corps possédant au commencement du temps t une vitesse v_0, dite *vitesse initiale*, après ce temps il possède la vitesse

$$v = v_0 + jt. \qquad (a)$$

Adoptant un sens de la ligne que suit le mobile comme positif et l'autre comme négatif, les signes de v_0 et j sont déterminés, et la formule (a) donne la valeur algébrique de v.

Si $t = 5''$, par exemple, on a successivement pour :

$$\begin{aligned}
&v_0 = 3^m,00 \text{ et } j = 4^m,20, && v = 3 + 4,20 \times 5 = 24^m,00;\\
&v_0 = 3^m,00 \text{ et } j = -5^m,40, && v = 3 - 5,40 \times 5 = -24^m,00;\\
&v_0 = -3^m,00 \text{ et } j = 5^m,40, && v = -3 + 5,40 \times 5 = 24^m,00;\\
&v_0 = -3^m,00 \text{ et } j = -4^m,20, && v = -3 - 4,20 \times 5 = -24^m,00.
\end{aligned}$$

Ces quatre formules se résument dans la formule générale

$$v = \pm v_0 \pm jt.$$

De la formule (a) on tire

$$j = \frac{v - v_0}{t} \quad \text{et} \quad t = \frac{v - v_0}{j}.$$

Ainsi, l'accélération j est algébriquement égale au quotient de la division par t de la variation $v - v_0$ de la vitesse pendant le temps t; elle a le même signe que $v - v_0$.

Si $t = 5''$, on a successivement pour :

$$\begin{aligned}
&v_0 = 3^m.00 \text{ et } v = 24^m,00, && j = \frac{24-3}{5} = 4^m,20;\\
&v_0 = 3^m,00 \text{ et } v = -24^m,00, && j = \frac{-24-3}{5} = -5^m,40;\\
&v_0 = -3^m,00 \text{ et } v = 24^m,00, && j = \frac{24+3}{5} = 5^m,40;\\
&v_0 = -3^m,00 \text{ et } v = -24^m,00, && j = \frac{-24+3}{5} = -4^m,20.
\end{aligned}$$

Quand le corps part du repos, on a $v_0 = 0$, et par suite

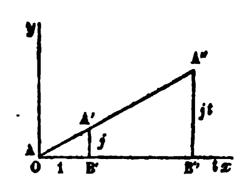
$$v = jt, \quad \text{d'où} \quad j = \frac{v}{t} \quad \text{et} \quad t = \frac{v}{j}.$$

j a alors le même signe que v.

1437. *Expression de l'espace parcouru dans le mouvement uniformément varié.*

1° *Supposant le mouvement uniformément accéléré et la vitesse initiale* $v_0 = 0$, on a

Fig. 421.



$$v = jt.$$

Cette équation étant celle d'une ligne droite passant par l'origine (1160), par la construction du n° 1433, la courbe AA'' (*fig.* 420) sera une ligne droite. En effet (*fig.* 421), déterminant le point A' pour lequel $OB' = t = 1$ et $A'B' = v = j$, l'ordonnée A''B'' d'un point quelconque A'' de la droite AA' représente bien la vitesse $v = jt$ après un temps $t = OB''$; car ayant

$$\frac{A''B''}{A'B'} = \frac{OB''}{OB'}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{A''B''}{j} = \frac{t}{1},$$

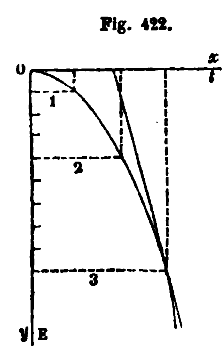
on a

$$A''B'' = jt.$$

La valeur de l'accélération j étant toujours la tangente trigonométrique de l'angle formé avec l'axe Ox par la tangente à la courbe au point correspondant à l'instant considéré (1432), dans ce cas $j = \operatorname{tang} A''Ox$, et de plus on voit qu'elle est constante, ce qui devait être d'après la définition du mouvement uniformément varié (1429).

L'espace E parcouru pendant un temps quelconque $t = OB''$ étant représenté par l'aire du triangle OA''B'' (1433), on a (692)

Fig. 422.



$$E = \frac{A''B'' \times OB''}{2} = \frac{jt \times t}{2} = \frac{1}{2} jt^2; \quad (a)$$

$$\text{d'où} \qquad j = \frac{2E}{t^2} \quad \text{et} \quad t = \sqrt{\frac{2E}{j}}.$$

Ainsi, les espaces parcourus sont proportionnels aux carrés des temps.

En construisant l'équation (a), qui est celle d'une parabole ayant les valeurs de t pour abscisses et celles de E pour ordonnées (1240), comme on l'a fait au n° 1431, *fig.* 420, on obtient la *fig.* 422.

L'équation précédente donne, comme le montre la *fig.* 422,

pour x ou $t =$	1	2	3	4	5	.....
y ou $E =$	$\frac{1}{2} j$	$\frac{1}{2} j \times 4$	$\frac{1}{2} j \times 9$	$\frac{1}{2} j \times 16$	$\frac{1}{2} j \times 25$	.....

Ainsi, les temps étant représentés par les nombres entiers successifs, les espaces parcourus sont respectivement proportionnels aux carrés de ces nombres, c'est-à-dire à

1 4 9 16 25 .....

La tangente trigonométrique de l'angle que forme, avec l'axe Ox des temps, la tangente à la courbe est encore la vitesse à l'instant considéré (1431).

Pour $t = 1$, la formule (a) devient

$$E = \frac{1}{2} j, \quad \text{d'où} \quad j = 2E.$$

Ce qui montre que *le corps partant du repos, l'espace parcouru pendant la première unité de temps du mouvement est la moitié de la vitesse* j *acquise à la fin de cette unité, c'est-à-dire la moitié de l'espace que parcourrait le mobile pendant la deuxième unité de temps du mouvement, si le mobile se mouvait d'une manière uniforme avec la vitesse acquise à la fin de la première unité.*

Ainsi l'espace E parcouru pendant la première seconde étant $3^m,40$, par exemple, la vitesse acquise est $j = 6^m,80$, espace qui serait bien parcouru pendant la deuxième seconde, si cette vitesse restait constante pendant cette seconde.

Remplaçant dans l'expression (a) j par sa valeur en fonction de v, on a aussi

$$E = \frac{1}{2} vt; \tag{b}$$

d'où

$$v = \frac{2E}{t} \quad \text{et} \quad t = \frac{2E}{v}.$$

La formule (b) montre que *le corps partant du repos, l'espace parcouru après un temps quelconque* t *est encore égal à la moitié de la vitesse acquise* v *multipliée par* t, *c'est-à-dire égal à la moitié de l'espace* vt *qui serait parcouru pendant un temps égal sous l'influence d'un mouvement uniforme de vitesse* v. Ainsi l'espace parcouru pendant les trois premières secondes du mouvement étant 30 mètres, par exemple, la vitesse acquise restant constante, l'espace parcouru pendant les trois secondes suivantes serait 60 mètres. En effet, la vitesse acquise est

$$v = \frac{2E}{t} = \frac{2 \times 30}{3} = 20 \text{ mètres,}$$

et l'espace parcouru pendant les trois secondes suivantes est bien (1427)

$$vt = 20 \times 3 = 60 \text{ mètres.}$$

2° *Lorsque le mouvement est uniformément accéléré et que la vitesse initiale n'est pas nulle*, on a (1436)

$$v = v_0 + jt.$$

Cette équation est encore celle d'une ligne droite, mais dont l'ordonnée à l'origine $OA = v_0$ (1433). Pour construire cette droite (1°), on prend $OB' = t = 1$, et $B'A' = B'C + CA' = v_0 + j$, puis l'on joint AA'. Après un temps quelconque $t = OB''$, on a bien, en raisonnant comme au 1°,

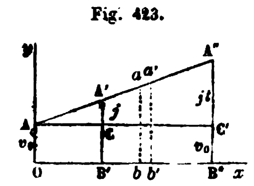


Fig. 423.

$$v = B''A'' = B''C' + C'A'' = v_0 + jt.$$

L'espace parcouru après un temps quelconque $t = OB''$ étant représenté par l'aire du trapèze OB''A''A (1433), c'est-à-dire par la somme des aires du rectangle OB''C'A et du triangle AC'A'', on a (690, 692)

$$E = OA \times OB'' + \frac{A''C' \times AC'}{2} = v_0 t + \frac{1}{2} jt^2. \qquad (a')$$

Cette formule montre que l'espace parcouru se compose de deux parties, dont l'une $v_0 t$, proportionnelle au temps t et représentée par rectangle OB''C'A, est due au mouvement uniforme dont la vitesse est v_0 (1427), et l'autre $\frac{1}{2} jt^2$, proportionnelle au carré du temps t et représentée par le triangle AC'A'', est due au mouvement uniformément varié dont l'accélération de vitesse est j (1°). Ainsi la vitesse initiale v_0 et l'accélération j produisent chacune, en agissant simultanément, le même effet que si elles agissaient isolément; leurs effets s'ajoutent.

En construisant l'équation (a'), on obtiendrait une courbe analogue à celle de la *fig.* 422. La tangente en un point de cette courbe donnerait encore la vitesse du mobile après un temps représenté par l'abscisse du point considéré.

3° *Le mouvement étant uniformément retardé et la vitesse initiale* v_0, on a (1436)

$$v = v_0 - jt.$$

Cette équation est encore celle d'une ligne droite ayant $OA = v_0$ pour ordonnée à l'origine. Pour la construire (2°), on prend $OB' = t = 1$, et $B'A' = B'C - A'C = v_0 - j$, et après un temps quelconque $t = OB''$, on a

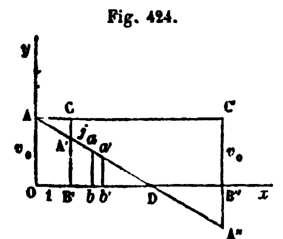


Fig. 424.

$$v = B''A'' = B''C' - A''C' = v_0 - jt.$$

L'espace parcouru après un temps quelconque $t = OB''$ étant représenté par l'aire du triangle ODA moins celle du triangle DA''B'', comme cette différence est égale à l'aire du rectangle OB''C'A, moins celle du triangle AA''C', on a

$$E = OA \times OB'' - \frac{A''C' \times AC'}{2} = v_0 t - \frac{1}{2} jt^2.$$

Cette équation ne diffère de celle du 2° qu'en ce que l'espace $\frac{1}{2}jt^2$, parcouru sous l'influence de l'accélération j, se retranche de l'espace v_0t dû à la vitesse initiale v_0; ce qui devait être, v_0 et j étant affectés de signes contraires.

Remarque 1. Les hypothèses que l'on peut faire encore ne peuvent différer des précédentes que par le signe de v_0 et de j, et elles ne peuvent embarrasser.

1° Si $v=0$ et que j soit négatif, raisonnant comme au 1°, le triangle OB″A″ de la *fig.* 421 se construit en dessous de l'axe Ox au lieu d'être en dessus, et l'on a

$$v=-jt \quad \text{et} \quad E=-\frac{1}{2}jt^2.$$

2° v_0 et j étant négatifs, le trapèze OB″A″A de la *fig.* 423 s'obtient en dessous de Ox, et l'on a

$$v=-v_0-jt \quad \text{et} \quad E=-v_0t-\frac{1}{2}jt^2.$$

3° Enfin v_0 étant négatif et j positif, on obtient la *fig.* 424, mais retournée symétriquement par rapport à Ox, et l'on a

$$v=-v_0+jt \quad \text{et} \quad E=-v_0t+\frac{1}{2}jt^2.$$

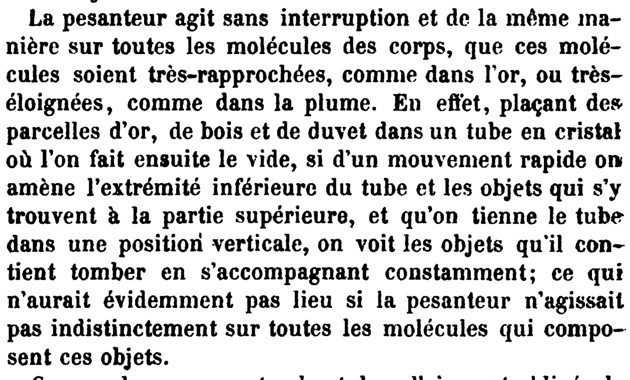
Remarque 2. Prenant un point fixe sur la ligne que suit le mobile, la distance à laquelle ce mobile se trouve du point fixe après le temps t est, dans tous cas, d'après les mêmes raisons qu'au n° 1428, représentée par la formule générale

$$E=\pm E_0\pm v_0t\pm\frac{1}{2}jt^2.$$

PESANTEUR OU GRAVITÉ. POIDS.

1438. Un corps quelconque, quelles que soient sa nature et la quantité de matière qui le compose, abandonné à lui-même, se meut ou tend à se mouvoir vers le centre de la terre. La cause inconnue qui produit cet effet se nomme *pesanteur* ou *gravité*.

Fig. 425.



La pesanteur agit sans interruption et de la même manière sur toutes les molécules des corps, que ces molécules soient très-rapprochées, comme dans l'or, ou très-éloignées, comme dans la plume. En effet, plaçant des parcelles d'or, de bois et de duvet dans un tube en cristal où l'on fait ensuite le vide, si d'un mouvement rapide on amène l'extrémité inférieure du tube et les objets qui s'y trouvent à la partie supérieure, et qu'on tienne le tube dans une position verticale, on voit les objets qu'il contient tomber en s'accompagnant constamment; ce qui n'aurait évidemment pas lieu si la pesanteur n'agissait pas indistinctement sur toutes les molécules qui composent ces objets.

Comme les corps en tombant dans l'air sont obligés de déplacer ce gaz, il en résulte une résistance qui s'oppose au mouvement et le rend plus lent. Comme, de plus, cette résistance est d'autant plus grande qu'il y a plus d'air déplacé, c'est-à-dire que la section du corps en mouvement est plus grande, il s'ensuit qu'une plume composée d'un certain nombre de molécules tombera plus lentement dans l'air qu'un morceau de plomb contenant le même nombre de molécules, quoique dans tous les cas la pesanteur agisse de la même manière sur chacune des molécules qui composent l'un et l'autre corps. On rend sensible cet effet de l'air, en en laissant rentrer dans le tube dans lequel on avait fait le vide, et en recommençant l'expérience du renversement.

1439. *Variation de la pesanteur.* Nous venons de dire que la pesanteur agissait de la même manière sur toutes les molécules des corps; mais cela n'est rigoureusement vrai qu'autant que les corps sont placés dans les mêmes circonstances; car, pour une même molécule, la pesanteur varie avec les positions que peut occuper cette molécule autour du globe terrestre. Ainsi :

1° Ayant reconnu par expérience que la pesanteur varie en raison inverse du carré de la distance au centre de la terre, elle a donc une valeur différente pour chacun des points que peut occuper une même molécule sur une verticale;

2° La terre n'étant pas tout à fait sphérique (1385), et les rayons di-

minuant de l'équateur au pôle, il en résulte qu'à la surface du globe la pesanteur diminue, pour une même molécule, depuis les pôles jusqu'à l'équateur.

Ainsi, pour une même molécule, la pesanteur varie selon que la molécule s'éloigne ou s'approche de la surface de la terre et lorsqu'elle s'éloigne ou s'approche de l'équateur; mais les distances des positions dans lesquelles on a coutume, en mécanique, de considérer les corps sont si petites par rapport au rayon de la terre, qui a près de 1500 lieues, que les effets de la variation de la pesanteur sont insensibles, et qu'on peut regarder la pesanteur comme constante.

Remarque. Le globe terrestre exécutant chaque jour autour de son axe, qui va d'un pôle à l'autre, une révolution entière, et tous les points matériels participant à ce mouvement de rotation, il en résulte que chacun d'eux est sollicité par une force, appelée *force centrifuge*, qui tend à l'éloigner de l'axe. Comme l'intensité de cette force augmente avec la vitesse du point, qui est proportionnelle au rayon du cercle décrit, les rayons des cercles décrits par les points de la surface du globe allant en diminuant depuis l'équateur jusqu'aux pôles, où ils sont nuls, la force centrifuge va donc en diminuant de l'équateur au pôle. Cette force centrifuge, par sa direction et par son intensité, quoique indépendante de la pesanteur, c'est-à-dire de l'attraction de la terre, ne tend pas moins à diminuer l'action de la pesanteur avec une intensité qui augmente du pôle à l'équateur.

1440. La direction de la pesanteur, qui est évidemment celle suivie par un corps qui tombe librement, est dite *verticale* (574), elle est partout normale à la surface de la terre, ou mieux à celle des eaux tranquilles, et se trouve représentée par la direction d'un *fil à plomb*.

Un plan perpendiculaire à la verticale est appelé *plan horizontal*, et toute droite tracée dans ce plan, au pied de la verticale, est *horizontale*.

Remarque. Si la terre était parfaitement sphérique, toutes les verticales passeraient au centre de la terre; comme elle diffère peu de cette forme, toutes les verticales passent en des points assez voisins du centre sans être parallèles entre elles. Deux verticales peuvent ne pas être dans un même plan, et si elles y sont, elles se rencontrent.

Les verticales ou les directions de la pesanteur varient donc pour tous les points de la surface du globe, et ne sont pas parallèles; mais comme les molécules d'un même corps, ou celles des différents corps que l'on peut considérer simultanément en mécanique sont très-rapprochées relativement aux distances auxquelles les directions de la pesanteur pour ces molécules se rencontrent ou tendent à se rencontrer, on peut les considérer comme étant parallèles entre elles.

1441. Pouvant supposer que les molécules de tous les corps pesants que l'on considère simultanément sont sollicitées vers le centre de la terre chacune par une force élémentaire qui est la même pour toutes, et que, de plus, ces forces élémentaires sont parallèles et agissent dans le même sens, de là, et de ce qui sera établi relativement aux forces

parallèles de même sens appliquées en des points liés entre eux d'une manière invariable, il s'ensuit :

1° Que la résultante des actions de la pesanteur sur les diverses molécules d'un corps ou système de corps est égale à leur somme (1423) ;

2° Que la direction de cette résultante est celle de la pesanteur, c'est-à-dire de la verticale (1440).

1442. Le *poids d'un corps* est la résultante des actions de la pesanteur sur les diverses molécules de ce corps (1441).

L'action de la pesanteur pouvant être considérée comme étant la même pour toutes les molécules (1438, 1439), le poids d'un corps est donc proportionnel au nombre des molécules ou à la quantité de matière que contient ce corps.

Il ne faut pas confondre la pesanteur avec le poids. La pesanteur est la cause qui attire les corps vers le centre de la terre, au lieu que le poids est la force qui résulte de cette cause pour chacun des corps, force qui est égale à l'effort que chaque corps exerce sur l'obstacle qui le tient soulevé. La pesanteur est la cause, le poids est l'effet.

1443. L'action de la pesanteur variant avec la position par rapport au centre de la terre (1439), le poids d'un corps varie de la même manière. Ainsi un fil qui suspendrait successivement un même corps près de la surface de la terre et dans des régions élevées, serait soumis à une plus grande tension dans la première position que dans la seconde, et les deux valeurs de la tension seraient celles du poids.

Cette variation du poids à la surface du globe est trop faible pour qu'on ne puisse pas la négliger : ainsi les poids de deux corps qui banderaient également un même ressort au Spitzberg et à l'île de l'Ascension ne différeraient entre eux que de $\frac{1}{206}$ de leur valeur moyenne. Dans toute l'étendue de la France, de Dunkerque à Toulon, cette différence ne serait pas le $\frac{1}{1426}$ de la valeur moyenne de tous les poids.

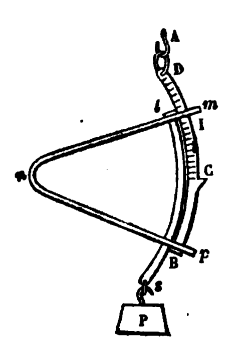
Cette variation du poids n'est pas rendue sensible avec les instruments sans ressorts, comme la balance, parce que l'action de la pesanteur est la même sur les deux corps placés dans les plateaux. Cette propriété de la balance d'indiquer partout le même poids pour un même corps a son avantage dans les opérations commerciales.

En prenant pour gramme dans chaque localité le poids du centimètre cube d'eau dans cette même localité (214), et en y graduant les instruments à ressorts qui doivent y servir, comme la balance, ces instruments indiqueraient tous le même poids pour le même corps.

1444. *Mesure des forces. Dynamomètres.* On compare les poids des corps entre eux au moyen de la balance, en prenant pour unité le gramme ou le kilogramme (214). Quant aux autres forces, on les mesure à l'aide d'instruments appelés *dynamomètres*, en adoptant encore le kilogramme pour unité.

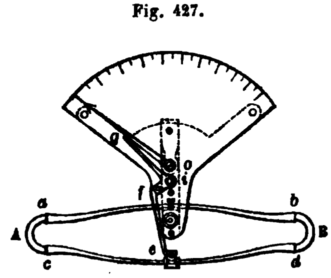
Un dynamomètre se compose en général d'un ressort en acier, qui se déforme plus ou moins quand on le soumet à l'action de forces d'intensités différentes. On en a fait de bien des dispositions, dont une des plus simples est celle du *peson à ressort* du commerce, qui consiste en un ressort en acier *mnp* courbé en forme de V, à la branche *m* duquel est rivé un secteur métallique *ls*, qui passe librement dans un œil pratiqué à travers l'autre branche *p*; à cette autre branche est rivé un second secteur BD qui passe librement dans un œil fait dans la branche *m*. De cette disposition, il résulte que pour graduer l'instrument, il suffit de l'attacher par un anneau D à un crochet fixe A, de suspendre successivement à l'anneau *s* des poids de 1, 2, 3... kilogrammes, et de graver sur le secteur CD des petits traits aux points où la branche *m* s'arrête pour les différents poids. Ces traits forment une échelle que l'on gradue, et qui permet ensuite de mesurer une force quelconque que l'on fait agir sur l'anneau *s*, après avoir attaché l'anneau D à un point fixe. Le secteur BD porte un talon C contre lequel vient buter la branche *m* du ressort, quand la force qu'on mesure atteint la limite qu'il est prudent de ne pas dépasser si l'on ne veut pas compromettre la solidité de l'appareil.

Fig. 426.



Le *dynamomètre de Régnier* est formé de deux ressorts en acier *ab*, *cd*, réunis à leurs extrémités par deux étriers en fer A et B. Attachant l'extrémité A à un point fixe, et faisant tirer la force sur l'autre extrémité B, les milieux des ressorts se rapprochent; une petite pièce de métal fixée au milieu de la branche *cd* presse l'extrémité *e* d'une petite bielle ou tige *ef*, qui fait mouvoir le levier coudé *fig*, à l'extrémité *f* duquel elle est articulée; la branche *ig* de ce levier fait mouvoir une aiguille dont la flèche se promène sur une échelle gravée au pourtour d'un secteur fixé au milieu de la branche *ab*, et qui porte l'axe *o* de l'aiguille et celui du levier *fig*. L'échelle du secteur a été graduée à l'avance, à l'aide de poids connus, comme pour le peson.

Fig. 427.



Un dynamomètre exécuté par M. Morin, sur les indications de M. Poncelet, est formé de deux ressorts parallèles réunis à leurs extrémités par des articulations à deux tiges en fer d'égale longueur. La force agit normalement au milieu de la longueur et tend à écarter les ressorts, auxquels on a donné la forme d'un solide d'égale résistance, ce qui augmente la sensibilité de l'appareil en même temps que l'écart des lames est proportionnel à l'effort. Le ressort mobile porte un crayon qui indique sur un papier l'écartement des ressorts et par suite

l'effort exercé, et en imprimant au papier un mouvement de translation dans lequel les espaces parcourus sont proportionnels aux espaces parcourus par le point d'attache de l'appareil ; le crayon trace une courbe dont les ordonnées indiquent les intensités de la force, et l'aire le travail produit par cette force. Ce dynamomètre est employé pour mesurer la traction nécessaire au mouvement des véhicules, et le travail développé par cette traction.

1445. *Application des formules du mouvement uniformément varié à la pesanteur* (1436, 1437). Le poids d'un corps étant, dans les limites de nos observations, une force à très-peu près constante qui agit d'une manière permanente sur le corps (1443), il en résulte que ce corps n'étant soumis qu'à l'action de la pesanteur, il doit se mouvoir dans le vide avec un mouvement uniformément accéléré (1449). C'est en effet ce que vérifie l'expérience, qui a de plus fait voir que l'accélération de vitessse j (1435), qu'on a l'habitude de représenter par g lorsqu'il s'agit de la pesanteur, était, par seconde, à l'Observatoire de Paris, et en réduisant les observations au niveau de la mer, égale à $9^{m},8088$; elle est d'environ $0^{m},03$ plus petite à l'équateur. Dans la pratique, on peut faire $g = 9^{m},81$ et $\frac{1}{g} = 0,102$.

Table des valeurs les plus approchées, à moins d'une unité décimale du cinquième ordre, des 9 premiers multiples de g, g^2, g^3, $\sqrt{g}$, $\sqrt[3]{g}$, $\frac{1}{g}$, $\frac{1}{g^2}$, $\frac{1}{g^3}$, $\sqrt{\frac{1}{g}}$ *et* $\sqrt[3]{\frac{1}{g}}$, qu'on rencontre fréquemment dans les formules.

	g	g^2	g^3	$\sqrt{g}$	$\sqrt[3]{g}$
1	9,8088	96,21256	943,72973	3,13190	2,14062
2	19,6176	192,42511	1887,45947	6,26380	4,28123
3	29,4264	288,63767	2831,18920	9,39570	6,42185
4	39,2352	384,85023	3774,91893	12,52760	8,56246
5	49,0440	481,06279	4718,64867	15,65950	10,70308
6	58,8528	577,27534	5662,37840	18,79140	12,84369
7	68,6616	673,48790	6606,10813	21,92330	14,98431
8	78,4704	769,70046	7549,83787	25,05520	17,12492
9	88,2792	865,91302	8493,56760	28,18710	19,26554

	$\frac{1}{g}$	$\frac{1}{g^2}$	$\frac{1}{g^3}$	$\sqrt{\frac{1}{g}}$	$\sqrt[3]{\frac{1}{g}}$
1	0,10195	0,01039	0,00106	0,31929	0,46716
2	0,20390	0,02079	0,00212	0,63859	0,93431
3	0,30585	0,03118	0,00318	0,95788	1,40147
4	0,40780	0,04157	0,00424	1,27718	1,86862
5	0,50975	0,05197	0,00530	1,59647	2,33578
6	0,61170	0,06236	0,00636	1,91577	2,80293
7	0,71364	0,07276	0,00742	2,23506	3,27009
8	0,81559	0,08315	0,00848	2,55436	3,73724
9	0,91754	0,09354	0,00954	2,87365	4,20440

$$\sqrt{2g} = 4{,}42918, \quad \frac{1}{4g^2} = 0{,}0026, \quad \sqrt{\frac{1}{2g}} = 0{,}22578, \quad \sqrt{\frac{2}{g}} = 0{,}45155.$$

$$\text{Log}\, g = 0{,}9916159, \quad \log 2g = 1{,}2926459, \quad \log \frac{1}{g} = \bar{1}{,}0083841, \quad \log \frac{1}{g^2} = \bar{2}{,}0167682,$$

$$\log \frac{1}{2g} = \bar{2}{,}7073541, \quad \log \frac{1}{4g^2} = \bar{3}{,}4147082, \quad \log \sqrt{\frac{1}{g}} = \bar{1}{,}5041921,$$

$$\log \sqrt{\frac{1}{2g}} = \bar{1}{,}3536771, \quad \log \sqrt{\frac{2}{g}} = \bar{1}{,}6547071.$$

Lorsque le corps se meut dans l'air, il éprouve, pour déplacer ce gaz, une résistance qui diminue son mouvement. Mais lorsque la vitesse du corps n'est pas considérable et que sa section est faible par rapport à son poids, on peut supposer, dans les cas ordinaires de la chute des corps, qu'il se meut, sans erreur sensible, dans l'air comme dans le vide.

Les formules du mouvement uniformément varié sont, pour le cas de la pesanteur :

1° $$g = \frac{dv}{dt} = 9^{m}{,}8088; \qquad (1435)$$

2° $$v = \pm v_0 \pm gt; \qquad (1436)$$

3° $$E = \pm E_0 \pm v_0 t \pm \frac{1}{2} g t^2. \qquad (1437)$$

Faisant $E_0 = 0$ et $v_0 = 0$ dans cette dernière formule, elle devient, en prenant seulement le signe $+$,

$$E = \frac{1}{2} g t^2, \qquad (a)$$

en remplaçant g par sa valeur en fonction de v,

$$E = \frac{1}{2} v t.$$

Ce qui avait déjà été établi pour un mouvement uniformément accéléré quelconque (1°, 1437).

Pour $t = 1''$, la formule (a) donne

$$E = \frac{1}{2} g = 4^{m}{,}9044.$$

Ce qui fait voir que l'*espace parcouru pendant la première seconde du mouvement, sous l'action de la pesanteur, est* $4^{m}{,}9044$, *moitié de la vitesse acquise après ce temps* (1°, 1437).

1446. *Application de ces formules à la chute des corps.*

La vitesse initiale v_0 étant nulle, c'est-à-dire le corps partant du repos, et $t = 5''$ étant la durée de la descente, la vitesse acquise après ce temps est (2°, 1445)

$$v = gt = 9{,}8088 \times 5 = 49^{m}{,}044. \qquad (a)$$

Pour savoir quelle doit être la durée de la chute pour que le mobile acquière une vitesse déterminée $v = 49^m,044$, on remarque que la formule (a) donne

$$t = \frac{v}{g} = \frac{49,044}{9,8088} = 5''. \qquad (a')$$

Supposant $E_0 = 0$, h étant l'espace parcouru, c'est-à-dire la hauteur de laquelle le corps est tombé après un temps $t = 5''$, on a (3°, 1445)

$$h = \frac{1}{2} gt^2 = \frac{1}{2} \times 9,8088 \times 5^2 = 122^m,61. \qquad (b)$$

Pour avoir le temps que mettra un corps pour tomber d'une hauteur $h = 122^m,61$, de la formule (b) on tire

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 122,61}{9,8088}} = 5''. \qquad (b')$$

Quant à la vitesse qu'acquiert un corps en tombant d'une hauteur donnée $122^m,61$, remplaçant dans la formule (a) t par sa valeur (b'), on a

$$v = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9,8088 \times 122,61} = 49^m,044. \qquad (c)$$

Pour avoir la hauteur de laquelle doit tomber un corps pour acquérir une vitesse donnée $v = 49^m,044$ par seconde, de la formule (c) on tire

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{49,044^2}{2 \times 9,8088} = 122^m,61. \qquad (c')$$

Ces formules, qui sont d'un usage continuel en mécanique, donnent : (a), la vitesse en fonction du temps ; (a'), le temps en fonction de la vitesse ; (b), la hauteur de chute en fonction du temps ; (b'), le temps en fonction de la hauteur de chute ; (c), la vitesse en fonction de la hauteur de chute ; (c'), la hauteur de chute en fonction de la vitesse.

Ces formules sont données pour le cas de la pesanteur ; mais des formules des n°s 1436 et 1437, et en opérant comme ci-dessus, on en conclurait de tout à fait semblables pour un mouvement uniformément varié quelconque ; g serait simplement remplacé par j. Nous avons préféré, sans double emploi, donner celles relatives à la pesanteur, qui sont d'un usage plus fréquent dans la pratique.

Tableau des valeurs de $v = gt$ et des hauteurs de chute $h = \frac{1}{2} gt^2 = \frac{1}{2} vt$ correspondant à différentes valeurs du temps t.

VALEURS DE			VALEURS DE			VALEURS DE		
t	v	h	t	v	h	t	v	h
0″,1	0m,980 88	0m,049 044	1″,8	17m,655 94	15m,890 256	3″,5	34m,330 80	60m,078 900
0 ,2	1 ,961 76	0 ,196 176	1 ,9	18 ,636 72	17 ,704 884	3 ,6	35 ,311 68	63 ,561 024
0 ,3	2 ,942 64	0 ,441 396	2 ,0	19 ,617 60	19 ,617 600	3 ,7	36 ,292 56	67 ,141 236
0 ,4	3 ,923 52	0 ,784 704	2 ,1	20 ,598 48	21 ,628 404	3 ,8	37 ,273 44	70 ,819 536
0 ,5	4 ,904 40	1 ,226 100	2 ,2	21 ,579 36	23 ,737 296	3 ,9	38 ,254 32	74 ,595 924
0 ,6	5 ,885 28	1 ,765 584	2 ,3	22 ,560 24	25 ,944 276	4 ,0	39 ,235 20	78 ,470 400
0 ,7	6 ,866 16	2 ,403 156	2 ,4	23 ,541 12	28 ,249 344	4 ,1	40 ,216 08	82 ,442 964
0 ,8	7 ,847 04	3 ,138 816	2 ,5	24 ,522 00	30 ,652 500	4 ,2	41 ,196 96	86 ,513 616
0 ,9	8 ,827 92	3 ,972 564	2 ,6	25 ,502 88	33 ,153 744	4 ,3	42 ,177 84	90 ,682 356
1 ,0	9 ,808 80	4 ,904 400	2 ,7	26 ,483 76	35 ,753 076	4 ,4	43 ,158 72	94 ,949 184
1 ,1	10 ,789 68	5 ,934 324	2 ,8	27 ,464 64	38 ,450 496	4 ,5	44 ,139 60	99 ,314 100
1 ,2	11 ,770 56	7 ,062 336	2 ,9	28 ,445 52	41 ,246 004	4 ,6	45 ,120 48	103 ,777 104
1 ,3	12 ,751 44	8 ,288 436	3 ,0	29 ,426 40	44 ,139 600	4 ,7	46 ,101 36	108 ,338 196
1 ,4	13 ,732 32	9 ,612 624	3 ,1	30 ,407 28	47 ,131 284	4 ,8	47 ,082 24	112 ,997 376
1 ,5	14 ,713 20	11 ,034 900	3 ,2	31 ,388 16	50 ,221 056	4 ,9	48 ,063 12	117 ,754 644
1 ,6	15 ,694 08	12 ,555 264	3 ,3	32 ,369 04	53 ,408 916	5 ,0	49 ,044 00	122 ,610 000
1 ,7	16 ,674 96	14 ,173 716	3 ,4	33 ,349 92	56 ,694 864			

Les vitesses étant proportionnelles aux temps et les hauteurs aux carrés des temps, selon que les temps de la première colonne seront 10 fois plus grands ou 10 fois plus petits, on multipliera ou l'on divisera les valeurs correspondantes de v par 10 et celles de h par 100. Ainsi, par exemple, pour $t = 0'',15$, on a $v = 1^m,471\,320$ et $h = 0^m,110\,349$, et pour $t = 15''$ on a $v = 147^m,132$ et $h = 1103^m,490$.

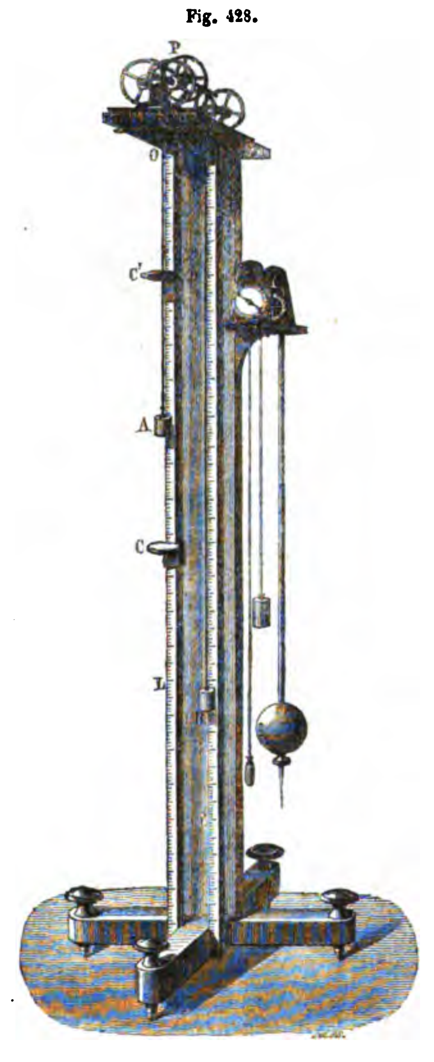
1447. *Détermination expérimentale des lois du mouvement uniformément varié, et vérification de la loi de l'inertie* (1420). En observant le mouvement d'un corps tombant librement sous l'action de la pesanteur, on remarque qu'entre l'espace parcouru, la vitesse et le temps, il existe les relations du n° 1445; ce qui prouve que le mouvement est uniformément varié, et que, par conséquent, l'action continue d'une force constante sur un corps libre produit ce mouvement (1449).

A cause de la rapidité du mouvement d'un corps qui tombe librement, on conçoit que ces observations ne peuvent fournir que des résultats plus ou moins approchés de la vérité. A l'aide de la machine d'Atwood, on est parvenu à rendre le mouvement aussi lent qu'on le désire (1452), sans qu'il cesse d'être produit par l'action continue d'une force constante sur un corps que l'on peut considérer comme étant tout à fait libre; alors les résultats ont été observés en toute rigueur, et ils ont vérifié les lois posées aux n°s 1436 et 1437 pour le mouvement uniformément accéléré.

Quant à la valeur de g (1445), qui ne peut être fournie par la machine d'Atwood, on l'a déterminée très-simplement et avec la plus grande rigueur à l'aide du pendule (Voir *pendule simple*).

La machine d'Atwood, ainsi nommée du nom de son inventeur, professeur de chimie à Cambridge à la fin du siècle dernier, se compose d'une colonne en bois de 2^m,30 environ de hauteur, au sommet de laquelle est une poulie à gorge en cuivre P, sur laquelle passe un fil de soie soutenant à ses extrémités deux cylindres métalliques A et B de poids égaux. Le fil de soie est très-fin, pour qu'on puisse négliger son poids et sa roideur, et afin que la poulie sur laquelle il passe soit aussi mobile que possible, son axe, au lieu de reposer sur un coussinet fixe, s'appuie sur les jantes croisées de 4 roues mobiles, ce qui remplace son frottement de glissement par son frottement de roulement au pourtour des 4 roues, et par le frottement de glissement des axes de ces roues, lequel, à cause de la faible vitesse de ces axes, n'absorbe qu'un travail négligeable. Tout le système est supporté par un socle muni de 4 vis calantes qui permettent de rendre les règles graduées verticales.

Fig. 428.



Le cylindre A peut se mouvoir verticalement le long d'une règle en bois L, divisée en parties d'égale longueur, et en un point quelconque de laquelle on peut fixer deux curseurs métalliques, l'un C muni d'un disque plein, et l'autre C' d'un anneau dans lequel peut passer facilement le cylindre A. A la colonne est fixé un appareil chronométrique qui bat les secondes, et qui, au moment où l'aiguille arrive en un point convenu du cadran, décroche une détente qui retient une plaque à charnière maintenant le dessous du cylindre A à la hauteur du zéro de la règle graduée L.

Comme on a placé une petite plaque additionnelle sur le cylindre A, son poids communique alors à chacun des cylindres A et B un mouve-

ment qui est uniformément accéléré. En effet, plaçant par tâtonnement le dessus du curseur plein à une distance du zéro de l'échelle L, telle que le bruit du pendule à la fin de la 1re seconde coïncide avec celui que fait le cylindre A en frappant sur le curseur, et recommençant l'expérience successivement pour 2, 3, 4... secondes, on trouve que si dans la première expérience, c'est-à-dire pendant une seconde, le cylindre A a parcouru 15 divisions de l'échelle, par exemple, dans les expériences suivantes, c'est-à-dire pendant 2, 3, 4... secondes, il en parcourt respectivement 15 × 4, 15 × 9, 15 × 16... ; ce qui montre bien que les espaces parcourus sont proportionnels aux carrés des temps, et que par conséquent le mouvement est uniformément accéléré.

Pour déterminer la vitesse après une seconde, par exemple, on remplace le curseur plein par le curseur annulaire, que l'on dispose de manière que du dessus de ce curseur au-dessus du cylindre A il y ait 15 divisions de l'échelle, et l'on place le curseur plein de manière que sa face supérieure se trouve à 30 divisions plus la hauteur du cylindre A au-dessous du dessus du curseur annulaire. Faisant alors l'expérience, les battements du pendule, après la 1re et la 2e seconde, coïncident, le premier avec le choc de la plaque additionnelle sur le curseur annulaire, et le second avec celui du cylindre A sur le curseur plein. Or la plaque additionnelle, qui a produit le mouvement accéléré pendant la 1re seconde, se trouvant arrêtée par le curseur circulaire, le mouvement a été uniforme pendant la 2e seconde, et l'espace de 30 divisions qui a été parcouru est la vitesse acquise à la fin de la 1re seconde, vitesse qui est bien le double de l'espace parcouru pendant la 1re seconde.

Si au lieu de prendre des temps de 1 seconde, on en prenait de 2 secondes, on trouverait de même que le dessus du curseur annulaire doit être placé à 60 divisions au-dessous de la base supérieure du cylindre A à son point de départ, et à 120 divisions plus la hauteur du cylindre A au-dessus de la face supérieure du curseur plein.

La durée de l'action du poids additionnel restant de 1 seconde, si l'on dispose le curseur plein de manière que l'intervalle entre le choc de la plaque additionnelle sur le curseur annulaire et celui du cylindre A sur le curseur plein, au lieu d'être de 1 seconde, soit de 2 secondes, le nombre des divisions parcourues entre ces deux chocs est de 60 au lieu de 30; si ce temps est de 3 secondes, le nombre des divisions parcourues est de 90, et ainsi de suite. Ce qui montre que la vitesse devient constante sitôt que l'action du poids additionnel cesse, et vérifie la loi de l'inertie (1420).

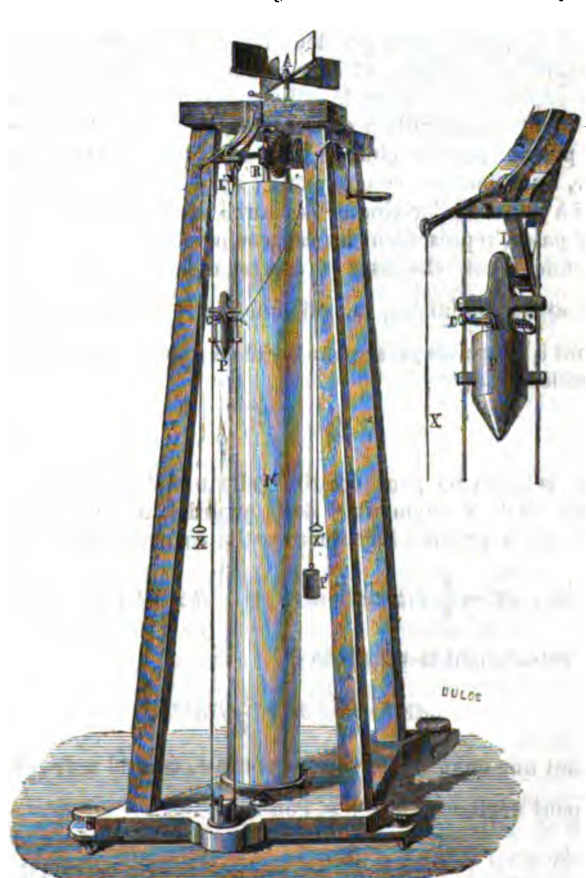
La machine étant garnie d'une seconde règle L', en y fixant un second curseur annulaire sur lequel est disposée une plaque additionnelle que prend le cylindre B en montant, au moment où le cylindre A quitte sa plaque additionnelle, le mouvement devient uniformément retardé, et si les deux plaques additionnelles ont le même poids, le cylindre B s'élève sensiblement d'un nombre de divisions égal à celui dont est descendu le cylindre A pendant qu'il était sollicité par sa plaque additionnelle; ces deux nombres seraient égaux sans les frottements

des axes, la roideur du fil et la résistance de l'air; de plus ces nombres de divisions seraient parcourus dans le même temps, et la vitesse repasserait par les mêmes valeurs dans un ordre inverse.

Ainsi en lançant un projectile de bas en haut, suivant la verticale, et avec une certaine vitesse initiale v_0, il monte à une hauteur telle, qu'en redescendant il reprend la même vitesse v_0, mais de signe contraire; la durée de la montée est égale à celle de la descente, et en général des espaces égaux pris à la même hauteur, l'un sur la montée l'autre sur la descente, sont parcourus dans le même temps; enfin à la même hauteur le mobile possède des vitesses égales et de signes contraires en montant et en descendant. Ces relations s'établiraient facilement comme applications des formules du n° 1446.

M. *Morin*, d'après une idée première de M. Poncelet, a fait construire

Fig. 429.



un appareil qui donne d'une manière continue les espaces parcourus dans le mouvement uniformément accéléré. Un poids cylindro-conique en fer P, tombant librement, est muni d'un crayon ou pinceau C, qui laisse une trace continue sur une feuille de papier recouvrant un cylindre en bois M tournant d'un mouvement uniforme autour de son axe vertical. Ce cylindre a environ $0^m,40$ de diamètre et $2^m,90$ de hauteur; il est mis en mouvement par un poids P' suspendu à un cordon, lequel en se déroulant fait tourner une roue dentée R, qui commande des vis sans fin montées sur l'axe du cylindre M et sur celui d'une roue à ailettes A. En tirant un cordon X', on dégage le cliquet d'une roue à rochet, et le système se met en marche. D'abord le mouvement est accéléré; mais comme la résistance que la roue A éprouve de la part de l'air augmente rapidement avec la vitesse, bientôt on peut considérer le mouvement du cylindre M et de tout l'appareil comme étant uniforme, ce qui a lieu quand le poids P' a parcouru les 2/3 de sa course. Alors, tirant un cordon X, on fait échapper le poids P du levier coudé L qui le retenait. Ce poids, guidé par deux fils de fer tendus, descend librement suivant la verticale, et son crayon trace une courbe sur une feuille de papier qui recouvre le cylindre. En laissant tomber le poids P avant de mettre l'appareil en mouvement, on a tracé la génératrice du cylindre passant par l'origine de la courbe. Déroulant alors la feuille de papier, on obtient une courbe plane (*fig.* 422), dont les ordonnées y, comptées à partir de l'origine de la courbe sur la génératrice du cylindre qui y passe, représentent les espaces parcourus pendant des temps proportionnels aux abscisses x correspondantes. En mesurant ces abscisses et ces ordonnées, on voit que $\frac{1}{2}j$ représentant l'espace correspondant à l'abscisse prise pour unité de temps, on a bien, pour un temps quelconque,

$$E = \frac{1}{2}jt^2. \qquad (1445)$$

De cette relation on peut déduire celle $v=jt$ sans nouvelle expérience. En effet, E augmentant de la quantité infiniment petite dE, t augmente de la quantité infiniment petite correspondante dt, et l'on a

$$E + dE = \frac{1}{2}j(t+dt)^2 = \frac{1}{2}jt^2 + jt \times dt + \frac{1}{2}j(dt)^2;$$

d'où, en retranchant la valeur de E,

$$dE = jt \times dt + \frac{1}{2}j(dt)^2.$$

$(dt)^2$ étant une quantité infiniment petite du second ordre par rapport à dt, on peut négliger $\frac{1}{2}j(dt)^2$, et l'on a

$$\frac{dE}{dt} \text{ ou } v = jt. \qquad (1431,\ 1436)$$

RELATIONS ENTRE LES FORCES, LES VITESSES ET LES MASSES DES MOBILES SOLLICITÉS.

1448. Nous allons supposer que la force agit de la même manière sur toutes les molécules du corps, comme si toute la matière qui compose le corps était concentrée au point d'application de la force. Cette concentration idéale de la matière constitue ce qu'on appelle un *point matériel.*

1449. *L'action continue d'une force constante sur un corps produit un mouvement uniformément accéléré.* C'est ce qui résulte du n° 1447, et ce que l'on peut établir d'une manière générale comme il suit : que le corps parte du repos, ou qu'il possède déjà une vitesse v_0 au commencement du temps t, la force F sollicitant le mobile pendant le premier instant dt, elle produit une accélération de vitesse dv (1432), de sorte qu'après le temps dt la vitesse est $(v_0 + dv)$. Si la force cessait son action, le mobile se mouvrait avec la vitesse constante $(v_0 + dv)$; mais comme elle agit pendant le deuxième instant dt comme pendant le premier, elle augmente la vitesse de la même quantité dv, de sorte qu'après le temps $2dt$ la vitesse est $v_0 + 2dv$. De même, après les temps $3dt$, $4dt$, ..., t, la vitesse est respectivement

$$v_0 + 3dv, \quad v_0 + 4dv, \ldots, \quad v_0 + dv \times \frac{t}{dt} = v_0 + jt. \qquad (1435)$$

Ce qui fait bien voir que le mouvement est uniformément accéléré. Il serait uniformément retardé, si, à chaque instant, dv, au lieu de s'ajouter à v_0, s'en retranchait, c'est-à-dire si la force agissait en sens contraire de la vitesse v_0.

1450. *Ainsi, lorsqu'un corps possède un mouvement uniforme, c'est qu'il n'est sollicité par aucune force, ou que les forces qui le sollicitent se feraient statiquement équilibre si le corps était en repos* (1424). Dans ces conditions d'équilibre en mouvement, on dit que le corps est en *équilibre dynamique;* la force qui a imprimé le mouvement au corps a cessé d'agir ou a été détruite par une autre force.

1451. D'après ce qui a été dit aux n°s 1447 et 1449, on peut poser, comme principe expérimental, *qu'une force produit le même effet sur un corps possédant déjà une vitesse initiale de même direction que la force, que si le corps partait du repos.* Les effets de la force et de la vitesse initiale coexistent sans se modifier; ils ne font que s'ajouter ou se retrancher selon que la force et la vitesse initiale ont le même sens ou un sens contraire.

1452. On admet généralement comme axiome *qu'un nombre quelconque de forces de même direction et de même sens appliquées à un même point s'ajoutent.* C'est en effet ce qu'on vérifie au moyen des balances, des dynamomètres, et mieux encore à l'aide de la machine d'Atwood (1447), avec laquelle variant successivement les poids se faisant équilibre et le poids moteur, mais de manière que la somme des



trois poids soit toujours la même, on voit que, suivant que le poids moteur est double, triple, quadruple..., l'accélération de vitesse est double, triple, quadruple...

Si, par exemple, dans une première expérience, les deux corps se faisant équilibre pèsent chacun 220 grammes et que le poids additionnel soit de 10 grammes, ce qui fait un poids total de 450 grammes, et que dans une deuxième expérience le poids moteur soit de 20 grammes, tandis que les corps en équilibre pèsent chacun $\frac{450-20}{2}=215$ grammes, l'accélération ou la vitesse acquise après une seconde sera dans la deuxième expérience double de ce qu'elle a été dans la première, c'est-à-dire que l'espace parcouru pendant une seconde dans la deuxième expérience sera double de ce qu'il a été dans la première (1437).

Si le poids moteur devenait 30 grammes, et que le poids total fût toujours 450 grammes, ce qui correspond à $\frac{450-30}{2}=210$ grammes pour chacun des poids en équilibre, l'accélération serait triple de la valeur de la première expérience.

Ces expériences confirment bien que plusieurs forces de même sens appliquées en un même point peuvent être remplacées par une force unique égale à leur somme, et qui est par conséquent leur résultante (1423).

1453. On dit que *deux forces sont égales lorsqu'elles sont capables de communiquer la même accélération de vitesse à un même point matériel* (1448).

1454. *Deux forces quelconques* F *et* f *sont entre elles comme les accélérations de vitesse* J *et* j *qu'elles communiquent à un même point matériel.*

1° D'abord cette proportionnalité existe quand $J=j$, puisqu'alors $F=f$.

2° Supposant que $J=nj$, n étant un nombre entier, chacune des n accélérations j qui composent J pouvant être supposée produite par une force f, d'après ce qui a été établi au n° 1452, leur ensemble J le sera par la force nf; d'où $F=nf$, et par suite

$$\frac{F}{nf}=\frac{J}{nj} \quad \text{ou} \quad \frac{F}{f}=\frac{J}{j}.$$

Cette proportion subsisterait évidemment encore si l'on avait $j=nJ$.

3° Si J et j sont dans un rapport quelconque, mais commensurable (211), si, par exemple, une troisième accélération j' est contenue n fois dans J et n' fois dans j ($J=nj'$ et $j=n'j'$), n et n' étant des nombres entiers, appelant f' la force capable de communiquer au mobile l'accélération j', on a d'après le 2°

$$\frac{F}{f'}=\frac{J}{j'}, \quad \text{et} \quad \frac{f'}{f}=\frac{j'}{j}.$$

Multipliant ces proportions terme à terme, il vient encore

$$\frac{F}{f}=\frac{J}{j}.$$

4° Enfin, si les accélérations J et j sont incommensurables entre elles, cette proportion subsiste encore.

D'abord il est évident que selon qu'on voudra communiquer à un même mobile une accélération plus ou moins grande, la force devra être plus ou moins grande.

Cela établi, divisant l'accélération j en un nombre entier n de parties égales, la n° partie de j sera contenue un nombre entier n' fois dans J, plus un reste moindre que $\frac{j}{n}$, et le rapport $\frac{J}{j}$ sera compris entre les deux rapports

$$\frac{n' \times \frac{j}{n}}{j} \quad \text{et} \quad \frac{(n'+1) \times \frac{j}{n}}{j}.$$

Le rapport $\frac{F}{f}$ est aussi compris entre ces deux rapports; par conséquent on a

$$\frac{F}{f} - \frac{J}{j} < \frac{(n'+1) \times \frac{j}{n}}{j} - \frac{n' \times \frac{j}{n}}{j},$$

ou

$$\frac{F}{f} - \frac{J}{j} < \frac{1}{n}.$$

$\frac{1}{n}$ étant une quantité aussi petite qu'on le désire, puisque n est un nombre arbitraire et par conséquent aussi grand que l'on veut, on a donc bien encore

$$\frac{F}{f} = \frac{J}{j}.$$

1455. Si le mobile est parti du repos, les vitesses qu'il a acquises après le même temps t sont $V = Jt$ et $v = jt$; d'où l'on conclut

$$\frac{V}{v} = \frac{J}{j},$$

et par suite (1454)

$$\frac{F}{f} = \frac{V}{v}.$$

Ainsi, *quand le mobile part du repos, les forces sont entre elles comme les vitesses qu'il possède après le même temps.*

1456. Dans cette même hypothèse, les espaces parcourus étant aussi proportionnels aux vitesses acquises (1°, 1437), *les forces sont donc encore entre elles comme ces espaces.* Du reste, les espaces parcourus après le même temps t étant

$$E = \frac{1}{2} Jt^2 \quad \text{et} \quad e = \frac{1}{2} jt^2,$$

on a

$$\frac{E}{e} = \frac{J}{j},$$

et par suite (1454)

$$\frac{F}{f} = \frac{E}{e}.$$

1457. Deux forces quelconques étant entre elles comme les accélérations qu'elles communiquent à un même point matériel, l'une f des forces étant le poids P du mobile, on a (1445)

$$\frac{F}{P} = \frac{J}{g}. \qquad (a)$$

1[er] *problème.* Quelle est l'accélération J communiquée à un mobile du poids $P = 25^k$ par une force $F = 10^k$?

La proportion précédente donne

$$J = g\,\frac{F}{P} = 9{,}8088 \times \frac{10}{25} = 3^m{,}9235.$$

Ayant l'accélération, la vitesse acquise après un temps $t = 8''$, par exemple, est (1436)

$$v = Jt = g\,\frac{F}{P}\,t = 3{,}9235 \times 8 = 31^m{,}388.$$

L'espace parcouru après les 8″ de mouvement, le corps partant du repos, est (1437)

$$E = \frac{1}{2}\,vt = \frac{1}{2}\,Jt^2 = \frac{1}{2}\,g\,\frac{F}{P}\,t^2 = \frac{1}{2} \times 31{,}388 \times 8 = 125^m{,}552.$$

2[e] *problème.* Quelle force F faut-il appliquer à un mobile du poids de 25^k partant du repos, pour lui faire parcourir $125^m{,}552$ pendant les 8 premières secondes du mouvement?

On a d'abord (1437)

$$v = \frac{2E}{t} = \frac{2 \times 125{,}552}{8} = 31^m{,}388;$$

puis

$$J = \frac{v}{t} = \frac{2E}{t^2} = \frac{31{,}388}{8} = 3^m{,}9235,$$

et la proportion (a) donne

$$F = P \times \frac{J}{g} = P \times \frac{v}{gt} = P \times \frac{2E}{gt^2} = 25 \times 3{,}9235 \times 0{,}102 = 10^k.$$

1458. P et P′ étant les poids d'un même mobile en deux lieux différents de la surface du globe, où les accélérations dues à la pesanteur

sont respectivement g et g' (1439, 1443), on a (1454)

$$\frac{P}{P'} = \frac{g}{g'}.$$

Ainsi *les poids d'un même corps en différents lieux du globe sont entre eux comme les accélérations dues à la pesanteur en ces mêmes lieux.*

De la proportion précédente on conclut

$$\frac{P}{g} = \frac{P'}{g'}.$$

Ce qui montre que *le quotient du poids d'un corps en un lieu quelconque du globe par l'accélération due à la pesanteur en ce lieu est constant.*

1459. Ce quotient constant est ce qu'on nomme en mécanique la *masse* du mobile. Cette quantité, qui est d'une espèce particulière, puisqu'elle n'est autre chose qu'un quotient, peut être soumise au calcul comme toutes les autres quantités. En la désignant par M, on a

$$M = \frac{P}{g}, \quad \text{d'où} \quad P = Mg \quad \text{et} \quad g = \frac{P}{M}.$$

Ces formules font voir :

1° *Que la masse d'un corps est égale au quotient de son poids divisé par l'accélération* g *due à la pesanteur.*

Pour $P = 1$, on a $$M = \frac{1}{g} = \frac{1}{9,8088} = 0,102. \qquad (1445)$$

Ainsi la masse d'un corps du poids de 1 kilog. est égale à 0,102.

2° *Que le poids d'un corps est égal à sa masse multipliée par l'accélération* g *due à la pesanteur.*

Pour $M = 1$, on a $$P = g = 9^k,8088.$$

Ce qui montre que le poids d'un corps ayant l'unité pour masse est $9^k,8088$.

3° *Que l'accélération* g *due à la pesanteur est égale au poids du corps divisé par sa masse.*

1460. Dans un même lieu, et en général partout où la valeur de g est la même, une autre masse donne encore $m = \frac{p}{g}$, et l'on en conclut

$$\frac{M}{m} = \frac{P}{p}.$$

Ce qui fait voir que dans ce cas *les masses sont entre elles comme les poids.*

1461. Remplaçant dans la formule (a) du n° 1457 le poids P par sa valeur Mg, on en conclut

$$F = MJ. \qquad (a)$$

Ce qui montre qu'*une force* F *se mesure par le produit de la masse* M *du mobile par l'accélération* J *que cette force est capable de communiquer au mobile dans l'unité de temps.*

De la formule (a) on conclut

$$M = \frac{F}{J} \quad \text{et} \quad J = \frac{F}{M}.$$

Résultats faciles à énoncer verbalement, et qui généralisent ceux du n° 1459.

1462. Pour une autre force f, on aurait également

$$f = mj.$$

Divisant membre à membre l'équation précédente (a) par cette dernière, on a

$$\frac{F}{f} = \frac{MJ}{mj}. \qquad (b)$$

Ce qui montre que *deux forces quelconques* F *et* f *sont entre elles comme les produits des masses* M *et* m *par les accélérations* J *et* j.

Lorsque $J = j$, la proportion précédente devient

$$\frac{F}{f} = \frac{M}{m}. \qquad (b')$$

Ainsi *lorsque les forces communiquent la même accélération de vitesse aux mobiles, elles sont entre elles comme les masses.*

Quand $M = m$, on a

$$\frac{F}{f} = \frac{J}{j}. \qquad (b'')$$

Ce qui a déjà été établi au n° 1454.

Dans le cas où les deux forces sont égales, de la proportion (b) on conclut

$$\frac{m}{M} = \frac{J}{j}. \qquad (b''')$$

Ce qui montre que *les accélérations sont en raison inverse des masses.*

1463. Quand les mobiles partent du repos, les vitesses acquises après le même temps étant proportionnelles aux accélérations (1455), remplaçant le rapport des accélérations par celui des vitesses dans les proportions (b), (b''), (b'''), elles deviennent respectivement

$$\frac{F}{f} = \frac{MV}{mv}, \quad \frac{F}{f} = \frac{V}{v}, \quad \frac{m}{M} = \frac{V}{v}.$$

Résultats qui s'énoncent comme ceux du numéro précédent, en remplaçant les accélérations par les vitesses.

Cette dernière proportion et celle (b''') montrent que, selon que la

masse du mobile est plus grande, la vitesse que lui communique une même force constante dans un temps donné est plus petite ; ce qui fait voir que la signification du mot masse en mécanique est la même que celle qu'on lui attribue dans le langage vulgaire ; on dit en effet que la masse d'un corps est plus ou moins grande, que ce corps est plus ou moins massif, selon que pour le soulever ou le faire mouvoir on est obligé de produire un effort plus ou moins grand ; mais ce qu'il y avait de vague dans cette définition a disparu, et la masse est une quantité qui peut être soumise au calcul, c'est-à-dire évaluée en nombre (1459).

1464. Dans un même lieu du globe ou dans tous les lieux où la valeur de g est la même, les poids étant proportionnels aux masses (1460), on peut remplacer le rapport des masses par celui des poids dans les proportions (b), (b') et (b'') du n° 1462, qui deviennent respectivement

$$\frac{F}{f}=\frac{PJ}{pj},\quad \frac{F}{f}=\frac{P}{p},\quad \frac{p}{P}=\frac{J}{j}.$$

Résultats qui s'énoncent comme ceux du n° 1462 en remplaçant les masses par les poids.

On peut encore dans ces dernières proportions, quand les mobiles partent du repos, remplacer le rapport des accélérations par celui des vitesses (1463) ; ce qui donne

$$\frac{F}{f}=\frac{PV}{pv},\quad \frac{p}{P}=\frac{V}{v}.$$

1465. La valeur de g ne variant pas sensiblement d'un lieu à un autre, il en résulte qu'en général les formules précédentes peuvent être appliquées sans tenir compte de cette variation (1458).

IMPULSION D'UNE FORCE. QUANTITÉ DE MOUVEMENT.

1466. L'*impulsion d'une force* est le produit de son intensité par la durée de son action. Ainsi une force de 12^k agissant sur un mobile pendant $8''$ produit une impulsion représentée par $12 \times 8 = 96$.

1467. Le produit mv de la masse m d'un mobile par la vitesse v qu'il possède prend le nom de *quantité de mouvement*. Le poids d'un corps étant de 50^k, d'où il résulte que sa masse est (1459) $\frac{1}{g} \times P = 0{,}102 \times 50 = 5{,}10$, et la vitesse qu'il possède étant de 30^m, sa quantité de mouvement est représentée par

$$mv = 5{,}10 \times 30 = 153.$$

1468. *Égalité entre l'impulsion d'une force et la quantité de mouvement du point matériel sollicité* (1448). Lorsque le mouvement est uniformément accéléré, on a (1436), en remarquant que l'accélération $j=\frac{F}{m}$ (1461),

$$v = v_0 + \frac{F}{m} t;$$

d'où l'on tire

$$Ft = mv - mv_0. \qquad (a)$$

Ft est l'impulsion; elle a le signe de F.

mv_0 et mv sont respectivement les quantités de mouvement que possède le mobile au commencement et à la fin du temps; elles prennent les signes de v_0 et v.

L'équation (a) fait voir que *l'impulsion est toujours égale à la différence des quantités de mouvement, et qu'elle a le même signe que cette différence.* Ce que l'on peut énoncer en disant que *l'impulsion est toujours égale au gain ou à la perte de quantité de mouvement.*

Considérant toujours la vitesse initiale v_0 comme positive, il y aura gain lorsque la force F sera positive, c'est-à-dire lorsqu'elle agira dans le sens de v_0, et perte lorsqu'elle sera négative.

Trois quelconques des quatre quantités F, t, m et $(v - v_0)$ étant connues, l'équation (a), mise sous la forme

$$Ft = m(v - v_0),$$

donne la quatrième, et l'on voit qu'une perte de vitesse ou de quantité de mouvement est produite par une force égale et contraire à celle qui produit un gain égal dans le même temps.

Selon qu'on a $v_0 = 0$ ou $v = 0$, c'est-à-dire selon que le mobile part du repos ou doit se réduire au repos, la formule (a) devient

$$Ft = mv \quad \text{ou} \quad Ft = -mv_0. \qquad (b)$$

Ce qui fait voir encore plus simplement que *l'impulsion d'une force est égale à la quantité de mouvement que cette force communique ou fait perdre au mobile qu'elle sollicite pendant la durée de son impulsion.*

1re application. *Trouver la force* F *capable de réduire au repos en* 5 *secondes un mobile tout à fait libre dont le poids est de* 50 *kilogrammes et la vitesse de* 15 *mètres par seconde.*

Ce problème rentre dans le cas de la seconde formule (b), qui devient, en remplaçant les lettres par leurs valeurs,

$$F \times 5 = -0{,}102 \times 50 \times 15, \text{ d'où } F = -\frac{0{,}102 \times 50 \times 15}{5} = -15^{k}{,}30.$$

Si le mobile partait du repos, la force qui lui communiquerait en 5 secondes la vitesse de 15 mètres par seconde serait donnée par la première formule (b), et l'on aurait

$$F \times 5 = 0{,}102 \times 50 \times 15 = 15^{k}{,}30.$$

2e application. *Trouver le temps que mettra une force de* $15^{k}{,}30$ *pour réduire au repos un mobile du poids de* 50 *kilogrammes animé d'une vitesse de* 15 *mètres par seconde.*



La force étant nécessairement négative, la seconde formule (*b*) devient

$$-15{,}30\times t=-0{,}102\times 50\times 15,\quad \text{d'où}\quad t=\frac{0{,}102\times 50\times 15}{15{,}30}=5''.$$

Si le mobile partait du repos, le temps que mettrait une force de $15^k{,}30$ pour lui communiquer une vitesse de 15 mètres par seconde serait donnée par la première formule (*b*), et l'on aurait

$$15{,}30\times t=0{,}102\times 50\times 15,\quad \text{d'où encore}\quad t=5''.$$

1469. Si la force F, au lieu de rester constante, prenait successivement les valeurs F_1 pendant le premier instant θ_1, F_2 pendant l'instant suivant θ_2.... F_n pendant l'instant θ_n; pour les instants successifs on aurait (1468)

$$\begin{aligned}F_1\theta_1&=mv_1-mv_0,\\ F_2\theta_2&=mv_2-mv_1,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ F_n\theta_n&=mv-mv_{n-1},\end{aligned}$$

et pour le temps total on aurait, en ajoutant membre à membre toutes ces égalités et en supprimant les quantités qui se détruisent,

$$F_1\theta_1+F_2\theta_2+\ldots+F_n\theta_n=mv-mv_0. \qquad (a')$$

Selon qu'on a $v_0=0$ ou $v=0$, cette équation devient

$$F_1\theta_1+F_2\theta_2+\ldots+F_n\theta_n=mv \quad\text{ou}\quad F_1\theta_1+F_2\theta_2+\ldots+F_n\theta_n=-mv_0. \qquad (b')$$

Les équations (*a'*) et (*b'*) sont analogues à celles (*a*) et (*b*) du numéro précédent, qu'elles ne font que généraliser.

TRAVAIL D'UNE FORCE.

1470. *Le travail produit par une force constante en grandeur et en direction se représente par le produit de l'intensité de la force par la projection, sur la direction de la force, de l'espace parcouru par le point d'application.*

1° Quand la projection de l'espace parcouru est dirigée dans le sens de la force, à partir du point d'application, elle a le même signe que la force, et le *travail* est *positif*, c'est-à-dire *moteur*.

2° Si la projection de l'espace parcouru est nulle, ce qui a lieu quand le point extrême de l'espace parcouru se projette au point de départ, le travail est nul.

3° Lorsque la projection de l'espace parcouru n'est pas dirigée dans le même sens que la force, elle n'a pas le même signe que cette force, et le *travail* est *négatif*, c'est-à-dire *résistant*.

1471. *La force restant constante en grandeur et en direction, l'espace parcouru peut être droit, polygonal ou courbe.*

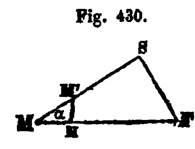


Fig. 430.

1° *La droite* MM' *étant l'espace parcouru* E, MF la force F en intensité et en direction, MN la projection de E sur F, et α l'angle de E avec F, représentant le travail produit par $\mathcal{T}$, on a d'une manière générale, quelle que soit la valeur de α (1106),

$$\mathcal{T} = \text{MF} \times \pm \text{MN} = \text{F} \times \text{E} \cos\alpha. \qquad (a)$$

1° Pour $\alpha = 0°$, on a $\cos\alpha = 1$, et $\mathcal{T}$, qui est moteur, est égal à $\text{F} \times \text{E}$, produit de la force par l'espace parcouru;

2° Pour $\alpha > 0°$ et $< 90°$, $\cos\alpha$ est positif, et le travail $\mathcal{T} = \text{F} \times \text{E} \cos\alpha$ est moteur;

3° Pour $\alpha = 90°$, $\cos\alpha = 0$, et $\mathcal{T} = \text{F} \times \text{E} \cos\alpha = 0$;

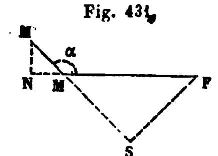


Fig. 431.

4° Pour $\alpha > 90°$ et $< 180°$ (*fig.* 431), $\cos\alpha$ est négatif, et $\mathcal{T} = \text{F} \times \text{E} \cos\alpha$ est résistant;

5° Pour $\alpha = 180°$, $\cos\alpha = -1$, et le travail $\mathcal{T} = -\text{F} \times \text{E}$ est résistant et égal au produit de la force par l'espace parcouru;

6° Pour $\alpha > 180°$ et $< 270°$, $\cos\alpha$ est négatif, et $\mathcal{T} = \text{F} \times \text{E} \cos\alpha$ est résistant;

7° Pour $\alpha = 270°$, $\cos\alpha = 0$ et $\mathcal{T} = 0$;

8° Pour $\alpha > 270°$ et $< 360°$, $\cos\alpha$ est positif, et $\mathcal{T}$ est moteur.

Intervertissant l'ordre des facteurs dans la formule (a), on a

$$\mathcal{T} = \text{E} \times \text{F} \cos\alpha.$$

Ce qui montre que *le travail est aussi représenté par le produit de l'espace parcouru* E *par la projection* F *cos* α *de la force sur la direction de* E. Ainsi l'on a encore $\mathcal{T} = \text{MM}' \times \pm \text{MS}$.

Cela peut encore se démontrer géométriquement à l'aide des *fig.* 430 et 431, dans lesquelles, menant FS perpendiculaire à MM', MS est la projection de la force sur la direction de l'espace parcouru, et les deux triangles rectangles semblables MFS et MM'N donnent la proportion

$$\frac{\text{MF}}{\text{MM}'} = \frac{\text{MS}}{\text{MN}};$$

d'où l'on conclut bien

$$\pm \text{MF} \times \text{MN} \quad \text{ou} \quad \mathcal{T} = \pm \text{MM}' \times \text{MS}.$$

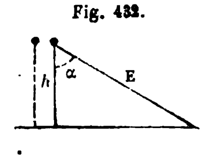


Fig. 432.

1re *application*. Un corps dont le poids $\text{P} = 25^{\text{k}}$ descend verticalement d'une hauteur $h = 2^{\text{m}},501$; quel est le travail produit par la force P? L'espace h étant parcouru dans la direction et le sens de la force P, le travail est moteur et représnté par

$$\text{P} \times h = 25^{\text{k}} \times 2^{\text{m}},501 = 62^{\text{km}},525.$$

2° *application.* Si le corps, au lieu de suivre la verticale, descendait le long d'un plan incliné d'une longueur E, le travail serait

$$\mathcal{T} = P \times h = P \times E \cos \alpha.$$

Pour $P = 25^k$, $E = 10^m$ et $\alpha = 75°31'$, on a

$$h = 10 \times 0{,}2501 = 2^m{,}501 \quad \text{et} \quad \mathcal{T} = 25 \times 2{,}501 = 62^{km}{,}525.$$

On voit que *le travail dû à la pesanteur est constant pour un même poids, quelle que soit l'inclinaison du plan, pourvu que la hauteur* h *du plan reste la même.*

2° *Le chemin parcouru* MABCM' *étant une ligne brisée,* on peut appliquer au parcours de chaque côté ce qui a été dit au 1° :

Fig. 433.

Espace parcouru.	Travail.
MA	$F \times MA \cos \alpha = F \times Ma$
AB	$F \times AB \cos \alpha' = F \times ab$
BC	$F \times BC \cos \alpha'' = F \times bc$
CM'	$F \times CM' \cos \alpha''' = F \times - cN.$

Faisant la somme de tous ces travaux partiels, on a pour le travail total

$$\mathcal{T} = F(Ma + ab + bc - cN) = F \times MN;$$

produit de la force par la projection de l'espace parcouru sur la direction de la force (1106). Ainsi le travail est le même que si le point d'application de la force avait parcouru le chemin droit MM', et en général qu'un chemin quelconque terminé à la perpendiculaire M'N prolongée indéfiniment.

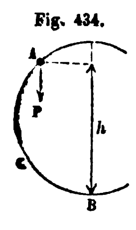
Dans le cas où le point N tomberait à gauche de M, on aurait

$$\mathcal{T} = F \times - MN = - F \times MN.$$

Ce qui indique que le travail serait résistant.

3° *Quand la ligne suivie par le point d'application de la force est une courbe*, en la considérant comme composée d'éléments rectilignes infiniment petits, le travail élémentaire produit pendant le parcours de chacun de ces éléments est, comme pour les côtés de 2°, représenté par le produit de l'intensité de la force par la projection de l'élément sur la direction de la force, et le travail total est égal à la somme algébrique de tous les travaux élémentaires, c'est-à-dire à l'intensité de la force multipliée par la projection du chemin parcouru sur la direction de la force (1106).

Fig. 434.



Application. Un poids P agit sur une roue depuis le point A jusqu'au point inférieur B; quel est le travail produit?

La force P restant constante en intensité et en direction, et h étant la projection du chemin parcouru ACB sur la verticale, qui est la direction de la force, le travail est $P \times h$, et il est moteur.

Les applications du 1° et cette dernière font voir que le travail produit par les poids ne dépend nullement de

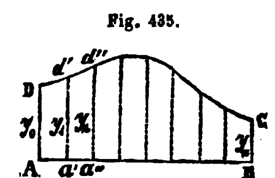
la ligne suivie par le mobile, mais seulement du chemin parcouru suivant la verticale. C'est, du reste, ce qui devait être d'après la définition que nous avons donnée du travail (1470), et ce qu'on peut appliquer à une force quelconque constante en grandeur et en direction; le travail dépend du chemin parcouru parallèlement à la direction de la force, c'est-à-dire de la projection du chemin réellement parcouru, sans nullement dépendre de ce dernier.

1472. *Si la force restait constante en intensité, mais variait à chaque instant de direction*, on obtiendrait le travail produit pendant chaque élément du parcours droit ou courbe, en multipliant la force par la projection de l'élément sur la direction correspondante de la force, et la somme de tous les travaux élémentaires, c'est-à-dire le produit de la force par la somme des projections des divers éléments du chemin parcouru, serait le travail total. Le résultat obtenu serait d'autant plus exact que l'espace total parcouru aurait été divisé en parties plus petites.

Si la force, conservant ou non la même direction, changeait de grandeur, comme dans le cas précédent, le travail correspondant à un élément quelconque du parcours serait encore l'intensité de la force à l'instant considéré, multipliée par la projection de l'élément parcouru sur la direction de la force au même instant, et le travail total serait également la somme de tous les travaux élémentaires. On obtiendrait le résultat avec d'autant plus d'exactitude qu'on aurait divisé le parcours en un plus grand nombre d'éléments.

Prenant, sur une droite AB, Aa' égal à la projection du premier élément parcouru sur la direction de la force, et élevant l'ordonnée y_0 égale à l'intensité de la force au moment du départ; puis $a'a''$ égal à la projection du deuxième élément parcouru sur la direction de la force, et élevant l'ordonnée y_1 égale à l'intensité de la force au commencement du parcours de cet élément; et ainsi de suite, l'aire du trapèze A$a'd'$D représente le travail produit pendant le parcours du premier élément; celle de $a'a''d''d'$, celui produit pendant le parcours du deuxième élément, et ainsi de suite; de sorte que l'aire totale de la courbe représente le travail produit pendant tout le parcours, et on peut le calculer à l'aide des formules des nos 1302 à 1304; mais en se rappelant que les dernières formules exigent que les intervalles des ordonnées soient égaux et en nombre pair. Si le tracé de la courbe n'avait pas conduit à cette condition, il faudrait diviser AB en un nombre pair de parties égales, puis déterminer les ordonnées correspondantes par le calcul, si cela était possible, ou les prendre sur l'épure, qu'il y aurait lieu alors de faire avec le plus grand soin et à une échelle suffisamment grande.

Fig. 435.



FORCE VIVE, PUISSANCE VIVE.

1473. Le produit mv^2 de la masse m d'un mobile par le carré v^2 de la vitesse qu'il possède est appelé *force vive*, nom que Coriolis a proposé de donner à la quantité $\frac{1}{2} mv^2$, qui entre dans les énoncés des théorèmes les plus importants de la mécanique industrielle, afin d'éviter d'avoir un nom pour le double d'une quantité qu'on retrouve à chaque instant. M. Belanger, et après lui quelques auteurs, ont donné au produit $\frac{1}{2} mv^2$ le nom de *puissance vive*, qui entraîne l'idée du travail que doit subir un point matériel pour être réduit au repos quand il possède une vitesse v, en même temps que la qualification *vive* sert, comme le dit Coriolis, à distinguer le travail qu'on peut retirer d'un point matériel doué d'une certaine vitesse, de celui qu'on peut retirer de ressorts comprimés ou de tout autre moteur.

Nous adopterons l'expression de *puissance vive*. Le théorème des forces vives deviendra alors le théorème des puissances vives (1474), ou simplement le *théorème de l'effet du travail.*

1474. Dans le mouvement uniformément accéléré on a (1436, 1437), en faisant $j = \frac{F}{m}$ (1461),

$$v = v_0 + \frac{F}{m} t, \quad \text{et} \quad E = E_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2.$$

Éliminons t entre ces deux équations, ce qu'on fait facilement en opérant comme il suit :

On élève au carré les deux membres de la première équation, ce qui donne

$$v^2 = v_0^2 + 2 \frac{F}{m} v_0 t + \frac{F^2}{m^2} t^2 ,$$

ou

$$v^2 - v_0^2 = 2 \frac{F}{m} v_0 t + \frac{F^2}{m^2} t^2. \quad (1)$$

On multiplie les deux membres de la seconde par $\frac{2F}{m}$ après avoir fait passer E_0 dans le premier membre, ce qui fournit

$$\frac{2F}{m} (E - E_0) = 2 \frac{F}{m} v_0 t + \frac{F^2}{m^2} t^2. \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) ayant le même second membre, les premiers donnent

$$2 \frac{F}{m} (E - E_0) = v^2 - v_0^2;$$

d'où l'on tire, en multipliant les deux membres par $\frac{m}{2}$,

$$F(E - E_0) = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2. \qquad (A)$$

$E - E_0$ étant le chemin parcouru pendant l'action de la force F, $F(E - E_0)$ est le travail produit par F pendant cette même durée d'action (1471).

$\frac{1}{2} mv_0^2$ étant la puissance vive au commencement de l'action de la force F, et $\frac{1}{2} mv^2$ la puissance vive à la fin de cette action, les quantités $\frac{1}{2} mv_0^2$ et $\frac{1}{2} mv^2$ étant toujours positives, l'équation (A) fait voir que la quantité de travail produite par une force agissant sur un point matériel (1448) est toujours algébriquement égale à la différence obtenue en retranchant la puissance vive avant l'action de la force, de la puissance vive après l'action ; ainsi, considérant comme gain de puissance vive une différence positive, et comme perte une différence négative, on peut énoncer le théorème général des puissances vives (1473) :

Le travail produit par une force agissant sur un point matériel libre est égal au gain ou à la perte de puissance vive du mobile pendant l'action de la force.

Pour une perte de puissance vive égale à un gain de puissance vive, le travail est le même, seulement il est négatif dans le premier cas et positif dans le second. Ainsi, par exemple, pour réduire au repos un point matériel possédant une certaine vitesse, le travail est le même que pour communiquer une égale vitesse au même point matériel partant du repos ; seulement il est négatif dans le premier cas et positif dans le second.

L'expression du travail en fonction de la puissance vive est d'un usage très-fréquent en mécanique.

1475. *Supposons que la force, au lieu de rester constante, varie d'intervalle en intervalle.*

Appelant $e_1, e_2, e_3 \ldots e_n$ les espaces parcourus pendant que les valeurs de la force sont respectivement $F_1, F_2, F_3 \ldots F_n$, v_0 étant la vitesse initiale et $v_1, v_2, v_3 \ldots v$ les vitesses après le parcours des espaces respectifs $e_1, e_2, e_3 \ldots e_n$, on a :

Pour le parcours de e_1, $\quad F_1 e_1 = \frac{1}{2} mv_1^2 - \frac{1}{2} mv_0^2$;

id. de e_2, $\quad F_2 e_2 = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2$;

id. de e_3, $\quad F_3 e_3 = \frac{1}{2} mv_3^2 - \frac{1}{2} mv_2^2$;

. . . .

d. de e_n, $\quad F_n e_n = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv^2_{n-1}$.

Ajoutant membre à membre toutes ces équations, on a encore, pour tout le parcours, en supprimant les quantités qui se détruisent, le travail total

$$\mathcal{T} = F_1 e_1 + F_2 e_2 + F_3 e_3 + \ldots + F_n e_n = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2.$$

Si la force, au lieu de varier d'intervalle en intervalle, variait d'une manière continue, on pourrait prendre les espaces e_1, $e_2 \ldots e_n$ assez petits pour que l'on pût supposer la force constante pendant le parcours de chacun d'eux, et la formule précédente serait encore applicable.

1476. Dans le cas où $v_0 = 0$ et $E_0 = 0$, c'est-à-dire quand le corps part du repos et que les espaces sont comptés à partir du point de départ, l'équation (A) du n° 1474 devient

$$FE = \frac{1}{2} mv^2. \qquad \text{(B)}$$

Remplaçant m par $\frac{P}{g}$ (1459), on a

$$FE = \frac{Pv^2}{2g};$$

nouvelle expression du travail, dont on fait usage dans les applications.

1477. Comme $\frac{v^2}{2g} = h$, h étant la hauteur correspondant à la vitesse v (1446), on a

$$FE = Ph.$$

Le travail produit par une force quelconque est donc égal au produit du poids du point matériel sollicité (1448) par la hauteur correspondant à la vitesse du mobile, c'est-à-dire qu'il est égal à celui produit par le poids P tombant de la hauteur h, ou qu'il faudrait produire pour élever le poids P à la hauteur h.

1478. Ainsi le travail produit par une force quelconque peut toujours être ramené à un poids élevé à une certaine hauteur.

Aussi a-t-on adopté pour unité de travail, le travail dû au poids de 1 kilogramme élevé à 1 mètre de hauteur, et on l'a appelé *kilogrammètre*, que l'on représente par $1^{kg.m}$, ou plus simplement par 1^{km}.

1479. Si le travail nécessaire pour élever un kilogramme à la hauteur de 1 mètre est 1^{km}, pour élever un poids quelconque P à la hauteur de 1 mètre le travail nécessaire sera P^{km}; puisque pour élever P^k à 1 mètre de hauteur il faut P^{km}, pour l'élever à la hauteur h il faudra Ph^{km}.

D'où il résulte que la force F étant exprimée en kilogrammes et l'espace parcouru E en mètres, le travail est

$$\mathcal{T} = FE^{km}.$$

Dans le cas où la force F serait représentée en unités de 1000 kilogrammes, le produit FE représenterait le travail en unités de 1000^{km}, que l'on appelle *grandes unités dynamiques.*

1480. Le produit FE^{km} représente un travail indépendant du temps pendant lequel il a été produit; mais l'on conçoit que pour comparer les puissances dynamiques des forces ou des moteurs quelconques, il faut comparer les travaux produits dans un temps donné; ainsi les forces F et F′ produisant respectivement FE^{km} et $F'E'^{km}$ en une seconde, il en résulte que les puissances dynamiques des deux forces sont entre elles dans le rapport de FE à F′E′

1481. Afin de pouvoir énoncer la puissance dynamique d'une force, ou comparer les effets dynamiques des différentes forces, sans avoir égard au temps, on a adopté une unité de travail dépendant du temps. Cette unité, que l'on appelle *cheval-vapeur*, équivaut à 75^{km} par seconde.

Cette unité est d'un usage continuel pour évaluer la puissance des machines. Quand on dit qu'une machine est de la puissance dynamique de 10 chevaux, par exemple, ou improprement de la *force* de 10 chevaux, cela signifie que le travail dynamique produit par la machine en une seconde équivaut à $75 \times 10 = 750$ kilogrammètres.

Le cheval vivant produit moins de 75^{km} par seconde; ainsi un cheval de force moyenne, attelé à une voiture et allant au pas, produit une traction de 70 kilogrammes avec une vitesse de $0^{m},90$ par seconde; ce qui fait une puissance dynamique de 63^{km} par seconde ou $\frac{63}{75}$ de cheval-vapeur.

De plus, comme un cheval vivant ne peut travailler que 8 heures sur 24, il en résulte que dans un travail continu un cheval-vapeur remplace plus de trois chevaux.

MOUVEMENT RELATIF.

1482. Le mouvement d'un point considéré par rapport à un autre point quelconque de l'espace, en repos ou en mouvement, est le *mouvement relatif* du premier par rapport au second (1418).

On n'a guère à étudier dans la pratique que le mouvement d'un point par rapport à son point de départ.

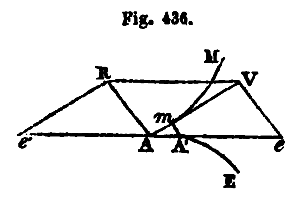
Si le point de départ est fixe, le mouvement relatif devient *mouvement absolu;* si au contraire le point de départ est en mouvement, on obtient le mouvement relatif tel que nous allons l'étudier.

1483. *Remarque.* Comme, en mécanique, il serait pratiquement impossible de fixer la position qu'occupe un point dans l'espace, à un instant considéré, en ayant égard aux mouvements de rotation autour de l'axe de la terre et de translation autour du soleil, on considérera comme étant en repos tout point qui ne participe qu'à ces mouvements. Du reste, ces mouvements pouvant être considérés comme étant les mêmes pour tous les points que l'on considère simultanément dans la

pratique, on peut les négliger dans l'étude qui nous occupe; mais l'on voit que ce qui vient d'être appelé mouvement absolu n'est en réalité qu'un mouvement relatif, de même que le repos n'est qu'un repos relatif.

1484. *Relations entre les vitesses relative et absolue d'un point mobile et la vitesse du point de départ.*

Fig. 436.



Soient AM la courbe que le point mobile parcourt dans son mouvement réel ou absolu, AE celle que suit le point de départ, AV la vitesse abolue, Ae la vitesse du point de départ A.

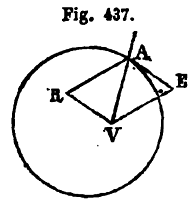
Soient de plus m la position du mobile après l'instant θ, A' celle du point A après le même temps θ, et par suite mA' l'espace parcouru sous l'influence du mouvement relatif dans le même temps.

Pendant l'instant θ, on peut supposer que les vitesses sont proportionnelles aux espaces parcourus (1427); donc menant Ve, cette droite sera parallèle à mA' et représentera en grandeur la vitesse relative. Elle la représentera aussi en direction; car le temps θ étant infiniment petit, la droite mA' ne peut faire un angle sensible avec les autres positions qu'elle a occupées pendant cet instant; par conséquent on peut prendre cette direction, qui est parallèle à Ve, pour celle du premier élément suivant lequel le mobile et le point A ont commencé à s'éloigner. Ainsi menant AR parallèle à Ve, et terminant le parallélogramme AeVR, AR représente en grandeur et en direction la vitesse relative, et l'on voit que *la vitesse absolue* AV *est la diagonale du parallélogramme construit sur la vitesse du point* A *et la vitesse relative.*

Prenant Ae' = Ae, et terminant le parallélogramme AVRe', on voit que *la vitesse relative est représentée en grandeur et en direction par la diagonale* AR *du parallélogramme construit sur la vitesse absolue* AV *et la vitesse du point* A *prise en sens contraire.*

1485. *Application.* Un filet d'eau arrive sur une roue avec une vitesse représentée en grandeur et en direction par AV; le point A de la roue a pour vitesse tangentielle AE, quelle est la vitesse relative de l'eau par rapport au point A?

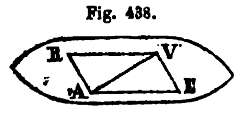
Fig. 437.



AV étant la vitesse absolue, et AE la vitesse du point A, terminant le parallélogramme AEVR, AR est la vitesse relative (1484). C'est suivant AR qu'il faut diriger les premiers éléments des aubes de la roue pour éviter autant que possible le choc de l'eau contre les aubes et obtenir plus d'effet de la roue.

1486. *Mouvements simultanés.* Si pendant qu'un bateau descend d'une quantité AE le long d'une rivière, un point parcourt une distance AR sur le pont, ce point participe à la fois à son mouvement propre sur le pont et à celui du bateau, de sorte qu'il vient au sommet opposé V du

Fig. 438.



parallélogramme AEVR, de manière à parcourir parallèlement à AE et à AR le même espace que si les mouvements avaient lieu successivement. En ayant égard au mouvement de rotation de la terre autour de son axe, et à celui de translation autour du soleil, on voit que le mobile est soumis à quatre mouvements, et chacun d'eux obtient encore parallèlement à sa direction le même effet que s'il existait seul. Mais ces quatre mouvements ne sont que les mouvements composants du mouvement unique, réel ou absolu du mobile dans l'espace.

D'une manière générale, considérant un système invariable dont font partie trois axes coordonnés auxquels on peut rapporter les mouvements des points dans le système, si ce système se meut dans l'espace, et qu'un de ses points *m*, qui participe à son mouvement, prenne dans le système un mouvement quelconque, ce dernier mouvement sera le *mouvement relatif* du point *m* par rapport au système; le mouvement du système sera un *mouvement d'entraînement*, et ces deux mouvements seront les composants du *mouvement absolu*, c'est-à-dire unique, que prendra réellement le point *m* dans l'espace. Les vitesses de ces trois mouvements seront liées entre elles par les relations du n° 1484, c'est-à-dire que la vitesse absolue sera la résultante de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement (1488).

Ce premier système pourrait lui-même avoir un mouvement relatif par rapport à un autre système plus grand; le point *m* aurait alors trois mouvements simultanés, qui seraient les composants de son mouvement absolu, et sa vitesse absolue serait la résultante des trois vitesses dues à ses mouvements simultanés. En partant ainsi de mouvements relatifs successifs, on conçoit que le nombre des mouvements simultanés peut être quelconque.

1487. *Deuxième principe fondamental* (1420). Ce principe, dit *principe des mouvements relatifs*, consiste en ce que si un point matériel est soumis simultanément à l'action de plusieurs forces ou de plusieurs vitesses, ou à la fois de plusieurs forces et vitesses, chacune de ces forces et vitesses produit son effet comme si elle était seule, c'est-à-dire qu'elle fait parcourir au mobile le même espace parallèlement à sa direction.

Ce principe a déjà été reconnu au n° 1451 pour une vitesse et une force de même direction, et au n° 1452 pour des forces agissant dans le même sens; mais il est étendu ici à des forces et à des vitesses de directions quelconques. Cette loi de la nature ne peut être vérifiée par une expérience directe et rigoureuse; mais elle l'est par l'accord des conséquences qu'on en tire avec les faits observés, surtout en astronomie.

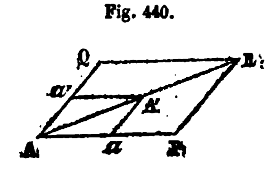
Fig. 439.

Exemple. Un projectile étant lancé avec une certaine vitessse initiale v_0 dans la direction Av_0, comme il est de plus soumis à l'action de la pesanteur, abstraction faite de la résistance de l'air, v_0 et le poids P feront parcourir, parallèllement à Av_0 et à la verticale, les mêmes espaces que si v_0 ou P existait seul. Ainsi, après le temps t, le projectile aura parcouru parallèlement à Av_0 une longueur $Aa' = v_0 t$ (1427) et parallèlement à la verticale une hauteur $Aa = \frac{1}{2}\frac{P}{m}t^2$ (1437, 1459), et il sera venu par conséquent au point A', sommet opposé à A dans le parallélogramme $AaA'a'$.

COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION DES FORCES APPLIQUÉES A UN MÊME POINT MATÉRIEL, DES VITESSES ET DES ACCÉLÉRATIONS DE VITESSES DE CE POINT, ET DES ESPACES QU'IL PARCOURT.

1488. *Résultante : 1° de deux forces, 2° de deux vitesses, 3° de deux accélérations de vitesses, 4° de deux espaces.*

Fig. 440.



1° *La résultante* R (1423) *de deux forces* P *et* Q *appliquées à un même point matériel* A (1448), *est représentée en grandeur et en direction par la diagonale* AR *du parallélogramme construit sur les droites* AP *et* AQ, *qui représentent* P *et* Q *en grandeurs et en directions.*

Les deux forces P et Q obtenant chacune dans sa direction le même effet que si l'autre n'existait pas (1487), Aa et Aa' étant les espaces parcourus sous l'influence des forces P et Q dans le même temps t, on a (1456)

$$\frac{Aa}{Aa'} = \frac{P}{Q}.$$

Après le temps t, le mobile se trouve au sommet A' du parallélogramme construit sur Aa et Aa', et comme les parallélogrammes $AaA'a'$ et APRQ sont semblables (671), AA' se confond avec AR, et l'on voit, comme le temps t est quelconque, que le mobile se meut sur la diagonale AR.

Les espaces AA' parcourus sur la diagonale étant proportionnels à ceux Aa ou Aa' dus à P ou Q, appelant R la force unique qui produirait le mouvement du mobile sur AR, cette force sera dirigée suivant AR, et l'on aura (1456)

$$\frac{P}{R} = \frac{Aa}{AA'}.$$

Comme les deux triangles semblables AaA' et APR donnent

$$\frac{AP \text{ ou } P}{AR} = \frac{Aa}{AA'},$$

on a $R = AR$. Ce qu'il fallait démontrer.

Le parallélogramme APRQ est appelé *parallélogramme des forces*.

2° Les forces P, Q, R (*fig.* 440) étant proportionnelles aux vitesses qu'elles communiquent à un même point matériel A dans un même temps (1455), il en résulte que si Aa est la vitesse que la force P communique au mobile A dans un temps quelconque t, les vitesses dues à Q et R seront Aa' et AA' pour le même temps, et l'on voit que *la résultante de deux vitesses est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les deux vitesses* (1486).

Il est à remarquer que le parallélogramme de deux vitesses est semblable à celui de tout système de deux forces constantes qui sont capables de produire en grandeur et en direction les vitesses composantes dans le même temps.

3° Les accélérations de vitesses étant aussi proportionnelles aux forces (1454), on ferait voir que, comme pour les vitesses (2°), *la résultante de deux accélérations est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les deux accélérations.*

Le parallélogramme de deux accélérations de vitesses est encore semblable à ceux de tous les systèmes de deux forces constantes capables de produire en grandeur et en direction les accélérations composantes dans le même temps.

4° Les espaces parcourus après un même temps quelconque sous l'influence de vitesses constantes étant proportionnels à ces vitesses (1427), on ferait voir que, comme pour les vitesses (2°), *la résultante de deux espaces parcourus sous l'influence de vitesses constantes est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les deux espaces.*

Si les espaces sont dus à des mouvements uniformément accélérés dans lesquels la vitesse initiale est nulle, ces espaces sont proportionnels aux forces qui produisent ces mouvements, et il en résulte que dans ce cas encore *la résultante de deux espaces est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les deux espaces.*

Que les vitesses soient constantes ou uniformément accélérées, le parallélogramme des espaces est semblable à celui des vitesses ou des accélérations, et encore à celui de tout système de deux forces constantes capables de faire parcourir au mobile dans les mêmes directions et dans le même temps les espaces donnés.

Remarque 1re. Quand un point matériel est animé de deux mouvements simultanés quelconques parallèles à deux directions, après un temps quelconque, ce point matériel se trouve encore à l'extrémité de la diagonale du parallélogramme construit sur les deux espaces parcourus; mais sa trajectoire, au lieu d'être cette diagonale, peut être une ligne quelconque; c'est ce que montre la *fig.* 439.

Remarque 2e. De ce qui précède, il résulte que tout ce qui va suivre sur la composition des forces appliquées à un même point est applicable aux vitesses et aux accélérations de vitesses simultanées d'un même

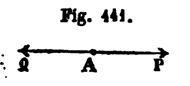
point, ainsi qu'aux espaces qu'il parcourt simultanément sous l'action de ces vitesses ou accélérations de vitesses.

1489. La *fig.* 440 montre que la résultante AR des deux forces P et Q appliquées au même point A est le 3e côté AR d'un triangle APR qui a pour 1er côté AP, l'une P des composantes, et pour 2e PR, une droite égale et parallèle à la 2e composante Q. Ce triangle APR peut donc s'appeler *triangle des forces*.

1490. Lorsque P et Q ont même direction et même sens, le triangle APR devient une ligne droite, et l'on a $AR = AP + PR$. *Ce qui montre que la résultante* R *est égale à la somme* $P + Q$ *des deux composantes, et qu'elle est dirigée dans le sens de ces composantes.*

Quand les forces P et Q, de même direction, sont dirigées en sens contraires, le triangle APR se transforme encore en une ligne droite AR, mais qui est égale à $AP - PR$. Ce qui fait voir qu'alors *la résultante* R *est égale à la différence* $P - Q$ *des deux composantes, et qu'elle a le signe, c'est-à-dire le sens, de la plus grande des composantes.*

Fig. 441.



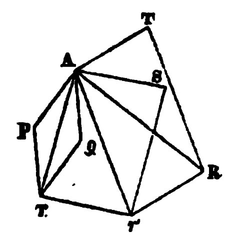
Si, dans ce dernier cas, $P = Q$, on a $R = P - Q = 0$. Ce qui montre, ce que l'on peut du reste considérer comme un axiome vérifié par l'expérience, que *deux forces égales, de même direction et de sens contraires, ont une résultante nulle.*

1491. Pour retrouver les composantes quand on a la résultante R, c'est-à-dire pour *décomposer une force* R *en deux autres* P *et* Q *appliquées au même point* A, *et dont les directions sont situées dans un même plan avec la première* (*fig.* 440), on construit le parallélogramme APRQ, dont la force donnée est la diagonale, et dont les côtés sont dans les directions des composantes; le côté $AP = P$, et $AQ = Q$.

Remarque. Il y a indétermination quand les deux composantes ont la même direction; car, selon que les composantes doivent être dirigées dans le même sens ou en sens contraires, tout système de deux forces donnant $P + Q = R$ ou $P - Q = R$ satisfait à la question, et l'on conçoit qu'il y en a une infinité.

1492. *Détermination de la résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point et situées ou non dans un même plan.*

Fig. 442.



On prend la résultante r des deux forces quelconques données P et Q (1488); puis la résultante r' de r et d'une autre force S; r' est la résultante des trois forces P, Q et S; on compose ensuite r' avec une quatrième force, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait employé toutes les forces, et la dernière résultante obtenue R est la résultante de toutes les forces données.

A part la clarté du dessin, l'ordre d'emploi des diverses forces est indifférent pour leur composition, puisqu'on arrive dans tous les cas à la force unique capable de remplacer toutes les autres.

Remarque. La figure précédente montre que la résultante d'un nombre quelconque de forces situées dans le même plan est la droite qui ferme le polygone dont le premier côté est l'une des forces, et dont les autres côtés successifs sont respectivement égaux aux autres forces, et parallèles à leurs directions. Ainsi, les deux forces P et Q ont pour résultante A*r* qui ferme le polygone dont le premier côté est AP = P, et dont le deuxième P*r* est égal et parallèle à Q. Pour les trois forces P, Q, S, la résultante est la droite A*r'* qui ferme le polygone formé par les côtés AP, P*r*, et *rr'* égal et parallèle à S. La résultante AR des forces P, Q, S, T ferme de même le polygone AP*rr'*R, et l'on voit que, quel que soit le nombre des forces, la résultante s'obtiendra toujours de la même manière.

Ce qui vient d'être dit pour des forces situées dans un même plan s'applique également à des forces de directions quelconques; seulement alors le *polygone* dont les côtés sont respectivement égaux et parallèles aux forces n'est pas une figure plane.

Par analogie avec le parallélogramme des forces (1488), le polygone qui permet, comme on vient de le voir, de déterminer la résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point, peut s'appeler *polygone des forces* (1489).

1493. Quand le point R tombe en A (*fig.* 442), c'est-à-dire quand le polygone AP*rr'*R des forces se ferme de lui-même, la résultante AR est nulle, et l'on dit que les forces P, Q, S, T sont en *équilibre* ou *se font équilibre.*

1494. On peut poser comme un axiome, qui est du reste vérifié par l'expérience, que quand toutes les forces qui sollicitent un corps libre ont une résultante nulle, c'est-à-dire sont en équilibre, elles ne changent rien à l'état de repos ou de mouvement de ce corps.

Si le corps est en repos, l'*équilibre est statique*, et s'il possède un mouvement, qui ne peut être qu'uniforme et dû à une vitesse initiale, l'*équilibre est dynamique* (1424).

Les relations entre les forces sont les mêmes, que l'équilibre soit statique ou dynamique.

On peut poser, comme extension de l'axiome précédent, que l'état d'un corps ne change pas quand on le soumet à l'action de plusieurs forces dont la résultante est nulle, ou quand on supprime plusieurs forces en équilibre qui le sollicitent. Ainsi il reste en repos s'il est en repos, et s'il est soumis à des vitesses ou à d'autres forces, l'effet de ces vitesses ou de ces forces n'est pas modifié.

1495. Si toutes les forces appliquées à un même point avaient même direction et même sens, la construction du polygone des forces conduirait à une ligne droite, et l'on aurait $R = P + Q + S + T$ (1490).

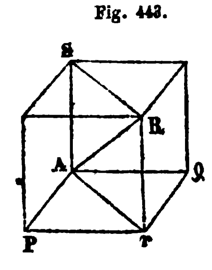
Si toutes les forces avaient même direction, mais agissaient les unes dans un sens et les autres dans le sens contraire, la résultante des forces agissant dans chacun des sens étant égale à leur somme, il s'ensuivrait que la résultante de toutes les forces serait égale à la somme des forces qui agissent dans un sens moins celle des forces qui agissent dans l'autre, et qu'elle aurait le sens des forces dont la somme est la

plus grande. Le polygone des forces, appliqué à ce cas particulier, conduit au même résultat.

1496. *La résultante* R *de trois forces* P, Q, S *non situées dans le même plan et appliquées à un même point* A *est représentée en grandeur et en direction par la diagonale* AR *du parallélipipède construit sur ces trois forces.*

D'après le n° 1489, la résultante des deux forces P et Q s'obtient en menant Pr égal et parallèle à AQ, et en traçant Ar, qui est la résultante de P et Q. Pour avoir la résultante des trois forces P, Q, S, il suffit de mener rR égal et parallèle à AS, et AR est la résultante cherchée. Or, considérant le parallélogramme APrQ comme étant la base d'un parallélipipède dont AS est une arête latérale, on voit que rR est l'arête latérale opposée à AS, et que AR est bien la diagonale du parallélipipède; c'est ce qu'on peut vérifier en terminant le parallélipipède.

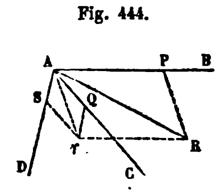
Fig. 443.



1497. Si l'on voulait passer de la résultante à ses composantes, c'est-à-dire décomposer une force R en trois autres de directions déterminées, on prendrait une marche inverse à celle suivie pour la composition. Ainsi l'on mènerait Rr parallèle à AS; on prolongerait cette parallèle jusqu'au plan PAQ; on joindrait Ar, et terminant le parallélogramme ASRr, AR serait décomposée en AS, qui serait l'une des composantes cherchées, et en une force Ar, laquelle, décomposée suivant AP et AQ, fournirait les deux autres composantes P et Q.

1498. *Il y a indétermination dans la décomposition d'une force* R *en plus de deux composantes dont les directions* AB, AC *et* AD *sont situées dans un même plan avec* R. En effet, prenant une valeur quelconque AP pour l'une des composantes, et terminant le parallélogramme APRr qui a AR pour diagonale et AP pour côté, la force R se trouve décomposée en deux autres P et r (1491). Cette dernière force fournit ensuite deux composantes Q et S dirigées suivant AC et AD, et l'on voit que R est décomposée en trois forces P, Q, S.

Fig. 444.



Toute autre valeur donnée à P conduisant à un autre système P, Q, S, on peut donc décomposer R d'une infinité de manières.

Lorsque la résultante et les directions des composantes ne sont que deux à deux situées dans le même plan, il n'y a pas indétermination pour trois composantes; mais on ferait voir que l'indétermination subsiste pour un plus grand nombre de forces en opérant comme dans le cas précédent.

1499. *Relations entre deux forces appliquées à un même point et leur résultante, en fonction des angles que leurs directions font entre elles.*

Les deux composantes et la résultante étant les trois côtés du trian-

gle APR des forces (1489), dont deux des angles sont ceux que font les forces avec la résultante, et dont le troisième est le supplément de l'angle que les deux forces font entre elles, la question proposée revient à la résolution d'un triangle (1126), et il s'ensuit que connaissant trois des six quantités, les trois forces et les trois angles qu'elles font entre elles, on pourra déterminer les trois autres, pourvu qu'un côté, c'est-à-dire une force, soit connue.

Fig. 445.

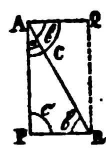
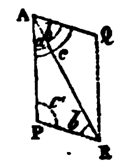


Fig. 446.



Désignons par a l'angle de P avec R, par b celui de Q avec R, par $c=a+b$ celui de P et Q, et par c' le supplément de c.

Si les deux forces P *et* Q *sont rectangulaires entre elles* (*fig.* 445), le triangle APR est rectangle, et l'on a (704, 1127)

$$R^2 = P^2 + Q^2;$$

$$P = R\cos a, \quad Q = R\cos b, \quad \text{d'où} \quad R = \frac{P}{\cos a}, \quad R = \frac{Q}{\cos b}; \qquad (1)$$

$$P = Q\,\text{tang}\, b, \quad Q = P\,\text{tang}\, a, \quad \text{d'où} \quad Q = \frac{P}{\text{tang}\, b}, \; P = \frac{Q}{\text{tang}\, a}.$$

Les quatre cas du n° 1127 pourront se présenter, et toujours on opérera comme à ce numéro.

Les deux premières formules (1) font voir que lorsqu'on décompose une force R en deux autres P et Q de directions rectangulaires, chaque composante est égale à la résultante multipliée par le cosinus de l'angle qu'elle forme avec la résultante, et quelle est par conséquent la projection de la résultante sur sa direction (1106); c'est du reste ce que fait voir la *fig.* 445.

Quand les deux composantes P *et* Q *font entre elles un angle quelconque*, d'abord si elles sont égales, les diagonales de leur parallélogramme, qui est un losange, se coupent à angle droit (624), et l'on a

$$a = b, \quad R = 2P\cos a = 2Q\cos b.$$

Si de plus les deux forces sont quelconques (*fig.* 446), on a dans le triangle APR (1124), en remarquant que les angles supplémentaires c' et c donnent $\cos c' = -\cos c$,

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos c' = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos c. \qquad (2)$$

On a aussi (1123)

$$\frac{R}{\sin c'} = \frac{P}{\sin b} = \frac{Q}{\sin a}. \qquad (3)$$

D'où l'on conclut, en remarquant que les angles supplémentaires c et c' donnent $\sin c' = \sin c$,

$$R = P\frac{\sin c}{\sin b}, \quad R = Q\frac{\sin c}{\sin a}, \quad P = Q\frac{\sin b}{\sin a}, \quad Q = P\frac{\sin a}{\sin b}. \qquad (4)$$

La suite de rapports (3) fait voir que *deux forces et leur résultante, ou encore trois forces qui sont en équilibre* (1493), *sont telles que chacune est proportionnelle au sinus de l'angle formé par les directions des deux autres.*

Application. Soit à déterminer la résultante R de deux forces $P = 70^k$ et $Q = 40^k$ faisant entre elles l'angle $c = 70°$, et l'angle a que fait la force P avec R. Cela revient à la solution du n° 1130.

On a d'abord, formule (2),

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos c} = \sqrt{70^2 + 40^2 + 2 \times 70 \times 40 \times 0{,}342} = 91^k{,}73.$$

Puis la seconde des formules (4) donne

$$\sin a = \frac{Q}{R}\sin c = \frac{40}{91{,}73} \times 0{,}94 = 0{,}4099,$$

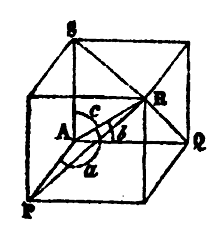
sinus qui correspond à $\quad a = 24°12'.$ (1138)

Tous les autres cas qui peuvent se présenter se résoudront en suivant une marche analogue, c'est-à-dire en opérant comme à l'un des n°ˢ 1128 à 1131. Ainsi P et tous les angles étant connus, pour avoir Q et R on opère comme au n° 1128, et l'on a, formule précédente (4),

$$Q = P\frac{\sin a}{\sin b}, \quad \text{et} \quad R = P\frac{\sin c}{\sin b}.$$

1500. *Considérons maintenant trois forces* P, Q, S *appliquées à un même point et non situées dans un même plan.*

Fig. 447.



Leur résultante étant représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélipipède des forces (1496), si les forces sont rectangulaires entre elles, le parallélipipède est rectangle, et l'on a (827)

$$R^2 = P^2 + Q^2 + S^2. \qquad (1)$$

Remarquant que chacune des forces P, Q, S est, comme le montre la fig. 447, la projection de la résultante sur sa direction, on a (1106), a, b et c étant les angles que forme la résultante avec les composantes,

$$P = R\cos a, \quad Q = R\cos b, \quad S = R\cos c.$$

Si l'on remplace P, Q, S par ces valeurs dans l'équation (1), il vient

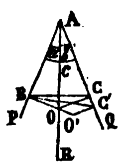
$$R^2 = R^2\cos^2 a + R^2\cos^2 b + R^2\cos^2 c = R^2(\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c),$$

d'où $$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1.$$

Condition à laquelle satisfont les trois angles que fait une droite avec trois axes rectangulaires (1101).

1501. ***Si d'un point quelconque O, pris sur la direction de la résultante de deux forces P et Q, on abaisse les perpendiculaires OB et OC sur les directions de ces forces, ces perpendiculaires sont réciproquement proportionnelles aux forces.*** En effet, ayant (1122)

Fig. 448.



$$OC = OA \sin b \quad \text{et} \quad OB = OA \sin a,$$

d'où

$$\frac{OC}{OB} = \frac{\sin b}{\sin a},$$

comme déjà (1499)

$$\frac{P}{\sin b} = \frac{Q}{\sin a} \quad \text{ou} \quad \frac{P}{Q} = \frac{\sin b}{\sin a},$$

on a donc bien

$$\frac{P}{Q} = \frac{OC}{OB}. \qquad (a)$$

Nous verrons plus loin que cette condition est celle d'équilibre d'un levier sollicité par P et Q, et qui a pour bras de levier les droites OB et OC.

Les points de la résultante jouissent seuls de cette propriété. En effet, supposant qu'un point O' pris en dehors donne

$$\frac{P}{Q} = \frac{O'C'}{O'B},$$

comme pour le point O de la résultante on a

$$\frac{P}{Q} = \frac{OC}{OB},$$

on aurait donc

$$\frac{O'C'}{O'B} = \frac{OC}{OB}.$$

Alors les deux triangles O'BC' et OBC, qui ont les angles en O et O' égaux entre eux comme correspondants, seraient semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels, et les angles en B, opposés à des côtés proportionnels, seraient égaux; ce qui ne peut être qu'autant que BC' se confond avec BC et C'O' avec CO, et que le point O' tombe en O.

L'angle BOC étant égal à l'angle c' du triangle des forces (*fig.* 446), comme ayant les côtés perpendiculaires, ce triangle est semblable à celui OBC comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels, ce que montre la proportion précédente (a), et l'on a

$$\frac{P}{OC} = \frac{Q}{OB} = \frac{R}{BC}.$$

1502. Deux droites égales, parallèles et de même sens ayant sur une

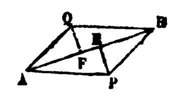
même droite des projections égales et de même signe (1106), il en résulte que la somme des projections des forces P, Q, S, T (*fig.* 442) est égale à la projection de la ligne brisée APrr'R, obtenue en construisant le polygone de ces forces. Or la projection de cette ligne brisée étant égale à celle de la ligne droite AR (1106), comme AR est la résultante (1492), il en résulte donc :

1° *Que la résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point est égale à la somme algébrique* (411) *des projections des forces sur sa direction;*

2° *Que la projection de la résultante sur une droite quelconque est algébriquement égale à la somme des projections des composantes sur la même droite.*

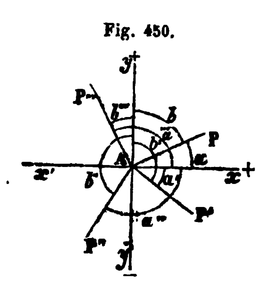
Ainsi, pour deux forces P et Q, on voit de suite que la projection de AQ est égale à celle de PR; que AR est la somme des projections de AP et PR, c'est-à-dire des deux forces P et Q, sur sa direction; enfin que la projection de la résultante AR sur une droite quelconque serait égale à la somme des projections de AP et PR, ou de P et Q, sur la même droite.

Fig. 449.



1503. *Décomposition, suivant des axes rectangulaires, d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point, et détermination de la résultante de ces forces.*

Fig. 450.



1° Supposons d'abord que toutes les forces P, P', P'', P'''... sont situées dans un même plan. Traçons deux axes rectangulaires Ax, Ay, et désignons, pour rendre plus facile la détermination des projections, par a, a'... les angles moindres que deux droits que font les forces avec la partie positive Ax, et par b, b'... les angles moindres que deux droits qui font ces mêmes forces avec la partie positive Ay. Soit R la résultante, et α et β les angles qu'elle fait avec Ax et Ay (1106, *remarque* 2).

Projetant la résultante et les forces sur chacun des axes xx' et yy', on a, d'après le numéro précédent,

$$\mathrm{R}\cos\alpha = \mathrm{P}\cos a + \mathrm{P}'\cos a' + \mathrm{P}''\cos a'' + \ldots \qquad (1)$$
$$\mathrm{R}\cos\beta = \mathrm{P}\cos b + \mathrm{P}'\cos b' + \mathrm{P}''\cos b'' + \ldots \qquad (2)$$

Les axes étant rectangulaires, $\mathrm{R}\cos\alpha$ et $\mathrm{R}\cos\beta$ sont les composantes de R suivant ces axes, et si l'on désigne ces composantes par X et Y, dont les valeurs sont celles entièrement connues des seconds membres des équations précédentes, on a (1499)

$$\mathrm{R}^2 = \mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2. \qquad (3)$$

Cette dernière équation donne la valeur absolue de R, laquelle étant

substituée dans les équations (1) et (2), permet de tirer de ces équations les valeurs de $\cos\alpha$ et $\cos\beta$, et l'on a alors la résultante R en grandeur et en direction.

De même que pour la résultante, $P\cos a$ et $P\cos b$ sont les composantes de la force P suivant les axes xx', yy'; $P'\cos a'$ et $P'\cos b'$ sont celles de la force P', et ainsi de suite pour toutes les forces. En projetant les forces, nous les avons donc décomposées chacune en deux autres dirigées suivant les axes. Comme dans les équations précédentes les composantes qui agissent dans le sens positif sont affectées d'un cosinus positif, et que celles qui agissent dans l'autre sens sont affectées d'un cosinus négatif, l'on voit de plus que X et Y expriment en grandeur et en direction les résultantes des composantes suivant les axes (1495).

2° *Pour le cas où les forces ne sont pas situées dans un même plan*, prenant trois axes rectangulaires Ax, Ay et Az, appelant a, a', a''..., b, b', b'' ..., c, c', c''..., et α, β et γ les angles moindres que deux droits que font les forces et la résultante avec les parties positives Ax, Ay et Az des axes, on a, en opérant comme dans le cas précédent :

$$
\begin{aligned}
R\cos\alpha &= X = P\cos a + P'\cos a' + P''\cos a'' + \ldots \\
R\cos\beta &= Y = P\cos b + P'\cos b' + P''\cos b'' + \ldots \\
R\cos\gamma &= Z = P\cos c + P'\cos c' + P''\cos c'' + \ldots \\
R^2 &= X^2 + Y^2 + Z^2.
\end{aligned}
$$

Formules qui permettent encore de déterminer la résultante R en grandeur et en direction.

1504. *Conditions d'équilibre de plusieurs forces appliquées à un même point.*

1° Cas où les forces sont situées dans un même plan. Si les forces se font équilibre, leur résultante est égale à 0. Or si $R = 0$, on a (1503)

$$R^2 = X^2 + Y^2 = 0;$$

ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que l'on a

$$X^2 = 0 \quad \text{et} \quad Y^2 = 0; \qquad (494)$$

d'où

$$
\begin{aligned}
X &= P\cos a + P'\cos a' + P''\cos a'' + \ldots\ldots = 0, \\
Y &= P\cos b + P'\cos b' + P''\cos b'' + \ldots\ldots = 0.
\end{aligned}
$$

Ce qui indique que la somme algébrique des projections des composantes sur chacun des axes est égale à 0.

Il est évident que les deux conditions $X = 0$ et $Y = 0$ sont suffisantes pour l'équilibre. De plus elles sont nécessaires; car si une seule des composantes X, Y était nulle, la résultante serait égale à l'autre, laquelle n'étant pas nulle, il ne pourrait pas y avoir équilibre. Si aucune des composantes X, Y n'était nulle, on pourrait toujours construire un rectangle ayant pour côtés ces composantes, et la diagonale de ce rec-

tangle ou la résultante n'étant pas nulle, il n'y aurait pas non plus équilibre.

2° Cas où les forces ne sont pas situées dans un même plan. Comme dans le cas précédent, si les forces se font équilibre, leur résultante est nulle, et l'on a (1503)

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = 0;$$

ce qui exige que l'on ait

$$X^2 = 0,\ Y^2 = 0,\ Z^2 = 0;$$

d'où

$$X = P\cos a + P'\cos a' + \ldots\ldots = 0,$$
$$Y = P\cos b + P'\cos b' + \ldots\ldots = 0,$$
$$Z = P\cos c + P'\cos c' + \ldots\ldots = 0.$$

Conditions identiques à celles du 1°.

Les trois conditions $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ sont évidemment suffisantes pour qu'il y ait équilibre. De plus elles sont nécessaires; car si deux seulement des composantes X, Y, Z étaient nulles, la troisième serait la résultante, et il ne pourrait y avoir équilibre. Si une seule de ces composantes était nulle, les deux autres étant rectangulaires et situées dans un même plan, elles donneraient une résultante, et il ne pourrait y avoir non plus équilibre. Enfin si aucune des composantes X, Y, Z n'était nulle, on pourrait construire un parallélipipède ayant ces forces pour arêtes, et sa diagonale, qui serait la résultante, n'étant pas nulle, il n'y aurait pas non plus équilibre.

1508. *Cas où le point d'application des forces n'est pas entièrement libre.* Ainsi il ne peut, par exemple, se mouvoir que sur une ligne ou sur une surface.

Alors le nombre des conditions pour l'équilibre est diminué; il est ramené à une si le point d'application ne peut se mouvoir que sur une ligne, et à deux s'il ne peut se mouvoir que sur une surface.

1° Le point ne pouvant se mouvoir que sur une ligne, prenons la tangente à cette ligne au point d'application des forces pour l'un des axes, celui xx' par exemple. Les deux autres axes seront perpendiculaires à xx'; par conséquent, les deux composantes Y et Z auront une résultante qui sera aussi normale à xx', et qui ne tendra, quelle que soit sa grandeur, qu'à comprimer le point d'application contre les obstacles qui l'obligent à suivre la ligne, sans nullement tendre à produire le mouvement dans la direction où il est possible.

Pour l'équilibre il suffira donc d'avoir

$$X = P\cos a + P'\cos a' + P''\cos a'' + \ldots = 0.$$

2° Si le point est assujetti à se mouvoir sur une surface, en prenant deux axes xx', yy' tangents à la surface au point d'application des forces, l'axe zz' sera normal à la surface; par la même raison que dans le cas précédent, la composante Z sera tenue en équilibre par l'obstacle

qui oblige le point d'application à se mouvoir sur la surface, et alors les conditions d'équilibre seront :

$$X = P\cos a + P'\cos a' + P''\cos a'' + \ldots = 0,$$
$$Y = P\cos b + P'\cos b' + P''\cos b'' + \ldots = 0.$$

1506. *Le travail de la résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point est égal à la somme algébrique des travaux des composantes.*

1° *Supposons d'abord que l'espace parcouru par le point d'application est rectiligne.* Dans ce cas, le travail de chaque force est égal à l'espace parcouru multiplié par la projection de la force sur sa direction (1471); le travail de toutes les composantes est alors égal à l'espace parcouru multiplié par la somme algébrique des projections de ces composantes; or comme cette somme algébrique est égale à la projection de la résultante (1502), il en résulte donc bien que le travail de la résultante est égal à la somme des travaux des composantes, ce que l'on peut exprimer, $\mathfrak{T}$ signifiant *travail de*, par

$$\mathfrak{T}R = \mathfrak{T}P + \mathfrak{T}Q + \ldots$$

2° *Si l'espace parcouru est polygonal*, pour chaque portion droite de l'espace parcouru le travail de la résultante étant égal à la somme des travaux des composantes, cela est encore vrai pour l'espace total parcouru, et l'on peut encore poser la formule précédente.

3° *Si l'espace parcouru est courbe*, en le considérant comme composé d'éléments rectilignes, on retombe dans le cas du 2°, et l'on peut encore poser la formule précédente.

1507. *Lorsque les forces appliquées au même point sont en équilibre, la somme algébrique de leurs travaux est égale à* 0. En effet, ces forces étant en équilibre, leur résultante est nulle; le travail de cette résultante étant nul lui-même, la somme algébrique des travaux des composantes, qui lui est égale, est donc bien égale à 0. C'est du reste ce qui résulte directement de ce que la somme algébrique des projections des composantes sur la direction de l'espace parcouru est égale à 0.

FORCES APPLIQUÉES A UN CORPS SOLIDE (1448).

1508. *Troisième principe fondamental* (1420, 1487), *ou principe de la réaction égale et contraire à l'action.*

Fig. 451.

A

P

Supposant une force P qui tire un fil AP fixé par son extrémité A à un point fixe, ce point est tiré dans le sens AP en vertu de l'action de la force P; en même temps, le point fixe A produit sur le fil, qui la transmet à la force P ou mieux au corps par l'intermédiaire duquel cette force agit, une réaction égale à l'action de P, et de signe contraire.

En remplaçant le fil par une tige rigide, les forces, au

lieu d'être répulsives, pourraient être attractives, et il y aurait encore égalité entre l'action et la réaction.

1500. *Forces moléculaires.* Ce que nous venons de voir s'exercer entre le point A et la force P par l'intermédiaire du fil AP, se produit d'une manière permanente entre les molécules des corps. Deux points matériels quelconques exercent l'un sur l'autre, à distance, des attractions mutuelles égales. Cette attraction mutuelle étant due à la même cause qui fait que la terre attire vers son centre tous les corps qui sont à sa surface (1438), on peut l'appeler *gravitation moléculaire.*

Influence des actions moléculaires mutuelles sur l'état physique des corps. Élasticité; sa limite. La gravitation moléculaire augmentant à mesure que les molécules matérielles sont plus rapprochées, il en résulte que si toutes les molécules ne sont pas en contact, c'est qu'une autre action mutuelle répulsive fait équilibre à la première.

Un corps se contractant lorsque sa température baisse, cela fait voir qu'évidemment les molécules ne sont pas en contact, et qu'elles sont d'autant plus éloignées que la température est plus grande.

Il existe donc une action mutuelle répulsive, dont la cause est inconnue, et qui varie avec la température.

Deux molécules voisines étant soumises à deux actions mutuelles, l'une attractive et l'autre répulsive, il en résulte que ces deux molécules étant tout à fait libres, elles doivent se placer à une distance telle que la force attractive, qui varie comme la gravitation en raison inverse du carré des distances, fasse équilibre à la force répulsive, laquelle étant due à la chaleur et peut-être à d'autres causes, ne varie pas dans le même rapport.

Cela établi, supposons qu'on applique à chacun des deux points matériels considérés une même force tendant à les écarter. Ces forces s'ajoutant aux actions mutuelles répulsives, celles-ci deviennent plus grandes que les actions mutuelles attractives, et les deux molécules s'écartent; or, comme les actions mutuelles répulsives diminuent, à partir du point d'équilibre et pour de très-petits écartements, beaucoup plus rapidement que les forces mutuelles attractives, il en résulte qu'il y a un point où l'équilibre s'établit. Les forces étrangères cessant leur action, les molécules reprennent leur première position; c'est ce qui explique l'*élasticité* des corps solides. A mesure que les forces étrangères augmentent, l'écartement devient plus grand, et il arrive un instant où la moindre augmentation des forces étrangères fait que les actions mutuelles attractives deviennent inférieures aux forces répulsives; alors les deux molécules s'éloignent indéfiniment, en vertu des forces qui les sollicitent; on est arrivé à la *limite d'élasticité.* A partir de ce point, les molécules ne reprennent plus leur position primitive quand les forces étrangères cessent leur action.

Si les forces étrangères, au lieu de tendre à éloigner les molécules, tendaient à les rapprocher, elles s'ajouteraient aux forces attractives, et l'on aurait des phénomènes analogues à ceux du cas précédent.

C'est aux causes qui viennent d'être développées qu'est due la consti-

tution physique des corps solides, dans lesquels les actions mutuelles attractives et répulsives variant fortement, et non de la même manière, par suite de petits changements de forme, ils résistent dans certaines limites, sans déformation sensible, aux efforts qui tendent à les comprimer ou à les étendre.

A l'aide de la chaleur seule on peut éloigner les molécules des corps solides jusqu'à la limite d'élasticité, c'est-à-dire jusqu'au point où les molécules se séparent sans efforts, comme dans les liquides. La fusion des corps en est un exemple.

Le froid fait prendre aux liquides l'état solide en rapprochant leurs molécules; ce que l'on n'a pu encore opérer par une simple pression.

Dans les solides, il y a équilibre stable entre les actions mutuelles attractives et répulsives. Pour les liquides, il y a encore équilibre entre les forces attractives et répulsives, mais l'équilibre est instable, le moindre effort écarte les molécules.

En chauffant les liquides, les forces répulsives l'emportent sur l'attraction, les molécules tendent à s'éloigner indéfiniment, et le liquide se gazéifie; c'est ce qui fait qu'un gaz tend à se dilater indéfiniment. Le froid, quand surtout il est aidé de la pression, ramène les gaz à l'état liquide.

Dans toutes les conditions que nous venons d'examiner, l'action d'une molécule sur l'autre est égale et directement opposée à la réaction de celle-ci sur la première.

Si au lieu de deux molécules on en considère un nombre quelconque, les actions de chacune d'elles sur toutes les autres sont aussi égales et directement opposées aux réactions de celles-ci sur la première.

1510. Toute force, autre que les actions moléculaires, qui agit sur un corps est appelée *force extérieure*. De son action, il résulte, comme effet immédiat, que son point d'application se déplace d'une quantité insensible mais réelle si le corps est solide, et du déplacement, que l'on peut appeler *déplacement moléculaire*, du point d'application, résultent des déplacements analogues pour toutes les molécules du corps.

Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons que les forces extérieures ne sont pas assez grandes pour que les déplacements relatifs qu'elles font prendre aux molécules des corps qu'elles sollicitent dépassent la limite d'élasticité.

1511. *Force d'inertie.* Lorsqu'une force F agit sur un point matériel libre, on a, à un instant quelconque de son action, $F = mj$ (1435, 1461). Le point matériel exerce, contre le corps qui lui transmet l'action de la force F, une réaction égale et contraire à F; cette réaction est due à l'inertie (1420); elle prend le nom de *force d'inertie*, et elle se mesure à chaque instant par le produit mj.

Si l'on traîne, par exemple, un wagon à l'aide d'une corde, si le mouvement est accéléré, à un instant quelconque, la tension de la corde se compose de la tension qui serait nécessaire pour continuer le mouvement si à l'instant considéré il devenait uniforme en conservant la vitesse acquise, plus de la force d'inertie, qui est nulle lorsque le mou-

vement est uniforme et augmente avec j lorsque le mouvement est accéléré. Si le mouvement était retardé, la force d'inertie changerait de signe avec j; ainsi elle se retrancherait de la tension de la corde qui continuerait le mouvement uniforme, c'est-à-dire de la tension qui ferait équilibre aux frottements, à la résistance de l'air, etc.

1512. On peut poser comme axiome expérimental, que deux forces P et Q, égales, de même direction et de sens contraires, appliquées en deux points différents A et B d'un même corps solide, sont en équilibre. Cela est encore vrai quand le corps n'est qu'une simple tige, inextensible si les deux forces tendent à l'allonger, et incompressible si elles tendent à la comprimer.

Fig. 452.

1513. *On ne change rien à l'état d'un corps solide en appliquant une force qui le sollicite en un point quelconque de sa direction, pourvu que le nouveau point d'application soit relié au premier d'une manière invariable.*

Ainsi, la force P, qui est appliquée en A, peut l'être en A'. En effet, en appliquant au point A' deux forces P' et P'' de sens contraires et égales chacune à P, ces deux forces se font équilibre et ne changent rien au premier système (1494); mais les deux forces P et P'' se faisant équilibre entre elles (1512), on peut les supprimer sans rien changer encore au système, et l'on voit que la force P a été remplacée par son égale P' appliquée en A', ou, ce qui revient au même, la force P a été appliquée au point A'.

Fig. 453.

1514. *Résultante des forces* P, Q... *dont les directions se rencontrent en un même point et qui sont appliquées en des points différents.*

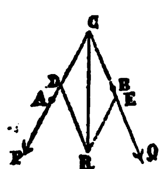


Fig. 454.

1° Soient P et Q deux forces appliquées en A et B, et dont les directions se rencontrent en C.

Le point C faisant partie du même corps que ceux A et B, ou supposant qu'il est relié invariablement à ce corps d'une manière quelconque, les deux forces P et Q peuvent être appliquées en C. Alors leur résultante est représentée en grandeur et en direction par la diagonale CR de leur parallélogramme (1488). Cette résultante peut être appliquée en un point quelconque de sa direction, pourvu que ce point appartienne au corps solide sollicité par les forces P et Q. Si la direction CR ne rencontrait aucun point du corps, il est évident qu'elle ne pourrait produire sur ce corps le même effet que les composantes qu'autant que son point d'application serait relié invariablement au corps. Dans tous les cas, elle a les mêmes relations avec les forces.

On voit que quels que soient les points d'application des forces P et Q, la résultante sera toujours la même en grandeur et en direction; mais comme le point d'application peut être un point quelconque de

cette direction, pourvu qu'il appartienne au corps ou qu'il y soit relié invariablement d'une manière quelconque, il est donc indéterminé.

Si deux forces appliquées à un même corps donnent toujours la même résultante, il est facile de voir qu'au contraire une force R peut être décomposée d'une infinité de manières en deux autres, dont les directions rencontrent celle de R; mais tous les systèmes qu'on peut obtenir sont équivalents, puisqu'ils ont la même résultante.

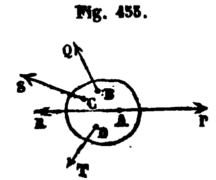
2° Si l'on avait plus de deux forces concourant au même point C et appliquées en des points quelconques d'un corps solide, on pourrait, comme dans le cas précédent, supposer toutes les forces appliquées au point de concours; puis en déterminer la résultante comme au n° 1492.

Si toutes les forces avaient la même direction, on pourrait les appliquer toutes en un même point de cette direction, et leur résultante se déterminerait comme au n° 1495.

Remarque. Les forces dont les directions se rencontrent pouvant être appliquées à leur point de concours, il en résulte qu'il existe entre elles les mêmes relations que pour les forces appliquées à un même point (1499 et suivants).

1515. *Lorsqu'un système de forces* P, Q, S, T *est en équilibre, chacune de ces forces est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres.* En effet, la force quelconque P faisant équilibre au système des autres forces Q, S, T, et réciproquement ces forces faisant équilibre à P, comme une force R égale et directement opposée à P fera aussi équilibre à cette force, elle produira donc le même effet que le système Q, S, T, et sera par conséquent sa résultante.

Fig. 455.



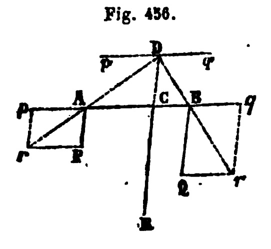
COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION DES FORCES PARALLÈLES.

1516. *La résultante* R *de deux forces parallèles* P *et* Q *de même sens et appliquées à un corps solide, est égale à leur somme, leur est parallèle, est située dans leur plan, a le même sens et divise la droite* AB *qui joint les points d'application en deux parties réciproquement proportionnelles aux composantes.*

Ainsi $R = P + Q$, et $P : Q = BC : AC$.

Appliquons aux points A et B deux forces égales p et q dirigées en sens contraire dans la direction AB; ces deux forces se faisant équilibre, elles ne changeront rien à l'effet des deux forces P et Q, et la résultante de ces deux dernières est la même que celle des quatre forces P, Q, p, q.

Fig. 456.



Soient r la résultante des deux forces P, p (1488), et r' celle des deux forces Q, q; les deux forces r et r', dont les directions concourent au point D, ont la même résultante

que les deux forces P et Q. Supposons r et r' appliquées au point D, et décomposons chacune d'elles en deux forces dirigées suivant la direction $p'q'$ parallèle à pq, et suivant celle DR parallèle à AP ; il est évident que chacune des forces r et r' reproduira au point D des composantes respectivement égales et parallèles à celles qui l'ont produite au point A ou B. Ainsi, pour r on aura $p' = p$, et la composante dirigée suivant DR sera égale à P. Les deux forces p' et q' se font équilibre, et les deux composantes dirigées suivant DR s'ajoutent et donnent la force unique $P + Q = R$ pour la résultante cherchée ; ce qui démontre la première partie du théorème.

Les deux triangles semblables BQr' et BCD donnent

$$Qr' \text{ ou } q : BQ \text{ ou } Q = BC : DC.$$

Les deux triangles semblables APr et ACD donnent de même

$$P : p = DC : AC.$$

Multipliant ces deux proportions terme à terme on a, en remarquant qu'ayant $p = q$ ces quantité s'annulent,

$$P : Q = BC : AC.$$

Ce qu'il restait à démontrer.

Considérant deux forces parallèles comme deux forces qui concourent à l'infini, de ce qui a été établi aux nos 1490 et 1501 on peut conclure tout ce qui vient d'être démontré.

Remarque. Le point d'application C de la résultante ne change pas quand les deux forces P et Q varient dans un même rapport ; mais la résultante varie dans le même rapport.

1517. De la proportion précédente on conclut :

$$P : (P + Q) = BC : (BC + AC), \quad \text{et} \quad Q : (P + Q) = AC : (BC + AC),$$

ou, en observant que $P + Q = R$ et $BC + AC = AB$,

$$P : R = BC : AB, \quad \text{et} \quad Q : R = AC : AB.$$

Changeant les moyens de place dans ces proportions, on obtient deux nouvelles proportions qui ont un rapport commun, et desquelles on conclut

$$P : BC = Q : AC = R : AB.$$

Ce qui montre que chacune des trois forces P, Q, R *est proportionnelle à la portion de* AB *comprise entre les directions des deux autres* (1501).

1518. Ayant à décomposer une force R en deux autres parallèles P et Q appliquées en A et B (*fig.* 456), on pose

$$R : P = AB : BC, \quad \text{d'où} \quad P = R\,\frac{BC}{AB}, \quad \text{puis} \quad Q = R - P.$$

Ayant à décomposer une force R en deux autres, l'une $P < R$, qui est

donnée ainsi que son point d'application A, et l'autre Q qu'il s'agit de déterminer ainsi que son point d'application B,

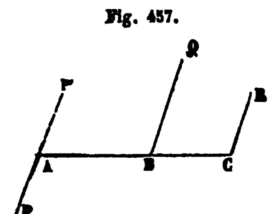
on a d'abord $$Q = R - P;$$

puis $$Q : R = AC : AB, \quad \text{d'où} \quad AB = AC\,\frac{R}{Q} = AC\,\frac{R}{R-P}.$$

1519. *Quand les deux forces parallèles* P *et* Q *sont dirigées en sens contraires, leur résultante* R *leur est parallèle, dirigée dans le sens de la plus grande* Q, *située dans leur plan et égale à leur différence, et chacune des forces est encore proportionnelle à la partie de la direction* AB *comprise entre les deux autres forces.*

La démonstration du n° 1516 peut encore s'appliquer à ce cas; mais l'on peut raisonner comme il suit:

Fig. 457.



Décomposons Q en deux forces, dont l'une $P' = P$ est appliquée au point A; l'autre, que nous désignerons par R, est (1518)

$$R = Q - P',$$

et son point d'application C est tel que l'on a

$$R : Q = AB : AC, \quad \text{d'où} \quad AC = AB\,\frac{Q}{R} = AB\,\frac{Q}{Q-P'}.$$

Les deux systèmes de forces P, P′, R, et P, Q ayant la même résultante, comme dans le premier système les deux forces P et P′ se font équilibre, il ne reste que la force R, qui est sa propre résultante, et par suite celle des deux forces P et Q.

Comme on a

$$R = Q - P', \quad \text{et} \quad P' : BC = Q : AC = R : AB,$$

remplaçant P′ par P, on a donc bien aussi, comme il fallait le démontrer,

$$R = Q - P, \quad \text{et} \quad P : BC = Q : AC = R : AB.$$

Par une marche analogue à celle du n° 1518, on décomposerait une force en deux autres de sens contraires.

1520. Pour les forces parallèles, il y a encore indétermination dans la décomposition d'une force en plus de deux autres. On le ferait voir en raisonnant comme au n° 1498.

L'indétermination disparaît quand les points d'application A, B, C des trois composantes et celui O de la résultante sont dans un même plan qui ne contient pas les forces et ne leur est pas parallèle. Formant le triangle ABC, joignant le point d'application A de l'une quelconque des composantes au point O, et prolongeant AO jusqu'à BC en D, on décompose d'abord R en deux forces P et $r = R - P$, appliquées en A et D (1518), puis la force r en deux autres Q et S appliquées en B et C, et les trois forces P, Q, S sont les trois composantes uniques qui satisfont à la question. En effet, ayant

Fig. 458.

$$R : P = AD : OD,$$

comme ce dernier rapport est égal à celui des hauteurs des triangles ABC, OBC, ou à celui de ces triangles, puisque ces triangles ont même base BC, on a donc

$$R : P = ABC : OBC.$$

Opérant de même en partant des points B et C, on obtiendrait

$$R : Q = ABC : OAC,$$
$$R : S = ABC : OAB.$$

Ces trois dernières proportions se résument dans la suite de rapports égaux

$$\frac{R}{ABC} = \frac{P}{OBC} = \frac{Q}{OAC} = \frac{S}{OAB};$$

qu'il est facile d'énoncer verbalement d'après la figure, et qui est indépendante de l'ordre suivi dans la décomposition.

Si le point O était hors du triangle ABC, la décomposition, que l'on effectuerait comme dans le cas précédent, n'aurait encore rien d'indéterminé; mais les triangles proportionnels aux composantes ne seraient plus intérieurs au triangle ABC, la somme de leur surface ne serait plus égale à celle de ce triangle, et l'on n'aurait plus $R = P + Q + S$.

1521. *Couple.* Lorsque les deux forces P et Q sont égales, parallèles, de sens contraires, et non placées dans la même direction (*fig.* 457), elles constituent un *couple.*

Appelant R la résultante de deux telles forces, on a (1519)

$$R = Q - P = 0, \quad \text{et} \quad AC = AB\,\frac{Q}{R} = AB\,\frac{Q}{Q-P} = AB\,\frac{Q}{0} = \infty.$$

Ce qui fait voir qu'à mesure que P diffère moins de Q, la résultante diminue, et son point d'application s'éloigne; et que quand $P = Q$, la valeur de la résultante est nulle, et le point d'application est à l'infini.

Ainsi, quelle que soit la grandeur d'une force et son point d'application, elle ne peut être la résultante d'un couple.

1522. *Il reste à se demander si les deux forces* P *et* Q *n'ayant pas de résultante, c'est-à-dire ne pouvant être tenues en équilibre par une force unique* (1515), *elles ne se font pas équilibre entre elles.*

Fig. 459.

Si ces deux forces étaient en équilibre, on ne changerait rien à cet état en rendant fixe un point O de AB, autour duquel cette droite peut tourner librement; mais alors la force P tend à faire tourner la droite AB autour de O, dans le sens de la flèche, et comme la force Q tend à produire le mouvement dans le même sens, il est évident que les deux forces P et Q ne se font pas équilibre. Ainsi un couple n'est pas non plus en équilibre par lui-même.

1523. *Quoique la résultante de deux forces parallèles soit située dans le plan de ces deux forces, dans le cas où nous avons reconnu que cette résultante existe* (1516, 1519), *on peut se demander si, dans le cas du couple, la résultante pourrait être située hors de ce plan.*

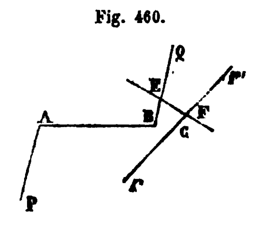


Fig. 460.

Si cela était, en appliquant cette résultante en sens contraire de sa direction, de C en r', il y aurait équilibre entre les trois forces P, Q, r' (1515).

Menons une droite EF rencontrant les directions BQ et Cr', sans être dans un même plan avec AP. On ne changera pas l'équilibre des forces P, Q, r' en rendant fixe la droite EF, de sorte que le système ne puisse plus que tourner autour de cette ligne comme axe. Cela établi, la force Q rencontrant l'axe au point E, on peut la supposer appliquée en ce point, et elle sera détruite par la fixité de cet axe; il en est de même de la force r'; mais la force P n'étant pas située dans un même plan avec l'axe EF, elle ne rencontre pas cet axe et ne lui est pas non plus parallèle. On peut alors la décomposer en trois forces, l'une perpendiculaire à EF, l'autre parallèle à cette droite, et la troisième perpendiculaire aux deux premières. La première de ces composantes est détruite par l'axe qu'elle rencontre; la deuxième est également détruite par cet axe, puisque, lui étant parallèle, elle ne peut que faire glisser le système suivant la longueur de cet axe, mouvement qui est impossible; mais il reste la troisième composante, laquelle, sans rencontrer l'axe, agit dans un plan qui lui est normal, et fait évidemment tourner le système autour de cet axe; il est donc absurde de supposer que la force r' fait équilibre aux deux forces P et Q, c'est-à-dire que ces deux forces ont une résultante.

REMARQUE. *On prouverait de la même manière que deux forces quelconques non situées dans le même plan n'ont pas de résultante;* d'où il résulte que *trois forces non situées dans le même plan ne peuvent se faire équilibre* (1515).

1524. *Résultante d'un nombre quelconque de forces parallèles.*

Que les forces soient ou non situées dans un même plan, pour en déterminer la résultante, on prend la résultante des deux premières forces (1516, 1519); puis la résultante de cette première résultante et de la troisième force, ce qui donne la résultante des trois premières forces, et, continuant ainsi de suite, quand on a employé toutes les forces, la dernière résultante obtenue est celle de toutes les forces. Il peut arriver qu'au lieu d'avoir une force unique pour dernière résultante, on ait un couple; alors les forces données n'ont pas de résultante.

Remarque. Comme pour deux forces (1416), le point d'application de la résultante d'un nombre quelconque de forces parallèles ne change pas quand toutes ces forces varient dans un même rapport; mais la résultante varie dans le même rapport.

1525. En suivant la même marche que dans le cas précédent, les nos 1488, 1492, 1516 et 1519 donnent les moyens de déterminer *la résultante d'un nombre quelconque de forces situées dans un même plan et ayant des directions et des points d'application quelconques.*

Par les mêmes moyens, on peut encore déterminer, dans les cas possibles (1522, 1523), la résultante de forces dont les directions sont parallèles ou non et situés ou non dans un même plan, et dont les points d'application sont quelconques.

1526. La projection de la résultante de deux forces concourantes ou de deux forces parallèles, sur un axe quelconque, étant égale à la somme algébrique des projections des composantes sur le même axe, on étend facilement cette propriété à un nombre indéterminé de forces quelconques (1502).

1527. *Autant de forces que l'on veut,* F′, F″, F‴..., *peuvent se réduire d'une infinité de manières à deux forces équivalentes dont l'une au moins passe par un point donné* O.

Fig. 461.

Par chacune des deux forces quelconques F′, F″ et le point O faisons passer un plan; ces deux plans se coupent suivant la ligne droite OK. Cela fait, décomposons la force F′, appliquée en M, en deux autres P et Q, que l'on peut transporter l'une en O et l'autre en un point quelconque A de l'intersection OK; la figure explique convenablement cette décomposition (1488).

La force F″, appliquée en M′, peut être appliquée au point *m* de l'intersection OK; puis être décomposée en deux forces, l'une P′ appliquée en O, et l'autre Q′ appliquée en A (1519). P et P′, appliquées en O, ont pour résultante unique S′; les forces Q et Q′ ont pour résultante unique T′; ainsi, dans le système proposé, on peut remplacer les deux forces F′ et F″ par deux équivalentes S′ et T′.

Le nouveau système contient autant de forces que le premier; mais

comme il y en a une qui passe par le point O, le nombre de celles qui n'y passent pas est diminué de un. Combinant T' avec la troisième force F‴, on les remplacera par deux autres, dont l'une, passant par O, se combinera avec S′ et donnera une force unique S″ qui passera par O; de sorte que le nombre des forces ne passant pas par O sera encore diminué de un. En continuant ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait employé toutes les forces, on voit qu'on aura remplacé toutes les forces données par deux forces uniques, dont l'une S passera par le point O, et dont l'autre T sera ou ne sera pas située dans un même plan avec S. Si ces deux forces sont situées dans un même plan, à moins qu'elles ne constituent un couple, on pourra trouver leur résultante, qui sera la résultante des forces données. Si elles ne sont pas situées dans le même plan, elles n'ont pas de résultante unique, et il en est de même des forces données (1523). Si l'une des forces S ou T était nulle, l'autre serait la résultante unique des forces données, et si elles étaient nulles l'une et l'autre ou encore égales et directement opposées, c'est que les forces données se feraient équilibre.

1528. La projection de la résultante de deux forces quelconques sur un axe étant égale à la somme des projections des composantes sur le même axe (1526), il en résulte que la somme des projections des deux forces résultantes S et T du numéro précédent est égale à la somme des projections de toutes les forces F′, F″... sur le même axe, et si les forces F′, F″... ou leurs équivalentes S et T ont une résultante unique, *la projection de cette résultante sur un axe quelconque est encore, dans ce cas général, égale à la somme algébrique des projections des composantes sur le même axe.*

1529. Transportant parallèlement à elles-mêmes toutes les forces F′, F″... d'un système (1527), de manière à les appliquer à un même point quelconque de l'espace en leur conservant leurs intensités et leurs sens, et considérant trois axes rectangulaires issus d'un même point, sur chacun de ces axes, la somme des projections des forces transportées est égale à la somme des projections des forces données F′, F″..., puisque deux droites égales et parallèles ont des projections égales sur une même droite; par conséquent, si les forces données ont une résultante, ses projections sur les trois axes seront respectivement égales aux projections sur les mêmes axes de la résultante des forees transportées, et ces deux résultantes ayant des projections égales sur trois axes non situés dans le même plan, elles sont égales et parallèles. Ainsi, *lorsqu'un système de forces quelconques a une résultante, on peut obtenir cette résultante en grandeur, direction et sens, en transportant toutes les forces données parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque, et en composant toutes les forces transportées* (1492, 1503). Si les forces données se font équilibre, la résultante qu'on obtient ainsi est nulle.

Dans la pratique, on s'appuie journellement sur cette propriété remarquable, soit pour vérifier l'équilibre des constructions ou parties de constructions, soit pour en établir les conditions d'équilibre.

CENTRE DES FORCES PARALLÈLES. MOMENT DE POSITION D'UNE FORCE.

1830. *Centre des forces parallèles.* On appelle ainsi le point commun à toutes les directions que prend la résultante d'un système de forces parallèles, quand celles-ci, en restant toujours appliquées aux mêmes points d'un corps solide, prennent d'autres directions quelconques parallèles entre elles.

1831. *Un tel point existe.* En effet, considérant d'abord deux forces P et Q appliquées aux points A et B, r étant la résultante et C son point d'application, la position du point C ne dépendant que de la grandeur relative des forces P et Q, et non de l'angle qu'elles font avec AB (1516), en donnant aux composantes les autres directions parallèles AP′ et BQ′, la résultante r' sera égale à r, prendra la direction Cr' parallèle à AP′ et BQ′, et son point d'application sera toujours le point C, qui est le centre des forces parallèles P et Q. Quand on a une troisième force S, que nous prendrons dirigée en sens contraire des premières afin d'étendre la propriété du centre des forces parallèles à des forces quelconques, par la même raison que dans le cas précédent, le point d'application E de la résultante R des forces $r = P + Q$ et S ne change pas quand r et S prennent les directions Cr' et DS′ (1519), c'est-à-dire quand les trois forces P, Q, S prennent des positions parallèles quelconques autour de leurs points d'application. Ce point est alors le centre de ces forces parallèles. Continuant ainsi de suite, on ferait voir l'existence du centre d'un nombre quelconque de forces parallèles, et l'on voit que la marche suivie pour obtenir la résultante des forces parallèles (1524) détermine aussi le centre de ces forces.

Fig. 462.

Remarque 1. Il est évident qu'en rendant fixe le centre des forces parallèles d'un système, il y aura équilibre quelle que soit la position du système autour de ce centre, puisque, dans toutes les positions, la résultante passera par ce point et sera par conséquent détruite. On suppose que dans les diverses positions les forces restent constantes, parallèles entre elles et toujours appliquées aux mêmes points.

Remarque 2. Le point d'application de la résultante d'un nombre quelconque de forces parallèles ne changeant pas quand toutes les forces varient dans un même rapport (1524), il s'ensuit que le centre des forces parallèles ne change pas non plus quand toutes les forces varient dans le même rapport; et, dans le cas de la remarque précédente, le système serait encore en équilibre si toutes les forces variaient dans le même rapport.

1832. *Le moment de position d'une force par rapport à un plan* est le

produit de cette force par la perpendiculaire abaissée de son point d'application sur le plan.

Le moment de position d'une force par rapport à une droite est le produit de cette force par la perpendiculaire abaissée de son point d'application sur la droite, appelée axe des moments.

Le moment de position d'une force par rapport à un point est le produit de la force par la distance de ce point au point d'application de la force.

1333. *Le moment de position de la résultante d'un nombre quelconque de forces parallèles, par rapport à un plan quelconque, est égal à la somme des moments de position de ces forces par rapport au même plan.*

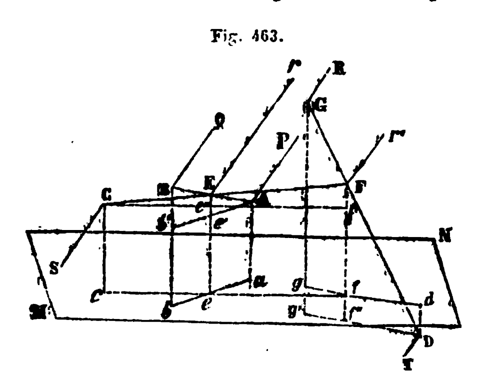


Fig. 463.

Quand on a plusieurs forces dont les points d'application sont de côtés différents du plan, on considère les perpendiculaires abaissées des points situés d'un côté comme positives, et celles menées des points situés de l'autre côté comme négatives : ainsi, les perpendiculaires Aa, Bb.... étant positives, celle Dd est négative. De même, les forces P, Q dirigées dans un sens sont positives, et les forces S, T dirigées dans l'autre sens sont négatives.

Le signe du moment de position d'une force dépend de ceux de la force et de la perpendiculaire abaissée du point d'application : ainsi $P \times Aa$ est positif, $-S \times + Cc$ est négatif; $-T \times - Dd$ est positif (423).

Considérons d'abord les deux forces P et Q, dont la résultante est r (1516). Nous aurons

$$r \times Ee = P \times Aa + Q \times Bb.$$

En effet, menant Ab' parallèle à ab, on a (1516)

$$\frac{r}{Q} = \frac{AB}{AE} = \frac{Bb'}{Ee'};$$

d'où $$r \times Ee' = Q \times Bb'. \tag{1}$$

Remarquant que $r = P + Q$ et $e'e = Aa = b'b$, on peut poser

$$r \times e'e = P \times Aa + Q \times b'b. \tag{2}$$

Ajoutant membre à membre les équations (1) et (2), on a

$$r\,(Ee' + e'e) = P \times Aa + Q\,(Bb' + b'b)$$

ou

$$r \times \mathrm{E}e = \mathrm{P} \times \mathrm{A}a + \mathrm{Q} \times \mathrm{B}b.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Considérant les deux forces $-\mathrm{S}$ et r, dont la résultante est r' (1519), on a encore

$$r' \times \mathrm{F}f = r \times \mathrm{E}e - \mathrm{S} \times \mathrm{C}c = \mathrm{P} \times \mathrm{A}a + \mathrm{Q} \times \mathrm{B}b - \mathrm{S} \times \mathrm{C}c;$$

car, menant $\mathrm{C}f'$ parallèle à cf, on a

$$\frac{r'}{r} = \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CF}} = \frac{\mathrm{E}e''}{\mathrm{F}f'};$$

d'où $$r' \times \mathrm{F}f' = r \times \mathrm{E}e''. \quad (3)$$

Remarquant que $r' = r - \mathrm{S}$ et $f'f = e''e = \mathrm{C}c$, on peut poser

$$r' \times f'f = r \times e''e - \mathrm{S} \times \mathrm{C}c. \quad (4)$$

Ajoutant les équations (3) et (4), on a

$$r'(\mathrm{F}f' + f'f) = r(\mathrm{E}e'' + e''e) - \mathrm{S} \times \mathrm{C}c$$

ou

$$r' \times \mathrm{F}f = r \times \mathrm{E}e - \mathrm{S} \times \mathrm{C}c = \mathrm{P} \times \mathrm{A}a + \mathrm{Q} \times \mathrm{B}b - \mathrm{S} \times \mathrm{C}c.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Combinant r' avec $-\mathrm{T}$, on obtient R pour résultante, et menant $\mathrm{D}g'$ parallèle à dg, on a (1519)

$$\frac{\mathrm{R}}{r'} = \frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{DG}} = \frac{\mathrm{F}f''}{\mathrm{G}g'};$$

d'où $$\mathrm{R} \times \mathrm{G}g' = r' \times \mathrm{F}f''. \quad (5)$$

Remarquant que $\mathrm{R} = r' - \mathrm{T}$ et $g'g = f''f = \mathrm{D}d$, on peut poser

$$\mathrm{R} \times g'g = r' \times f''f - \mathrm{T} \times \mathrm{D}d. \quad (6)$$

Retranchant membre à membre l'équation (6) de celle (5), on a

$$\mathrm{R}(\mathrm{G}g' - g'g) = r'(\mathrm{F}f'' - f''f) + \mathrm{T} \times \mathrm{D}d$$

ou

$$\mathrm{R} \times \mathrm{G}g = r' \times \mathrm{F}f + \mathrm{T} \times \mathrm{D}d = \mathrm{P} \times \mathrm{A}a + \mathrm{Q} \times \mathrm{B}b - \mathrm{S} \times \mathrm{C}c + \mathrm{T} \times \mathrm{D}d.$$

Ce qui fait bien voir que le principe est général pour un nombre quelconque de forces.

1534. *Détermination du centre des forces parallèles en fonction des moments de position des forces.*

1° La position d'un point est toujours fixée quand on connaît ses distances à trois plans rectangulaires (1086). Soient alors P, P′, P″... les forces parallèles données; x, y, z; x', y', z',... les coordonnées respectives de leurs points d'application par rapport aux plans yz, xz et xy. Il

s'agit de déterminer, par rapport aux mêmes plans, les coordonnées X, Y et Z du point d'application de la résultante R de ces forces. D'abord on a algébriquement (1516, 1519)

$$R = P + P' + P'' + \dots \qquad (1)$$

Cette équation fournit, d'après les valeurs et les signes des forces P, P', P''... la valeur de R, ainsi que son signe ou le sens dans lequel elle agit.

On a respectivement pour les trois plans coordonnés (1533)

$$RX = Px + P'x' + P''x'' + \dots \qquad (2)$$
$$RY = Py + P'y' + P''y'' + \dots \qquad (3)$$
$$RZ = Pz + P'z' + P''z'' + \dots \qquad (4)$$

d'où l'on tire

$$X = \frac{Px + P'x' + P''x'' + \dots}{R} \qquad (5)$$
$$Y = \frac{Py + P'y' + P''y'' + \dots}{R} \qquad (6)$$
$$Z = \frac{Pz + P'z' + P''z'' + \dots}{R} \qquad (7)$$

Il est évident que dans ces équations les valeurs et les signes des premiers membres dépendent des valeurs et des signes des différentes quantités qui entrent dans les seconds membres.

Ainsi l'équation (1) donne la valeur et le sens de la résultante, et les trois dernières déterminent son point d'application.

2° Si tous les points d'application des forces sont situés dans un même plan, en prenant ce plan pour l'un des plans coordonnés, celui xy par exemple, on a encore

$$R = P + P' + P'' + \dots;$$

mais comme $z = 0,\ z' = 0,\ z'' = 0 \dots,$

les équations (4) et (7) donnent $RZ = 0$ et $Z = 0$, ce qui signifie que le centre des forces parallèles est aussi dans le même plan xy.

Les équations (5) et (6) restent les mêmes, et elles donnent les valeurs de X et Y, qui servent à fixer la position du centre des forces parallèles dans le plan xy.

Les coordonnées X et Y, x et y, x' et y'... étant, dans ce cas, des coordonnées prises par rapport aux axes des x et des y, on voit qu'il est inutile d'avoir recours à trois plans rectangulaires; deux axes rectangulaires, tracés dans le plan des points d'application des forces, suffisent pour fixer la position du centre des forces parallèles.

Les équations (2) et (3) font voir que les points d'application étant dans un même plan avec une droite, le moment de position de la résultante par rapport à cette droite est égal à la somme des moments de position des composantes.

3° Tous les points d'application des forces étant situés sur une même droite, en prenant cette droite pour axe des x, on a encore

$$R = P + P' + P'' + \ldots$$

et comme $z = 0,\ z' = 0 \ldots;\ y = 0,\ y' = 0 \ldots,$

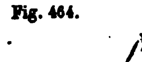
il s'ensuit que les équations (3), (4), (6) et (7) donnent respectivement

$$RY = 0, \quad RZ = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

L'équation (5) reste la même, et elle donne la valeur de X pour fixer sur l'axe des x la position du centre des forces parallèles. On voit que dans ce cas, pour déterminer ce centre, on n'a besoin d'avoir recours qu'à une droite joignant tous les points d'application des forces.

L'équation (2) fait voir que le moment de position de la résultante est dans ce cas égal à la somme des moments de position de toutes les forces par rapport à un point quelconque de la droite qui joint les points d'application.

Fig. 464.



Pour le cas d'un couple, on a

$$R = P - Q = 0,$$

et en prenant les moments de position par rapport à un point quelconque O de sa direction ab, on a

$$RX = P \times Oa - Q \times Ob = P \times ab.$$

Ce qui fait voir que *le moment de position d'un couple est constant, et égal au produit de l'une des forces par la distance des points d'application des forces.*

ÉQUILIBRE DE QUELQUES SYSTÈMES ASSUJETTIS A SE MOUVOIR DANS DES CONDITIONS DONNÉES.

1535. La perpendiculaire abaissée d'un point sur la direction d'une force est le *bras de levier d'action* ou simplement le *bras de levier* de cette force par rapport à ce point.

Ce point est le *centre des moments d'action*. Le *moment d'action*, ou simplement le *moment* de la force par rapport à ce centre, est le produit de cette force par son bras de levier (1532).

1536. Le *bras de levier* d'une force par rapport à une droite est la perpendiculaire commune à la droite et à la direction de la force.

Cette droite prend le nom d'*axe des moments d'action*.

Le *moment d'action*, ou simplement le *moment* de la force par rapport à cet axe, est le produit de cette force par son bras de levier. Cette définition suppose la force située dans un plan normal à l'axe; s'il n'en était pas ainsi, son moment serait le produit de son bras de levier par

la projection de la force sur un plan perpendiculaire à l'axe. Cette projection est la composante qu'on obtient en décomposant la force en deux autres, dirigées l'une parallèlement à l'axe et l'autre dans le plan normal à l'axe (1546). Cette composante a le même moment que la force, et en général que toutes les forces, lesquelles, décomposées comme il vient d'être indiqué, donnent la même composante normale.

1537. *Équilibre d'un corps solide assujetti à se mouvoir autour d'un point fixe.*

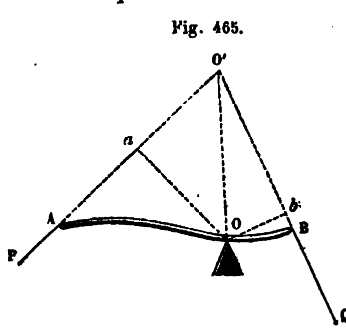
Quel que soit le nombre des forces qui sollicitent le corps, on peut les remplacer par deux autres, dont l'une passe par le point fixe (1527), et qui est détruite par la fixité de ce point, et en une autre, qui fera nécessairement osciller le corps si elle n'est pas nulle, ou si elle ne passe pas elle-même par le point fixe, cas où elle se combine avec la première force pour n'en faire qu'une qui est la résultante de toutes les forces données. Ainsi, pour qu'il y ait équilibre, la résultante de toutes les forces qui sollicitent le corps doit être nulle, ou passer par le point fixe.

1538. Lorsque toutes les forces qui sollicitent le corps sont situées dans un même plan qui contient le point fixe, il ne peut y avoir mouvement autour du point fixe que dans ce plan. Un tel système constitue un levier, qui n'est ordinairement, dans la pratique, qu'une tige rigide mobile autour d'un petit axe, qui lui est perpendiculaire et qu'on suppose réduit au point unique où il rencontre le plan du mouvement.

Un levier est sollicité par des forces qui tendent, les unes à produire l'oscillation, et les autres à s'y opposer en agissant en sens contraire. Les premières de ces forces sont les *puissances*, et les secondes les *résistances*.

1539. *Équilibre du levier*. Les deux forces P, Q et le point O sont dans un même plan, et la résultante doit passer par le point O (1514). Cette résultante passant aussi par le point de concours O′, la droite O′O est sa direction, et abaissant du point O les perpendiculaires Oa, Ob sur les directions des forces, on a (1501)

Fig. 465.



$$\frac{P}{Q}=\frac{Ob}{Oa},\text{ d'où } P\times Oa=Q\times Ob. \quad (1)$$

Ainsi le levier étant en équilibre sous l'action de deux forces : 1° *ces forces sont dans un même plan avec le point d'appui;* 2° *les deux forces tendent à faire tourner le levier en sens contraires;* 3° *les forces sont en raison inverse de leurs bras de levier.*

P étant la puissance et Q la résistance, l'équation (1) montre que quand il y a équilibre, *le moment de la puissance est égal à celui de la résistance.*

La réciproque est vraie; car la résultante étant le lieu géométrique des points pour lesquels la proportion précédente existe, elle passera par le point O, et elle sera détruite par la fixité de ce point.

L'équation (1) permet de calculer une des quatre quantités P, Q, O*a* et O*b*, les trois autres étant données. Pour $P=65^k$, $Oa=2^m$ et $Ob=1^m,10$; on a

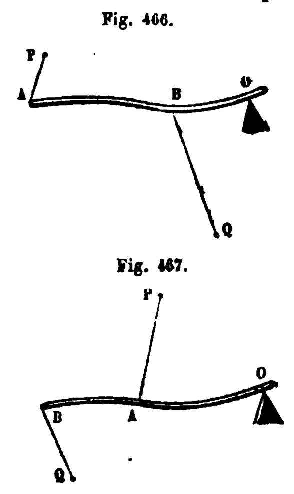
$$Q=P\times\frac{Oa}{Ob}=65\times\frac{2}{1,1}=118^k,18.$$

La pression sur le point O est évidemment, abstraction faite du poids du levier, égale à la résultante des deux forces P et Q.

1540. Les conditions précédentes d'équilibre ne changent pas, soit qu'on applique chacune des forces P et Q en un point quelconque de sa direction, soit qu'on lui donne une position quelconque autour du point O, mais de manière qu'elle tende toujours à produire l'oscillation dans le même sens et que son bras de levier conserve la même valeur.

C'est ce qui fait que pour comparer les intensités qu'ont des forces à faire osciller un solide autour d'un point fixe, il faut toujours supposer ces forces appliquées aux extrémités de leurs bras de levier perpendiculaires, et alors l'intensité d'action d'une force est directement proportionnelle à la grandeur de la force et à celle de son bras de levier, c'est-à-dire au produit de ces grandeurs, produit que, pour cette raison, nous avons appelé *moment d'action* (1535).

1541. Un *levier* est dit du *premier genre* quand le point d'appui est situé entre les points d'application de la puissance et de la résistance (*fig.* 465). La *balance*, les *balanciers ordinaires de machines à vapeur*, la *pince-coudée* dont on se sert pour soulever par côté les lourds fardeaux en sont des exemples.



Lorsque le point d'application de la résistance est entre celui de la puissance et le point d'appui (*fig.* 466), le levier est du *deuxième genre*. La *pince droite*, la *brouette*, etc. en sont des exemples.

Enfin, quand le point d'application de la puissance est entre celui de la résistance et le point d'appui (*fig.* 467), comme, par exemple, dans la *pédale*, organe de quelques machines qu'on fait mouvoir avec le pied, le levier est du *troisième genre*.

Remarque. Comme pour le levier du premier genre (1539), dans ceux du deuxième et du troisième genre, abstraction faite du poids du levier, la charge du point d'appui est égale à la résultante de la puissance et de la résistance.

1542. Dans le cas particulier où les forces P et Q sont parallèles entre elles, et que de plus elles agissent sur une même droite ab qui leur est perpendiculaire, les bras de levier Oa et Ob de la figure 465 deviennent les portions du levier droit ab, et les conditions d'équilibre du n° 1539 ne changent pas. On peut du reste arriver à ces conditions en remarquant que le moment de position de la résultante par rapport au point O est nul, et qu'on a (1534).

Fig. 468.

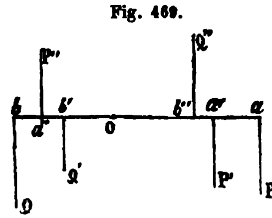
$$R \times 0 \quad \text{ou} \quad 0 = P \times Oa - Q \times Ob,$$

c'est-à-dire

$$P \times Oa = Q \times Ob \quad \text{ou} \quad \frac{P}{Q} = \frac{Ob}{Oa}.$$

Dans ce cas, la charge du point d'appui est $R = P + Q$, $R = Q - P$, $R = P - Q$, selon que le levier est du premier, du deuxième ou du troisième genre, et il est à remarquer que les moments de position ne sont autre chose que les moments d'action.

1543. *Pour le cas où l'on a un nombre quelconque de forces parallèles agissant dans des sens quelconques sur une même droite perpendiculaire à leur direction*, par la même raison que dans le cas précédent, pour qu'il y ait équilibre, le point d'appui O doit encore se trouver dans le plan des forces, la résultante doit passer par ce point, et l'on a également, en prenant les moments par rapport au point d'appui et en ayant égard à leurs signes,


Fig. 469.

$$R \times 0 \quad \text{ou} \quad 0 = P \times Oa + P' \times Oa' + P'' \times Oa'' - Q \times Ob - Q' \times Ob' - Q'' \times Ob'',$$

d'où $$P \times Oa + P' \times Oa' + P'' \times Oa'' = Q \times Ob + Q' \times Ob' + Q'' \times Ob''.$$

Ce qui fait voir que la somme des moments des puissances est encore égale à la somme des moments des résistances.

La réciproque est vraie. En effet, la somme des moments des puissances étant égale à celle des moments des résistances, la somme algébrique de tous ces moments est égale à 0. Le moment de la résultante est donc aussi égal à 0, ce qui ne peut être qu'autant que cette résultante est nulle, ou que son bras de levier est nul, et, dans l'un et l'autre cas, il y a équilibre.

Toutes les puissances P, P′, P″ ont pour résultante une force $r = P + P' - P''$ (1524) appliquée en un point A dont la position est donnée par l'équation (1534)

$$r \times OA = P \times Oa + P' \times Oa' + P'' \times Oa''.$$

Équation qui permet de remplacer un nombre quelconque de forces pa-

rallèles par leur résultante, ou encore par une force quelconque r_1 *agissant à l'extrémité d'un bras de levier*

$$OA' = \frac{P \times Oa + P' \times Oa' + P'' \times Oa''}{r_1}.$$

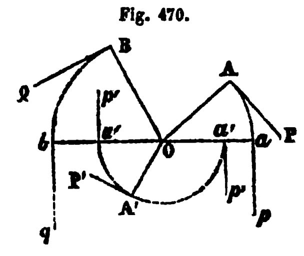
Si le bras de levier OA′ avait été donné, on aurait trouvé la valeur de la force r_1, capable de remplacer toutes les forces, par l'équation

$$r_1 = \frac{P \times Oa + P' \times Oa' + P'' \times Oa''}{OA'}.$$

Les forces Q, Q′, Q″ ont de même une résultante $r' = Q + Q' - Q''$, appliquée en un point B, dont la position est donnée par l'équation

$$OB = \frac{Q \times Ob + Q' \times Ob' + Q'' \times Ob''}{r'}.$$

Fig. 470.



1544. Enfin si les forces P, P′, Q occupent des positions quelconques autour du point fixe O, on peut appliquer chaque force, sans changer son signe, tangentiellement en un point quelconque de la circonférence qui a pour rayon son bras de levier (1540); par conséquent si les forces P, P′, Q appliquées en A, A′, B se font équilibre autour du point O, les forces respectivement égales p, p', q, appliquées en a, a', b de la même droite ab perpendiculaire à leur direction, se feront aussi équilibre. Ces dernières forces donnant (1543)

$$p \times Oa + p' \times Oa' = q \times Ob. \qquad (1)$$

Remplaçant chaque quantité par son égale, on a aussi

$$P \times OA + P' \times OA' = Q \times OB. \qquad (2)$$

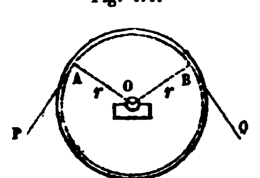
Ce qui montre que dans ce cas général, lorsqu'il y a équilibre, la somme des moments des puissances est encore égale à la somme des moments des résistances.

La réciproque est vraie; car si l'équation (2) est satisfaite, celle (1) l'est aussi; il y a alors équilibre entre les forces p, p', q (1543), et par suite aussi entre celles P, P′, Q (1540).

Remarque. Quoique dans ces transports de forces l'équilibre ne soit pas troublé, il est évident que la résultante change de grandeur et de direction, mais que cette direction passe toujours par le point fixe.

1545. *Équilibre de la poulie.* On peut considérer cette machine comme étant un levier sollicité par deux forces P et Q situées dans un même plan. Pour l'équilibre, on aura alors (1539)

Fig. 471.



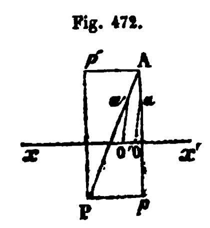
$$P \times r = Q \times r, \quad \text{d'où} \quad P = Q.$$

Ainsi la puissance est égale à la résistance.

Dans la pratique, la puissance étant obligée de vaincre les diverses résistances passives qui s'opposent au mouvement, il peut y avoir équilibre sans qu'on ait $P = Q$. Nous reviendrons sur cette circonstance.

1546. *Équilibre d'un système qui peut tourner autour d'une droite fixe. Un tel système constitue un treuil.*

Fig. 472.



Considérant une force quelconque P d'un tel système, faisons passer par sa direction AP un plan parallèle à l'axe xx'; décomposons, dans ce plan, la force P en deux autres, l'une p' parallèle à l'axe, et l'autre p perpendiculaire à Ap', et qui sera située dans un plan perpendiculaire à xx'. Appelant α l'angle PAp', qui est l'angle que fait AP avec xx' (569), on a (1499)

$$p' = P \cos \alpha \quad \text{et} \quad p = P \sin \alpha.$$

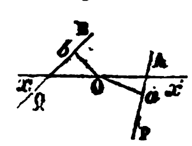
La force p' étant parallèle à xx', elle ne tend qu'à faire glisser le système le long de cet axe, et elle est détruite par la seule fixité de cet axe. Il ne reste que la force p, qu'on peut appliquer au point a, qui tend à produire le mouvement et qu'on peut substituer à la force P.

Remarquons en passant que la perpendiculaire $O'a'$ commune aux deux droites xx' et AP est égale à la perpendiculaire Oa commune aux directions xx' et Ap; ces perpendiculaires sont en effet chacune la distance de xx' au plan parallèle PAp. La perpendiculaire Oa est le levier d'action de la force p, et le produit $P \sin \alpha \times Oa = p \times Oa$ est le moment d'action de la force p et aussi de P (1536).

Quel que soit le nombre des forces d'un tel système, chacune d'elles peut être remplacée par sa composante analogue à $P \sin \alpha$. Il suffit donc de déterminer les conditions d'équilibre d'un système quelconque de forces agissant dans des plans perpendiculaires à l'axe.

1547. *Considérons d'abord le cas où les forces sont situées dans le même plan.*

Fig. 473.



Alors les conditions d'équilibre sont les mêmes que si le système était mobile autour du point O; on le démontrerait par la marche suivie au n° 1539. Ainsi l'on a, pour le cas d'équilibre,

$$P \times Oa = Q \times Ob,$$

c'est-à-dire que *le moment de la puissance est égal au moment de la résistance.*



Cette relation permet de déterminer l'une des forces ou l'un des bras de levier, lorsque les trois autres quantités sont connues.

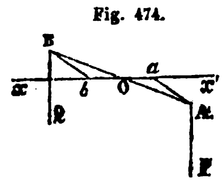
L'équation précédente fait voir aussi que, quelle que soit la position des forces autour du point O, l'équilibre n'est pas troublé tant que le bras de levier de chaque force reste constant: ainsi une force quelconque P agissant au point A peut être appliquée au point a, ou tangentiellement en un point quelconque de la circonférence de rayon Oa (1540).

Comme au nº 1544, on démontrerait que, quel que soit le nombre des forces, quand il y a équilibre, *la somme des moments des puissances est égale à la somme des moments des résistances;* et réciproquement.

La charge de l'axe est encore égale à la résultante des forces du système, puisqu'il est rencontré normalement par cette résultante; et l'axe reposant par deux points de sa longueur, pour avoir la charge de chaque appui, on décompose la résultante en deux composantes appliquées sur ces appuis (1518), et chacune de ces composantes est la charge de l'appui auquel elle est appliquée.

1548. *Supposons maintenant que les deux forces* P *et* Q *ne soient pas dans le même plan perpendiculaire à l'axe, mais que leurs directions soient parallèles.*

Fig. 474.



Menant par xx' un plan perpendiculaire à P et Q, et dans ce plan les bras de levier aA et bB de ces deux forces, on pourra toujours supposer que ces forces sont appliquées en A et B. Cela établi, puisque pour qu'il y ait équilibre la résultante doit rencontrer l'axe xx', et que de plus elle rencontre AB (1516), le point O commun à ces droites est son point d'application. On a alors (1516)

$$P : Q = OB : OA.$$

Les deux triangles rectangles semblables OAa et OBb donnant

$$OB : OA = Bb : Aa,$$

on a donc (303)

$$P : Q = Bb : Aa, \quad \text{d'où} \quad P \times Aa = Q \times Bb.$$

Ainsi le moment de la puissance est encore égal au moment de la résistance (1547).

On prouverait la réciproque, c'est-à-dire que quand cette équation a lieu il y a équilibre, en repassant par les mêmes calculs, mais en suivant un ordre inverse.

1549. *Pour un nombre quelconque de forces parallèles*, en faisant passer par l'axe un plan parallèle à la direction des forces, le moment de la résultante des puissances par rapport à ce plan est égal à la somme des moments des puissances (1533). De même, le moment de la résultante des résistances est égal à la somme des moments de toutes les résistances. Puisqu'il y a équilibre entre les puissances et les résistances, il doit y avoir encore équilibre entre la résultante des puissances et la

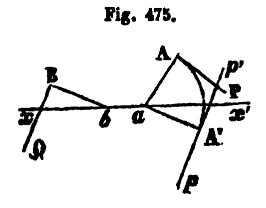


résultante des résistances, et il résulte (1548) que les moments d'action de ces résultantes sont égaux. Remplaçant ces moments par les sommes de moments qui leur sont respectivement égales, on voit que quand il y a équilibre la somme des moments des puissances est égale à la somme des moments des résistances.

La réciproque est encore vraie.

1550. *Supposons maintenant les deux forces* P *et* Q *non parallèles.*

Fig. 475.



Du point a comme centre, avec le bras de levier d'action Aa pour rayon, décrivons dans le plan aAP perpendiculaire à l'axe un arc de cercle; menons aA' parallèle à Bb. S'il y a équilibre entre les forces P et Q, on ne le troublera pas en appliquant au point A', tangentiellement à l'arc AA', les deux forces égales et contraires p et p', égales chacune à P. Les deux forces P et p' se font équilibre (1547); il y a donc équilibre entre p et Q, et comme ces deux forces sont parallèles, on a

$$p \times A'a = Q \times Bb \quad \text{ou} \quad P \times Aa = Q \times Bb.$$

Ainsi le moment de la puissance est encore égal au moment de la résistance.

La réciproque est encore vraie.

Remarque. Ce qui vient d'être dit fait voir que l'on peut transporter une force quelconque tangentiellement en un point quelconque de la circonférence dont le rayon est son bras de levier d'action.

1551. Pour un nombre quelconque de forces, s'il y a équilibre, on ne le troublera pas en transportant toutes ces forces comme l'indique la remarque précédente, de manière à les rendre toutes parallèles entre elles. Dans cette position, puisqu'il y a équilibre, la somme des moments des puissances est égale à la somme des moments des résistances. Or, comme les forces et les bras de levier n'ont pas changé de valeur, il en résulte que l'égalité des moments existe bien pour des forces quelconques en équilibre agissant dans des plans perpendiculaires à l'axe.

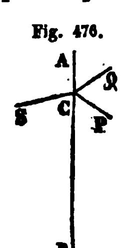
1552. La charge de l'axe est égale à la résultante de toutes les forces; et cet axe reposant sur deux appuis, en décomposant cette résulante en deux forces appliquées sur ces appuis (1518), chacune de ces composantes est la charge de l'appui correspondant.

On arriverait au même résultat en décomposant chacune des forces en deux autres parallèles, ayant même bras de levier et agissant dans les plans menés aux points d'appui perpendiculairement à l'axe. La résultante de toutes les composantes agissant dans chacun de ces plans serait la charge de l'appui correspondant.

1553. Le *treuil* et le *cabestan* sont deux machines qui rentrent dans les systèmes mobiles autour d'un axe; leur *condition d'équilibre est donc que le moment de la puissance ou la somme des moments des puissances*

soit égal au moment de la résistance ou à la somme des moments des résistances. Dans la pratique, il faut considérer dans cet équilibre les frottements comme des résistances; nous reviendrons sur cette circonstance.

1554. *Équilibre d'une droite* AB *pouvant se mouvoir d'une manière quelconque autour de son extrémité* B.



Supposons d'abord toutes les forces appliquées en un même point C de la droite, et situées dans un même plan ne comprenant pas AB. Il est évident que dans ce cas il n'y aura équilibre qu'autant que la résultante de toutes les forces sera nulle (1537).

Et en menant par le point C, dans le plan des forces, deux axes rectangulaires, on aura pour l'équilibre (1504)

$$P\cos a+Q\cos b+\ldots=0,\quad \text{et}\quad P\sin a+Q\sin b+\ldots=0.$$

Si les forces, appliquées au même point, ne sont pas situées dans un même plan, pour qu'il y ait équilibre il faut que leur résultante soit dirigée suivant AB. Ainsi, pour deux forces, AB sera la direction de la diagonale du parallélogramme construit sur les deux forces (1488); ce qui exige que les deux forces soient dans un même plan avec AB. Les relations des forces sont alors celles du n° 1499; de plus on a $R=P\cos a+Q\cos b$, et $P\sin a=Q\sin b$, a et b étant les angles que les forces font avec AB.

Pour trois forces, la diagonale du parallélipipède ayant pour côtés les intensités de ces forces, c'est-à-dire la résultante de ces forces, devra encore être dirigée suivant AB.

Quel que soit le nombre des forces, la résultante devra toujours être dirigée suivant AB.

Cela établi, menons par le point de rencontre des forces trois axes rectangulaires, en prenant AB pour un de ces axes. Les composantes de la résultante suivant ces axes sont respectivement égales aux sommes des composantes de toutes les forces suivant ces axes (1503). Or la composante de la résultante suivant AB est égale à cette résultante; donc, appelant a, b, c... les angles que font les diverses forces P, Q, S... avec AB, on a

$$R=P\cos a+Q\cos b+S\cos c+\ldots,$$

équation qui donne R, quel que soit le nombre des forces.

Les projections de la résultante sur les deux autres axes sont nulles; donc les sommes des projections des forces sur ces mêmes axes sont aussi nulles, et en appelant a', b', c'... et a'', b'', c''... les angles que font les forces avec les deux axes perpendiculaires à AB, on a

$$P\cos a'+Q\cos b'+S\cos c'+\ldots=0$$

et

$$P\cos a''+Q\cos b''+S\cos c''+\ldots=0,$$

formules qui expriment les relations existant entre les forces.



Ces formules peuvent être remplacées par d'autres plus commodes dans la pratique. Les angles a', b', c'... et a'', b'', c''... ne se déterminent pas facilement. On ramène ce cas à celui où toutes les forces seraient situées dans un plan perpendiculaire à AB. Chacune des forces P, Q, S... peut se décomposer en deux autres dirigées, l'une suivant AB et l'autre dans le plan perpendiculaire à AB. Toutes les composantes dirigées suivant AB sont détruites par la fixité du point B. Toutes celles situées dans le plan perpendiculaire à AB doivent avoir une résultante nulle pour qu'il y ait équilibre; ces dernières composantes étant P sin a, Q sin b, S sin c..., prenant dans le plan de ces composantes deux axes rectangulaires, on doit donc avoir (1504)

$$P \sin a \cos \alpha + Q \sin b \cos \beta + S \sin c \cos \gamma + \ldots = 0$$

et

$$P \sin a \cos \alpha' + Q \sin b \cos \beta' + S \sin c \cos \gamma' + \ldots = 0.$$

Les angles α, β, γ... sont les angles que font les forces P sin a, Q sin b... avec l'un des axes, et α', β', γ'... ceux que font ces mêmes forces avec l'autre axe. Il est à remarquer que ces angles sont faciles à déterminer dans la pratique, car ils ne sont autre chose que les angles formés par chacun des axes avec les divers plans passant par AB et chacune des forces.

1555. *Si toutes les forces ne sont pas appliquées au même point de la droite* AB, on les y ramène en décomposant chacune des forces non appliquées au point considéré C, par exemple Q, en deux forces parallèles appliquées l'une au point fixe B et qui est détruite, et l'autre au point C (1518). Alors il y a équilibre dès qu'il existe entre toutes les forces appliquées et transportées au point C les relations du numéro précédent.

Fig. 477.

1556. *S'il y a des forces parallèles à* AB, telles que S (*fig.* 477), on remarque que la force S peut être appliquée en E' (1540). Mais s'il y a équilibre dans le système des forces P, Q, S', on ne le trouble pas en remplaçant la force S', qui a pour bras de levier BE', par la force S'', appliquée en C perpendiculairement à BC, tendant à faire osciller AB dans le même sens que S' ou S, et dont la valeur est telle que l'on a

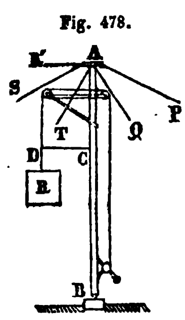
$$\frac{S''}{S'} = \frac{BE'}{BC} \quad \text{ou} \quad \frac{S''}{S} = \frac{FE}{BC}, \quad \text{d'où} \quad S'' = \frac{S \times FE}{BC}.$$

Toutes les forces agissant comme S se transportent de la même manière, et l'on retombe dans le cas du numéro précédent.

1557. Le cas du n° 1556 se réalise dans les grues fréquemment employées, il y a quelques années, pour élever les pierres dans les bâtiments en construction.



Fig. 478.



Le grand arbre AB tourne sur un pivot B, et il est maintenu dans une position verticale par des cordes fixées au point A et à des objets fixes du sol ou des bâtiments voisins.

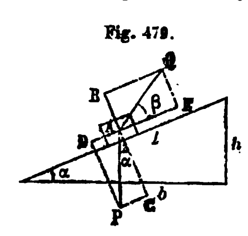
Pour établir convenablement cette machine, on remplace le poids R par une force horizontale R' appliquée en A (1556); on prend les composantes horizontales des tensions P, Q, S, T que peuvent supporter en toute sécurité les cordes qui fixent AB, et la force R', dans toutes les positions qu'elle peut prendre autour de A, quand on fait tourner la grue, doit être moindre que la résultante de celles des composantes $P \sin a$, $Q \sin b$... qui s'opposent à son action (ces composantes agissant tout autour du point A, il n'y en a qu'un certain nombre d'entre elles qui s'opposent à la force R'). S'il y a trois ou quatre cordes, ce qui arrive ordinairement, il y a des positions où la composante d'une seule corde s'oppose à R'; pour une telle position, on a, en considérant la corde de tension P,

$$P \sin a = R';$$

d'où l'on conclut $P = \frac{R'}{\sin a}$, valeur qui ne doit pas dépasser la tension que la corde peut supporter en toute sécurité. Cela suppose nulles les tensions des cordes quand la pierre n'est pas suspendue à la grue.

1558. *Système de forces appliquées en un point assujetti à se mouvoir sur un plan.* On décompose chacune des forces du système en deux, l'une normale au plan et l'autre située dans le plan. Les composantes normales sont détruites par le plan, et pour qu'il y ait équilibre il suffit que toutes les composantes situées dans le plan du mouvement se fassent équilibre. Les conditions sont alors ramenées à celles d'un système de forces situées dans un même plan (1504).

Fig. 479.



1559. *Système de forces appliquées en un point assujetti à se mouvoir sur une droite.* Supposons un plan incliné et un corps A reposant sur ce plan; il est évident que le corps n'étant sollicité par aucune force autre que son poids P (1442), il glissera en suivant la ligne de plus grande pente du plan (744). Décomposant la force P en deux autres, l'une $p' = AC = P \cos \alpha$, perpendiculaire à la ligne de plus grande pente, et qui sera détruite par la fixité de cette ligne; l'autre $p = AD = P \sin \alpha$, qui sera parallèle à la ligne suivie par le corps, et qui ne sera détruite qu'en appliquant au point A une force égale et contraire à p. Il reste donc à déterminer le rapport de P à p.

Le triangle APD étant semblable à celui formé par le plan incliné, on a

$$\frac{P}{p} = \frac{l}{h}, \quad \text{d'où} \quad p = P\frac{h}{l}.$$

Ainsi *la puissance* P *est à la résistance* p *comme la longueur* l *du plan incliné est à sa hauteur* h.

Les mêmes triangles semblables donnent encore, *b* étant la base du plan,

$$\frac{P}{p'} = \frac{l}{b} \quad \text{et} \quad \frac{p}{p'} = \frac{h}{b}.$$

Il est à remarquer que l'angle PAC est égal à l'angle α que fait le plan incliné avec l'horizon.

CENTRES DE GRAVITÉ.

1860. *Le centre de gravité d'un corps ou d'un système de corps* est le centre des forces parallèles dues à l'action de la pesanteur sur les molécules du corps ou du système de corps, c'est-à-dire le point par lequel passent toutes les directions du poids de ce corps ou de ce système (1441, 1442, 1530).

1861. Comme on peut remplacer les actions de la pesanteur sur les diverses molécules d'un corps solide par leur résultante, qui produit absolument le même effet, on peut considérer le centre de gravité du corps comme un point auquel est appliquée une force égale et parallèle au poids; d'où il résulte que si, dans les cas d'équilibre des forces que nous avons examinés, ou dans tout autre problème de mécanique, on veut tenir compte de la pesanteur, il suffit de considérer chaque corps comme étant sollicité par une force égale et parallèle à son poids et appliquée à son centre de gravité, et de combiner ces forces avec les autres qui sollicitent le système.

1862. Les actions de la pesanteur sur les molécules d'un corps solide pouvant être remplacées par le poids du corps appliqué à son centre de gravité, on en tire différentes conséquences :

1° Un corps solide est en équilibre dans toutes les positions qu'on lui donne autour de son centre de gravité, quand on rend ce centre fixe.

2° En suspendant un corps solide par un fil, quand il y a équilibre, la direction du fil passe par le centre de gravité; car la tension du fil, qui agit évidemment dans la direction de celui-ci, ne peut détruire le poids du corps qu'autant qu'elle lui est égale et directement opposée, et que par conséquent elle passe par le centre de gravité.

Suspendant successivement un corps solide par deux de ses points, la rencontre des deux directions du fil à travers le corps donne le centre de gravité; *d'où il résulte un moyen mécanique pour déterminer le centre de gravité d'un corps.*

3° *Connaissant les centres de gravité de plusieurs corps, pour déterminer le centre de gravité de leur ensemble*, on pourra employer le mode suivi pour la composition des forces parallèles (1524), en prenant ici pour forces les poids des divers corps, ou bien les masses, qui sont proportionnelles au poids (1460). Ainsi le centre de gravité de deux corps

dont les poids sont P et p et les masses $\frac{P}{g} = M$ et $\frac{p}{g} = m$, se trouve sur la droite qui joint les centres de gravité des deux corps, à des distances de chacun d'eux qui sont réciproquement proportionnelles aux poids ou aux masses (1516).

On peut aussi fixer la position du centre de gravité d'un système de corps en faisant usage des moments de position (1534), comme on a fixé le centre des forces parallèles par rapport à 3 plans, à 2 axes ou à 1 point, selon que les centres de gravité partiels ne sont pas dans un même plan, ou sont dans un même plan ou sur une droite. Les équations qu'on obtient dans ces divers cas sont identiques à celles du n° 1534; seulement les forces sont remplacées par les poids ou par les masses des corps.

1563. D'après ce qui précède, on voit que la position du centre de gravité d'un corps, par rapport à la surface de ce corps, dépend de la manière dont toutes les molécules sont disposées les unes à l'égard des autres dans toute l'étendue du corps. Elle dépend donc : 1° de la forme du corps; 2° de la répartition des molécules dans toutes ses parties, c'est-à-dire de la densité relative de ces diverses parties.

Dans la détermination du centre de gravité, il faut avoir égard à ces deux considérations; mais si le corps est homogène, c'est-à-dire également dense dans toutes ses parties, on n'a plus à avoir égard qu'à la première, et alors la détermination du centre de gravité revient à la résolution d'un simple problème de géométrie.

1564. Dans la pratique, les corps dont on a à déterminer le centre de gravité ont ordinairement des formes bien définies et étudiées en géométrie; de plus ces corps sont homogènes, ou du moins on peut les supposer tels (aucun corps de la nature n'est parfaitement homogène). Nous nous occuperons d'abord des corps de formes géométriques, et observons que les corps étant homogènes, on peut, dans la détermination des centres de gravité, remplacer les poids ou les masses par les volumes, qui leur sont proportionnels; *ce qui ramène le problème à trouver le centre de gravité des volumes*. Si les corps n'ont que l'épaisseur d'une molécule, les poids, les masses et les volumes sont proportionnels aux *surfaces matérielles* formées par les corps, *et le problème est ramené à trouver le centre de gravité des surfaces. On est de même amené à trouver le centre de gravité des lignes*, quand la largeur et l'épaisseur des corps sont partout celles d'une molécule. (Voir 8e partie.)

CENTRES DE GRAVITÉ DES FIGURES.

1565. On nomme *centre de figure*, tout point qui est tel qu'un plan quelconque qui le contient coupe la figure en deux parties égales. Ce point est le centre de gravité de la figure; car, considérant l'un quelconque des plans sécants, les moments des deux parties du corps par rapport à ce plan sont égaux comme composés des mêmes moments élémentaires, et comme ces deux moments sont de signes contraires,

leur somme, c'est-à-dire le moment total de la figure, est égal à zéro, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que le centre de gravité est sur le plan (1534); comme il doit de même se trouver sur tout autre plan sécant, il est l'intersection de tous ces plans, c'est-à-dire le centre de figure.

Il en résulte que le centre de gravité :

1° D'une ligne droite est le milieu de cette droite;

2° Du périmètre ou de la surface d'un parallélogramme est le point d'intersection des deux diagonales (624);

3° Du périmètre ou de la surface d'un polygone régulier est son centre (714);

4° De la circonférence ou du cercle est le centre;

5° De l'ellipse ou de sa surface est son centre (1183, 1184);

6° De deux arcs d'hyperbole symétriques par rapport au centre de l'hyperbole est ce centre (1219);

7° Des arêtes, ou de la surface, ou du volume d'un parallélipipède est le point de rencontre des diagonales (810);

8° De la surface ou du volume d'un polyèdre régulier est le centre (916);

9° De la surface ou du volume de la sphère est le centre;

10° De la surface latérale, ou de la surface totale, ou du volume d'un cylindre droit à base circulaire (834), est le milieu de l'axe du cylindre;

11° De la surface ou du volume de l'ellipsoïde de révolution est le centre (1208).

1566. *Trouver le centre de gravité de deux droites.* On joint les centres de gravité, c'est-à-dire les milieux, des deux droites; puis on divise la droite qui en résulte en parties réciproquement proportionnelles aux poids des droites ou à leurs longueurs. Cela revient à trouver le centre de gravité de l'ensemble de deux corps dont les poids sont proportionnels aux longueurs des deux droites, et dont les centres de gravité sont ceux des droites (1562).

Pour trois ou pour un nombre quelconque de droites, ou pour le contour d'un polygone, on détermine de même le centre de gravité, en considérant chaque droite ou côté comme étant un poids proportionnel à sa longueur et appliqué en son milieu, et en opérant comme pour la composition des forces parallèles (1524).

Pour déterminer le centre de gravité de plusieurs surfaces on opérerait absolument de la même manière, seulement les poids qu'on supposerait appliqués aux centres de gravité des surfaces seraient proportionnels à ces surfaces.

Pour plusieurs volumes, on prend pour poids ces volumes ou des quantités qui leur soient proportionnelles, et l'on opère encore comme pour la composition des forces parallèles.

Dans ces divers cas, on peut aussi déterminer la position du centre de gravité de l'ensemble des figures à l'aide des moments de chaque ligne, ou de chaque surface, ou de chaque volume (1562).

1567. *Le centre de gravité du périmètre d'un triangle* ABC *est le centre* G *du cercle inscrit au triangle* DEF *dont les sommets sont les milieux des côtés du triangle proposé.*

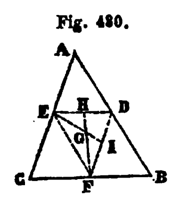


Fig. 480.

En effet, le centre de gravité de l'ensemble des côtés AB, AC est le point H, tel qu'on a (1566)

$$DH : HE = AC : AB = EC : DB.$$

Ayant $EC = DF$ et $DB = EF$, comme parallèles comprises entre parallèles, on a

$$DH : HE = DF : EF.$$

Menant FH, le centre de gravité cherché est sur cette ligne; et, dans le triangle FDE, la droite FH divisant la base DE en deux segments proportionnels aux côtés adjacents, cette droite est la bissectrice de l'angle DFE (674). Par la même raison, le centre de gravité étant sur la bissectrice EI de l'angle DEF, le point de rencontre G des deux bissectrices est le centre de gravité cherché, qui est donc bien le centre du cercle inscrit au triangle DEF (657).

1568. *Le centre de gravité d'un arc de cercle* AB *est situé sur le rayon* OC *perpendiculaire à la corde* AB, *à une distance* OG *du centre, telle qu'on a*

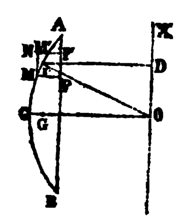


Fig. 481.

$$OG : OC = AB : \text{arc } ACB,$$

ou, en représentant OG par x, le rayon OC par r, la corde AB par c, et la longueur de l'ac ACB par a,

$$x : r = c : a, \quad \text{d'où} \quad x = r\frac{c}{a}.$$

D'abord le centre de gravité de cet arc se trouve dans le plan de cet arc, ce qui a lieu pour une courbe plane quelconque, puisque par rapport à ce plan le moment de chaque élément de la courbe est nul, et par suite aussi leur somme, c'est-à-dire le moment de la courbe totale. Le centre de gravité se trouve de plus sur OC, qui divise ACB en deux parties égales symétriques. Il suffit donc de déterminer la distance OG. Menons un axe OX perpendiculaire à OC. Le moment $a \times x$ de l'arc total par rapport à cet axe est égal à la somme des moments de tous ses éléments. Considérant l'élément MM' assez petit pour qu'on puisse le considérer comme se confondant avec sa corde, son moment est $MM' \times ID$, le point I étant le milieu de MM'; mais menant MN parallèle à OX et M'N à OC, et joignant OI, les deux triangles MM'N et ODI sont semblables comme ayant les côtés perpendiculaires (670), et ils donnent

$$MM' : MN = OI : ID,$$

d'où, en remarquant que $MN = PP'$,

$$MM' \times ID = PP' \times r.$$

Ainsi le moment de MM' est égal au rayon multiplié par la projection

de MM′ sur la corde. Tous les autres éléments ont pour moment une expression semblable, et leur ensemble, ou l'arc total, a pour moment le rayon multiplié par la somme des projections des divers éléments sur la corde, c'est-à-dire le produit du rayon par la corde; on a donc

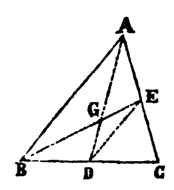
$$a \times x = c \times r;$$

d'où

$$x : r = c : a, \quad \text{et} \quad x = r\frac{c}{a}.$$

1569. *Le centre de gravité de la surface d'un triangle* ABC *se trouve sur la droite* AD *qui joint le sommet au milieu de la base, à une distance* $GD = \frac{1}{3}AD$ *de la base* ou *à une distance* $GA = \frac{2}{3}AD$ *du sommet.*

Fig. 482.



Supposons que AD soit divisé en parties infiniment petites, et que par tous les points de division on a mené des parallèles à BC; la surface du triangle sera alors divisée en une infinité de tranches, lesquelles, étant divisées chacune en deux parties égales par AD, ont toutes leur centre de gravité sur cette droite; d'où il résulte que leur ensemble, c'est-à-dire le triangle, a son centre de gravité sur AD. On prouverait de même que le centre de gravité est sur BE, qui joint le sommet B au milieu du côté opposé AC; il est par conséquent le point de rencontre G des deux droites AD, BE. La droite joignant le troisième sommet C au milieu du côté opposé AB passerait aussi par le point G (659).

Menant DE, cette droite divisant CA et CB en deux parties égales, elle est parallèle à AB, et en est la moitié; de plus, les deux triangles semblables GDE et GAB donnent (670)

$$GD : GA = DE : AB;$$

mais $DE = \frac{1}{2}AB$, donc $GD = \frac{1}{2}GA$, et, par suite,

$$GD = \frac{1}{3}AD \quad \text{et} \quad GA = \frac{2}{3}AD.$$

Remarque. Menant par le centre de gravité G une parallèle à la base BC, elle rencontrerait la hauteur du triangle au $\frac{1}{3}$ à partir de la base (663); *ainsi la distance du centre de gravité d'un triangle à la base est égale au* $\frac{1}{3}$ *de la hauteur.*

1570. *Centre de gravité d'un trapèze* ABCD. D'après les raisons déjà données pour le triangle (1569), le centre de gravité se trouve sur la droite EF qui joint les milieux des deux bases. g et g' étant les centres de gravité des deux triangles BCD, BAD, le centre de gravité de leur ensemble, c'est-à-dire du trapèze, est aussi sur gg', et il est par conséquent le point de rencontre G de EF avec gg'.

Fig. 483.

La position du centre de gravité G sur EF est aussi déterminée quand on connaît sa distance GI à la base BC; car une parallèle à BC, menée à une distance GI de cette droite, rencontre EF en G.

A l'aide du théorème des moments, nous allons déterminer la distance GI en fonction des bases et de la hauteur du trapèze. Dans la pratique, pour trouver les distances moyennes de transport des terrassements, on a souvent à déterminer GI de cette manière.

Désignons la base BC par b, celle AD par b', et la hauteur HI du trapèze et des deux triangles BCD et BAD qui le composent par h. g et g' étant les centres de gravité de ces triangles, la perpendiculaire $gi = \frac{1}{3}h$, et celle $g'i' = \frac{2}{3}h$ (1569).

Le moment du trapèze par rapport à BC est égal à la somme des moments des deux triangles; on a donc (692, 697)

$$\frac{h}{2}(b+b') \times \mathrm{GI} = \frac{h}{2} \times b \times gi + \frac{h}{2} \times b' \times g'i'.$$

$\frac{h}{2}$ se détruit, et il vient

$$(b+b') \times \mathrm{GI} = \frac{1}{3}hb + \frac{2}{3}hb' = \frac{1}{3}h(b+2b'),$$

d'où

$$\mathrm{GI} = \frac{1}{3}h\frac{b+2b'}{b+b'}.$$

En opérant par rapport à la base b', on aurait trouvé

$$\mathrm{GH} = \frac{1}{3}h\frac{b'+2b}{b+b'},$$

valeur qu'on obtient directement en retranchant de h la valeur trouvée pour GI.

Remarque. Désignant EF par l, on a

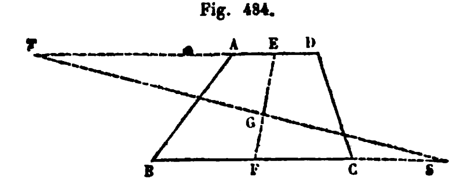
$$\mathrm{GF} : \mathrm{GI} = l : h;$$

d'où l'on tire, en remplaçant GI par sa valeur et en remarquant que h se détruit,

$$\mathrm{GF} = \frac{1}{3}l\frac{b+2b'}{b+b'}.$$

Par la même raison, on a $GE = \frac{1}{3}\, l\, \frac{b' + 2b}{b + b'}$.

Fig. 484.



Des valeurs précédentes de GF et GE on conclut, en simplifiant,

$$GF : GE = (b + 2b') : (b' + 2b)$$

ou, en divisant par 2 les termes du second rapport,

$$GF : GE = \left(\frac{b}{2} + b'\right) : \left(\frac{b'}{2} + b\right).$$

D'où l'on conclut encore un moyen géométrique très-simple pour déterminer la position du centre de gravité G sur la droite EF. On prend $AT = BC$ et $CS = AD$, et menant ST, cette droite rencontre EF au centre de gravité G. En effet, les deux triangles semblables GFS et GET donnent bien

$$GF : GE = FS : ET$$

ou

$$GF : GE = \left(\frac{b}{2} + b'\right) : \left(\frac{b'}{2} + b\right).$$

1571. *Centre de gravité d'un quadrilatère quelconque* ABCD.

Fig. 485.

Menons la diagonale BD, dont le milieu est le point E; prenons $Eg = \frac{1}{3}\, AE$ et $Eg' = \frac{1}{3}\, CE$, g et g' sont les centres de gravité des triangles ABD et BCD (1569). Le quadrilatère, qui se compose de ces deux triangles, a son centre de gravité sur la droite gg'. Pour l'obtenir, il suffit de mener AC, de prendre $AH = CF$ ou $CH = AF$, et de tracer EH; le point G, où cette dernière droite rencontre gg', est le centre de gravité cherché.

La droite gg' étant parallèle à AC (669), on a (664)

$$gG : g'G = AH : CH = GF : AF.$$

Les triangles rectangles semblables AFK et CIF donnent

$$CF : AF = CI : AK.$$

Les triangles ABD et BCD ayant même base BD, ils sont entre eux comme leurs hauteurs (693); donc

$$CI : AK = BCD : ABD.$$

Toutes ces proportions étant liées entre elles par un rapport commun, on a

$$gG : g'G = BCD : ABD.$$

Ce qui fait voir que gg' est divisé au point G en parties réciproquement proportionnelles aux triangles ABD et BCD, et que par conséquent ce point est bien le centre de gravité du quadrilatère.

1572. *Pour déterminer le centre de gravité d'un polygone quelconque*, on le décompose en quadrilatères, ou mieux en triangles, dont on détermine les centres de gravité; on cherche ensuite le centre de gravité de l'ensemble de toutes ces figures, c'est-à-dire celui du polygone proposé, d'après la règle générale pour composer des forces parallèles, ou en employant les moments (1566).

1573. *Centre de gravité d'un secteur circulaire* OAB. Considérant le secteur comme étant composé d'une infinité de triangles isocèles ayant pour sommet commun le centre O, et pour bases les différents éléments de l'arc AB, les centres de gravité de tous ces triangles seront uniformément répartis sur l'arc ab, dont le rayon $Oc = \frac{2}{3}$ OC (1569), et le centre de gravité de cet arc sera celui du secteur.

Fig. 486.

Or G étant ce centre de gravité, on a (1568)

$$OG = Oc \times \frac{\text{corde } ab}{\text{arc } acb}.$$

Comme $Oc = \frac{2}{3}$ OC, corde $ab = \frac{2}{3}$ corde AB, et arc $acb = \frac{2}{3}$ arc ACB, désignant, comme au n° 1568, corde AB par c, arc ACB par a et OC par r, il vient

$$OG = \frac{2}{3} r \frac{\frac{2}{3} c}{\frac{2}{3} a} = \frac{2}{3} r \frac{c}{a}.$$

1574. *Centre de gravité d'un segment circulaire* ABC (*fig.* 486).

Ce centre de gravité se trouve sur OC (1565). Soient S la surface du secteur OACB, T celle du triangle OAB et par suite S − T celle du segment. Soient, de plus, D, d et x les distances respectives du point O aux centres de gravité du secteur, du triangle et du segment (1569, 1573). Le moment du segment par rapport au point O est égal à la différence des moments du secteur et du triangle par rapport au même point; donc

$$(S - T)x = S \times D - T \times d, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{S \times D - T \times d}{S - T}.$$

Désignant par a la longueur de l'arc ACB, par c celle de la corde AB, par h la hauteur OD du triangle OAB, et par r le rayon OA, on a

$$D = \frac{2}{3} r \frac{c}{a}, \; d = \frac{2}{3} h, \; S = \frac{1}{2} ar, \; T = \frac{1}{2} hc, \; S - T = \frac{1}{2}(ar - hc),$$

et, par suite,

$$x = \frac{\frac{1}{2} ar \times \frac{2}{3} r \frac{c}{a} - \frac{1}{2} hc \times \frac{2}{3} h}{\frac{1}{2}(ar - hc)} = \frac{2}{3} \frac{c(r^2 - h^2)}{ar - hc},$$

où, en remarquant que $r^2 - h^2 = \frac{c^2}{4}$,

$$x = \frac{c^3}{6(ar - hc)}.$$

1875. *Le centre de gravité d'une zone sphérique comprise entre les deux plans parallèles* AB, CD *est situé sur le rayon* OF *perpendiculaire aux plans* AB, CD, *au point* G *milieu de la distance* FH *de ces plans.*

Fig. 487.

La surface d'une zone étant proportionnelle à sa hauteur (935), en considérant la zone proposée comme décomposée en zones élémentaires par des plans équidistants parallèles à AB, les centres de gravité de toutes ces zones de même surface seront répartis uniformément sur toute la longueur de FH, et le centre de gravité de leur ensemble, c'est-à-dire de la zone proposée, sera bien situé au milieu de cette droite.

La zone pourrait n'avoir qu'une base; et si la deuxième base devenait tangente à la sphère, la zone serait la surface de la sphère, dont le centre de gravité serait bien au centre (1565).

1876. *Le centre de gravité d'un prisme est au milieu de la droite qui joint le centre de gravité des deux bases* (802). En effet, décomposant le prisme en tranches infiniment minces par des plans équidistants parallèles aux bases du prisme, les centres de gravité de ces tranches égales se répartiront uniformément sur la droite qui joint les centres de gravité des deux bases du prisme, et le centre de gravité de leur ensemble, c'est-à-dire du prisme, se trouvera bien au milieu de cette droite.

Remarque 1. Le centre de gravité du prisme est le centre de gravité de la section faite à égale distance des bases par un plan parallèle à ces bases.

Remarque 2. Ce qui vient d'être dit pour le prisme est applicable à un cylindre quelconque (840, 1565).

1877. *Le centre de gravité d'une pyramide triangulaire* SABC *se trouve sur la droite* SD *qui joint le sommet* S *de la pyramide au centre de gravité* D *de la base, et au point* G, *tel que l'on a* $GD = \frac{1}{4}$ SD ou $GS = \frac{3}{4}$ SD.

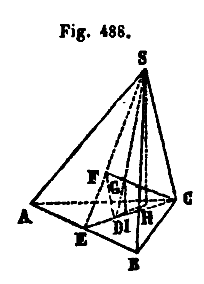


Fig. 488.

E étant le milieu de AB, en prenant $ED = \frac{1}{3} EC$, le point D est le centre de gravité de la base (1569). Menant SE et SD, si l'on coupe la pyramide par un plan quelconque parallèle à la base, le milieu de la base de la section qui en résultera se trouvera sur SE, et le centre de gravité de cette section sera sur SD. Cela établi, considérant la pyramide comme composée de tranches infiniment petites, toutes comprises entre des plans parallèles à la base ABC, chacune de ces tranches aura son centre de gravité sur SD; par suite, leur ensemble, c'est-à-dire la pyramide, aura le sien sur cette même droite.

De même, considérant le point C comme étant le sommet de la pyramide, prenant $EF = \frac{1}{3} ES$, le centre de gravité de la pyramide se trouvera sur CF; il sera donc le point de rencontre G des deux droites SD, CF.

Menant DF, cette droite divisant ES et EC en parties proportionnelles, elle est parallèle à SC, et les deux triangles semblables EDF et ECS donnent

$$ED : EC = DF : CS,$$

d'où l'on conclut, ED étant le $\frac{1}{3}$ de EC, $DF = \frac{1}{3} CS$.

Les deux autres triangles semblables GDF et GCS donnent

$$GD : GS = DF : CS;$$

d'où, DF étant le $\frac{1}{3}$ de CS, on conclut bien

$$GD = \frac{1}{3} GS, \quad \text{c'est-à-dire} \quad GD = \frac{1}{4} SD.$$

Remarque. Menant la hauteur SH de la pyramide et la perpendiculaire GI à la base, on a $GI = \frac{1}{4} SH$. *Ainsi, la distance du centre de gravité à la base est égale au quart de la hauteur de la pyramide.*

1878. Considérant une pyramide quelconque comme composée de pyramides triangulaires ayant même sommet, et pour bases les divers triangles qui composent la base de la pyramide proposée, toutes ces pyramides partielles ont leurs centres de gravité situés sur un même plan parallèle à la base, et distant de cette base d'une quantité égale au 1/4 de la hauteur de la pyramide; par conséquent leur ensemble, c'est-à-dire la pyramide proposée, a son centre de gravité situé sur le même plan; et comme, d'après des considérations analogues à celles posées pour la pyramide triangulaire, le centre de gravité se trouve aussi sur la droite qui joint le sommet au centre de gravité de la base,

on peut donc dire que *le centre de gravité d'une pyramide quelconque se trouve sur la droite qui joint le sommet au centre de gravité de la base, au quart de cette ligne à partir de la base.*

1579. Considérant un cône comme étant une pyramide dont la base est un polygone d'une infinité de côtés, ce qui vient d'être dit pour la pyramide s'applique également au cône (846).

1580. *Remarque.* Deux corps égaux, dont les centres de gravité sont les sommets A et B (*fig.* 488), ont pour centre de gravité le point E (3°, 1562); si un troisième corps, égal à chacun des premiers, a le sommet C pour centre de gravité, le centre de gravité de l'ensemble des trois corps est le point D; S étant le centre de gravité d'un quatrième corps égal, le centre de gravité de l'ensemble est le point G. D'où l'on conclut :

1° *Que deux corps égaux ont le même centre de gravité que la droite qui joint leurs centres de gravité;*

2° *Que trois corps égaux ont pour centre de gravité celui du triangle qui a pour sommets les centres de gravité des trois corps;*

3° *Que le centre de gravité de quatre corps égaux est celui de la pyramide dont les sommets sont les centres de gravité des corps.*

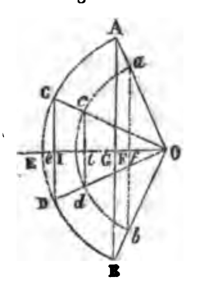
1581. *Centre de gravité d'un tronc de pyramide à bases parallèles* (911). Ce centre de gravité se trouve sur la droite qui joint les centres de gravité des deux bases du tronc, droite qui passe par le sommet commun des deux pyramides; il s'agit d'avoir sa distance x à ce sommet commun. Par rapport à ce sommet, le moment du tronc T est égal au moment de la pyramide totale P, moins celui de la pyramide retranchée p. D et d étant les distances des centres de gravité des pyramides à leur sommet commun, on a donc

$$T \times x = P \times D - p \times d, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{P \times D - p \times d}{T}.$$

Le centre de gravité d'un tronc de cône à bases parallèles se trouverait à l'aide de la même expression.

1582. *Centre de gravité d'un secteur sphérique* OABCD, *engendré par le secteur circulaire* OAC *qui fait une révolution autour du rayon extérieur* OE.


Fig. 489.



Considérant ce secteur comme composé de pyramides infiniment petites ayant pour sommet commun le centre O et pour bases les divers éléments de la zone ABCD, base du secteur, les centres de gravité de ces pyramides élémentaires seront répartis uniformément sur la zone *abcd*, dont le rayon $Oa = \frac{3}{4}$ OA (1577). Le centre de gravité cherché est donc celui de cette zone, et il est par conséquent le point G, milieu de if (1575).

Ayant $Gf = Gi$, on a $2OG = 2Of + fi = Of + Oi$, c'est-à-dire

$OG = \frac{1}{2}(Of + Oi)$, ou, en remarquant que $Of = \frac{3}{4}$ OF et $Oi = \frac{3}{4}$ OI,

$$OG = \frac{3}{8}(OF + OI).$$

Si le secteur sphérique était engendré par le secteur circulaire OAE tournant autour de OE, l'expression de OG serait encore la même, seulement OI serait remplacé par le rayon OE.

1583. *Détermination du centre de gravité d'une surface plane quelconque.*

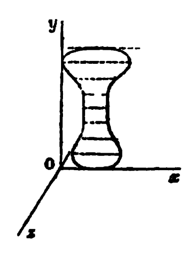


Fig. 490.

On décompose la surface en un nombre pair n de bandes, par des droites parallèles équidistantes dont les extrêmes sont tangentes à la surface. Le moment de chaque bande par rapport à la première parallèle est égal au produit de sa surface par la distance de son centre de gravité à cette parallèle. Soient a_0, a_1, $a_2 \dots a_n$, les longueurs des parallèles, et y_0, y_1, $y_2 \dots y_n$ leurs distances respectives à la première parallèle Ox; les moments des parallèles par rapport à Ox sont respectivement $a_0 \times y_0$, $a_1 \times y_1$, $a_2 \times y_2 \dots a_n \times y_n$, et si l'on considère ces moments comme étant les ordonnées Y_0, Y_1, $Y_2 \dots Y_n$ d'une courbe dont les abscisses sont les distances y_0, y_1, $y_2 \dots$ des diverses parallèles à la première Ox, l'aire de cette courbe représentera le moment de la surface donnée par rapport à Ox. Ainsi, H étant la hauteur de la surface, c'est-à-dire la distance des deux parallèles extrêmes, S la surface, et Y la distance de son centre de gravité à la première parallèle Ox, on a, en appliquant la formule de Simpson (1303),

$$S \times Y = \frac{H}{3n}[Y_0 + Y_n + 4(Y_1 + Y_3 + \dots + Y_{n-1}) + 2(Y_2 + Y_4 + \dots + Y_{n-2})].$$

Formule de laquelle on tire la valeur de Y.

Ayant $y_0 = 0$, on a aussi $a_0 \times y_0 = Y_0 = 0$.

Si la surface a un axe de symétrie perpendiculaire à Ox, le centre de gravité se trouve sur cet axe, et il est déterminé par la seule valeur de Y. Dans le cas où il n'y aurait pas d'axe de symétrie, en opérant pour un second axe Oy, comme on vient de le faire pour Ox, on déterminerait la distance X du centre de gravité de la surface à cet axe, et connaissant Y et X, le centre de gravité serait déterminé (1085).

1584. *Détermination du centre de gravité d'un corps quelconque.* Si le corps est cylindrique (840), son centre de gravité est celui de la section faite au milieu de sa longueur par un plan parallèle aux bases du cylindre, et le problème est ramené à celui du numéro précédent.

Dans le cas où le corps est quelconque, on suit encore une marche analogue à celle du numéro précédent. Ainsi l'on partage le corps en un nombre pair n de tranches par des plans parallèles équidistants, dont le premier xOz et le dernier sont tangents au corps; on détermine

les surfaces a_0, a_1, a_2... des sections faites dans le corps par ces plans, et les distances y_0, y_1, y_2... de ces sections à la première $x0z$. Les produits $a_0 \times y_0$, $a_1 \times y_1$, $a_2 \times y_2$... sont les moments des sections par rapport au plan $x0z$, et considérant ces moments comme étant les ordonnées Y_0, Y_1, Y_2... d'une courbe dont les abscisses sont les distances y_0, y_1, y_2... des sections à la première $x0z$, l'aire de cette courbe représente le moment du corps par rapport au plan $x0z$. Ainsi V étant le volume du corps et Y la distance de son centre de gravité au plan $x0z$, on a

$$V \times Y = \frac{H}{3n}[Y_0 + Y_n + 4(Y_1 + Y_3 + \ldots + Y_{n-1}) + 2(Y_2 + Y_4 + \ldots + Y_{n-2})].$$

Formule de laquelle on tire la valeur de Y.

On trouverait de même les distances X et Z du centre de gravité du corps à deux autres plans $y0z$ et $x0y$ tangents au corps. On a soin de choisir les trois plans tangents perpendiculaires entre eux, et le centre de gravité se trouve déterminé par ses distances X, Y et Z à ces plans (1086).

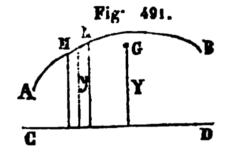
1585. *Théorème de Guldin.*

Ce théorème, qui repose sur les propriétés des centres de gravité, se divise en deux parties :

1° *La surface* S, *engendrée par une courbe plane quelconque* AB, *qui fait une révolution entière autour d'un axe* CD *situé dans son plan, a pour mesure la longueur* L *de la courbe génératrice, multipliée par la circonférence* $2\pi Y$ *que décrit le centre de gravité de la courbe;* ainsi (727)

$$S = 2\pi Y \times L.$$

Considérons un élément quelconque MN de la courbe. Pendant la révolution, cet élément engendre la surface latérale d'un tronc de cône. Cette surface a pour mesure $2\pi y \times MN$, y étant mené au milieu de MN (932). $y \times MN$ est le moment de l'élément MN par rapport à CD. La surface décrite par chacun des autres éléments ayant pour mesure une expression analogue, la surface décrite par tous les éléments, c'est-à-dire par la courbe AB, a pour mesure la somme de toutes ces expressions, c'est-à-dire 2π multiplié par la somme des moments des divers éléments, ou 2π multiplié par le moment $Y \times L$ de la courbe; on a donc bien



$$S = 2\pi Y \times L.$$

Remarque. Si la révolution de la courbe génératrice n'était pas complète, la surface décrite aurait pour mesure la longueur de la courbe génératrice multipliée par l'arc décrit par son centre de gravité.

2° *Le solide engendré par une surface plane quelconque* ABC, *pendant une révolution entière autour de l'axe* DE *situé dans son plan, a pour*

mesure le produit de la circonférence $2\pi Y$, *décrite par son centre de gravité* G, *multipliée par la surface génératrice* S; ainsi l'on a

$$V = 2\pi Y \times S.$$

Considérant le solide engendré par la surface ABC comme composé de tranches infiniment minces déterminées par des plans perpendiculaires à DE, l'une quelconque de ces tranches, par exemple celle engendrée par le trapèze $MNnm$, peut être considérée comme étant très-approximativement la différence de deux cylindres droits ayant PO pour hauteur commune, et pour rayons, l'un $Ip = R$, et l'autre $ip = r$; son volume est donc (924)

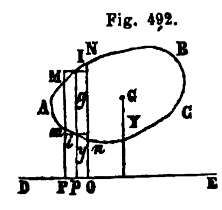


Fig. 492.

$$\pi(R^2 - r^2) \times PO = \pi(R + r)\ (R - r) \times PO. \qquad (703)$$

Remarquant que $(R - r) \times PO$ est la surface s du trapèze $MNnm$ (697), que $\frac{R + r}{2}$ est l'ordonnée y du centre de gravité de ce trapèze et que par suite $\pi(R + r) = 2\pi y$, il en résulte que le volume de la tranche est $2\pi ys$; c'est 2π multiplié par le moment du trapèze. Toutes les autres tranches ayant même expression, et le volume de toutes ces tranches étant la somme de toutes ces expressions, il est donc 2π multiplié par la somme des moments de tous les trapèzes qui composent la surface, c'est-à-dire 2π multiplié par le moment de la surface, ce qui donne bien

$$V = 2\pi Y \times S.$$

Remarque. Comme au 1°, si la révolution n'était pas complète, le volume engendré serait la surface S multipliée par l'arc décrit par le centre de gravité.

CORPS EXÉCUTANT UN MOUVEMENT DE ROTATION AUTOUR D'UN AXE FIXE.

1586. La *vitesse angulaire* d'un corps solide qui tourne autour d'un axe est la longueur de l'arc décrit, ou qui serait décrit si le mouvement en restant uniforme était suffisamment prolongé, pendant l'unité de temps, par un point situé à l'unité de distance de l'axe et lié invariablement au corps (1431).

1587. ω étant la vitesse angulaire d'un corps, et v la vitesse de l'un quelconque de ses points situé à une distance r de l'axe, on a, en remarquant que les vitesses des divers points sont proportionnelles à leurs distances à l'axe,

$$v : \omega = r : 1, \quad \text{d'où} \quad v = \omega r, \quad \text{et} \quad \omega = \frac{v}{r}.$$

1588. *Puissance vive d'un corps tournant autour d'un axe fixe.* Lorsqu'un élément matériel m tourne autour d'un axe, sa vitesse étant ωr,

sa puissance vive est (1473)

$$\frac{1}{2} m\omega^2 r^2.$$

Lorsqu'un corps solide quelconque tourne, chacun de ses points matériels possède une puissance vive d'une expression analogue à la précédente; en faisant la somme de toutes ces puissances vives élémentaires, on a la puissance vive du corps, qui peut alors être représentée par

$$P = \Sigma \frac{1}{2} m\omega^2 r^2,$$

Σ signifiant somme.

Comme $\frac{1}{2}\omega^2$ est le même pour toutes les parties de cette somme, on peut le mettre en facteur commun, et poser

$$P = \frac{1}{2}\omega^2 \Sigma mr^2.$$

mr^2, produit d'un élément matériel par le carré de sa distance à l'axe de rotation, est ce qu'on appelle *le moment d'inertie de l'élément* m *par rapport à l'axe.*

Σmr^2, somme des moments d'inertie de tous les éléments matériels d'un corps par rapport à un axe, est *le moment d'inertie de ce corps par rapport à cet axe.*

La formule précédente fait voir que *la puissance vive d'un solide tournant autour d'un axe fixe est, à un instant quelconque, égale à la moitié du produit du carré de la vitesse angulaire du corps à cet instant par le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe de rotation.*

1589. *Rayon de gyration.* Il existe une valeur R de r telle, que si toute la matière du corps se trouvait à la distance R de l'axe, la puissance vive et par suite le moment d'inertie, pour une même vitesse angulaire par rapport à cet axe, n'auraient pas changé.

R est ce qu'on appelle le *rayon de gyration* du corps.

$M = \Sigma m$ étant la masse du corps, posant (1588)

$$P = \frac{1}{2}\omega^2 \Sigma mr^2 = \frac{1}{2}\omega^2 R^2 \Sigma m = \frac{1}{2}\omega^2 MR^2,$$

d'où

$$\Sigma mr^2 = R^2 \Sigma m = MR^2, \qquad (a)$$

on a

$$R^2 = \frac{\Sigma mr^2}{\Sigma m} = \frac{\Sigma mr^2}{M}.$$

Lorsque les corps sont homogènes, on peut substituer aux masses élémentaires m les volumes élémentaires u, qui leur sont proportion-

nels, dans l'équation (a), qui devient

$$\sum ur^2 = R^2 \sum u = UR^2, \quad \text{d'où} \quad R^2 = \frac{\sum ur^2}{U};$$

alors le rayon de gyration peut être défini et déterminé indépendamment de toute notion de mécanique.

La détermination des rayons de gyration des corps homogènes et de figures géométriques est du domaine du calcul intégral (voir 8ᵉ partie); nous nous contenterons ici d'énoncer leurs valeurs pour les corps qui ont des formes employées dans la pratique.

Ayant le rayon de gyration, MR^2 sera le sommet d'inertie, et $\frac{1}{2}\omega^2 MR^2$ la puissance vive. P étant le poids du corps tournant, on a (1459) $M = \frac{P}{g}$, et par suite

$$MR^2 = \frac{P}{g} R^2, \quad \text{et} \quad P = \frac{1}{2}\omega^2 \frac{P}{g} R^2.$$

1590. *Pour une tige homogène* AB *d'une très-petite section, tournant autour de l'axe* Ay *passant par son extrémité*, on a

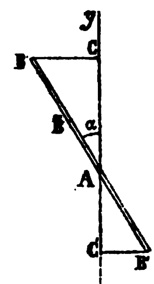


Fig. 493.

$$R^2 = \frac{1}{2} l^2 \sin^2 \alpha;$$

R rayon de gyration;
l longueur de la tige;
α angle que fait la tige avec l'axe.

Remarquant qu'on a (1122) $l \sin\alpha = BC$ ou $l^2 \sin^2\alpha = \overline{BC}^2$, il s'en suit que

$$R^2 = \frac{1}{3}\overline{BC}^2.$$

Le moment d'inertie est alors, P étant le poids de la tige (1589),

$$\frac{P}{g} R^2 = \frac{1}{3}\frac{P}{g}\overline{BC}^2,$$

et la puissance vive

$$\frac{1}{6}\frac{P}{g}\omega^2\overline{BC}^2.$$

Pour la tige BB′, *qui est rencontrée par l'axe en un point quelconque de sa longueur*, r étant le rayon de gyration de la partie AB, et r' celui de la partie AB′, on a

$$r^2 = \frac{1}{3}\overline{BC}^2 \quad \text{et} \quad r'^2 = \frac{1}{3}\overline{B'C'}^2.$$

P et P′ étant les poids des parties AB et AB′ de la tige, les moments d'inertie de ces parties sont respectivement

$$\frac{P}{g} r^2 = \frac{1}{3}\frac{P}{g}\overline{BC}^2 \quad \text{et} \quad \frac{P'}{g} r'^2 = \frac{1}{3}\frac{P'}{g}\overline{B'C'}^2.$$

Le moment d'inertie de la tige totale étant égal à la somme des moments d'inertie des deux parties, on a donc, R étant le rayon de gyration de la tige totale,

$$\frac{P+P'}{g}R^2 = \frac{1}{3}\frac{P}{g}\overline{BC}^2 + \frac{1}{3}\frac{P'}{g}\overline{B'C'}^2, \quad \text{d'où} \quad R^2 = \frac{P \times \overline{BC}^2 + P' \times \overline{B'C'}^2}{3(P+P')}.$$

Dans le cas où le point A est le milieu de la longueur de la tige, c'est-à-dire quand il est le centre de gravité de la tige, on a $B'C' = BC$, $P' = P$ ou $P + P' = 2P$, et la formule précédente devient

$$R^2 = \frac{1}{3}\overline{BC}^2.$$

Ce qui fait voir qu'alors le rayon de gyration de la tige totale est le même que celui de chacune de ses parties considérées séparément.

Si l'axe rencontrait le prolongement de la tige BB″, on remarquerait que le moment d'inertie de BB″ est la différence des moments d'inertie des tiges BA et B″A, et on le déterminerait en suivant la même marche que pour déterminer le moment d'inertie de BB′. Du reste, nous verrons (1602) comment, étant connu le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe passant par son centre de gravité, on peut déterminer son moment d'inertie par rapport à un axe quelconque parallèle au premier.

1591. *Pour une tige en arc de cercle* AB, *d'une très-petite section, tournant autour de son rayon* OA *passant par une de ses extrémités*, on a

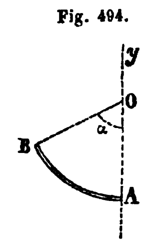


Fig. 494.

$$R^2 = \frac{1}{2}\rho^2\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\rho}{l}\sin 2\alpha\right); \qquad (a)$$

$\rho = OA$ rayon de courbure de la tige;
$l =$ arc AB, longueur de la tige;
$\alpha =$ angle au centre correspondant à l'arc AB.

Pour un quart de cercle, ou un demi-cercle, ou trois quarts de cercle..., c'est-à-dire pour $\alpha = 90°$, $\alpha = 180°$, $\alpha = 270°$... on a $\sin 2\alpha = 0$, et par suite

$$R^2 = \frac{1}{2}\rho^2.$$

Ayant R^2, on aura le moment d'inertie en multipliant R^2 par la masse $\frac{P}{g}$ de la tige; et ce moment d'inertie multiplié par $\frac{1}{2}\omega^2$, moitié du carré de la vitesse angulaire à un certain instant, donnera la puissance vive à l'instant considéré (1589).

A l'aide de la formule (*a*), et en suivant la même marche qu'au numéro précédent, on déterminerait le rayon de gyration, le moment d'inertie et la puissance vive, soit que l'axe OA rencontre l'arc AB en un point quelconque compris entre A et B, soit qu'il rencontre le prolongement de cet arc.

On verrait encore que quand l'axe rencontre l'arc au milieu, c'est-à-dire quand il passe par son centre de gravité, le rayon de gyration de l'arc entier est le même que pour chacune des deux moitiés prises séparément.

1592. *Pour un disque homogène en quart de cercle d'une très-faible et uniforme épaisseur*, tournant autour d'un des rayons qui le limitent, ou pour un demi-cercle qui tourne autour du diamètre qui le limite, ou encore pour trois quarts de cercle et pour un cercle entier, on a

$$R^2 = \frac{1}{4}\rho^2,$$

ρ étant le rayon du disque.

Ayant R^2, on obtiendra facilement le moment d'inertie, puisque, connaissant les dimensions du disque, on a son volume, lequel, multiplié par la densité de la matière, donne le poids du disque. Ayant le moment d'inertie, on obtient la puissance vive en le multipliant par la moitié du carré de la vitesse angulaire (1589).

1593. *Un cylindre homogène droit à base circulaire tournant autour de son axe, ou un secteur quelconque de ce cylindre tournant autour de cet axe*, donne, R étant le rayon de gyration et ρ le rayon du cylindre,

$$R^2 = \frac{1}{2}\rho^2.$$

Ayant R^2, on détermine le moment d'inertie, puis la puissance vive, comme au numéro précédent.

1594. *Pour une jante à section rectangulaire, ou pour une portion de cette jante tournant autour de l'axe*, on a

$$R^2 = \frac{1}{2}(\rho^2 + \rho'^2),$$

ou, en remplaçant les rayons intérieur et extérieur ρ et ρ' de la jante en fonction du rayon moyen $\rho_1 = \frac{\rho + \rho'}{2}$ et de la dimension de la jante mesurée suivant le rayon, $b = \rho - \rho'$,

$$R^2 = \rho_1^2\left(1 + \frac{1}{4}\frac{b^2}{\rho_1^2}\right).$$

1595. Un cône droit à base circulaire ou un secteur de ce cône tournant autour de son axe donne, ρ étant le rayon de la base,

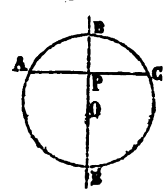
$$R^2 = \frac{3}{10}\rho^2.$$

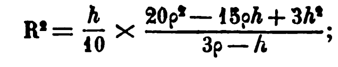
1596. *Pour un tronc de cône tournant autour de son axe*, on remarquerait que le moment d'inertie du tronc est égal au moment d'inertie du cône total, moins le moment d'inertie du cône retranché pour obtenir le tronc. Ayant le moment d'inertie du tronc, en le divisant par

la masse $\frac{P}{g}$ du tronc, on aurait R^2 (1589); c'est la même marche que pour une simple tige tournant autour d'un axe (1590). On opérerait de même pour un tronc de secteur conique.

1597. *Un segment sphérique* ABC, *à une base, tournant autour du diamètre* BB' *perpendiculaire au plan de sa base, c'est-à-dire passant par son centre de gravité*, donne

Fig. 495.





$$R^2 = \frac{h}{10} \times \frac{20\rho^2 - 15\rho h + 3h^2}{3\rho - h};$$

ρ rayon de la sphère;
$h = BP$ hauteur du segment.

Pour une demi-sphère, $h = \rho$, et la formule précédente devient

$$R^2 = \frac{2}{5}\rho^2.$$

Pour la sphère entière, R^2 a aussi cette dernière valeur.

Le rayon de gyration d'un segment sphérique à deux bases s'obtiendrait en remarquant que le moment d'inertie de ce segment est égal à la différence des moments d'inertie de deux segments sphériques à une base (1596).

1598. *Pour une zone sphérique* ABC, *à une base* (fig. 495), *tournant autour du diamètre* BB' *perpendiculaire à sa base, l'épaisseur de la calotte étant très-mince*, on a, ρ et h ayant les mêmes significations qu'au numéro précédent,

$$R^2 = h\left(\rho - \frac{h}{3}\right).$$

Si la calotte était une demi-sphère, on aurait $h = \rho$, et, par suite,

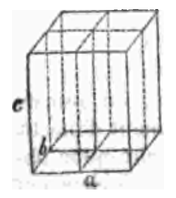
$$R^2 = \frac{2}{3}\rho^2.$$

Pour une sphère creuse entière et très-mince on aurait aussi cette dernière valeur pour R^2.

Le rayon de gyration d'une zone à deux bases s'obtiendrait encore en remarquant que le moment d'inertie de cette zone est égal à la différence des moments d'inertie de deux zones à une base (1596).

1599. *Un parallélipipède rectangle ayant* a, b, c *pour arêtes, et tournant autour de l'arête* c, *donne*

Fig. 496.



$$R^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2). \qquad (a)$$

Cette valeur étant indépendante de c, on en conclut qu'un disque rectangulaire très-mince, tournant dans son plan autour d'un sommet, donne une même expression.

Si le parallélipipède, au lieu de tourner autour de c, *tournait autour d'un axe parallèle à* c, *mené par le*

milieu de b, par rapport à cet axe, le rayon de gyration serait le même pour le parallélipipède donné que pour chacune de ses moitiés déterminées par un plan mené suivant l'axe parallèlement au plan de c et a; or chacune de ces deux moitiés étant un parallélipipède rectangle ayant a, $\frac{1}{2}b$ et c pour arêtes, et tournant autour de l'arête menée par b parallèlement à c, on a

$$R^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + \frac{1}{4}b^2\right);$$

ce qui revient à remplacer b par $\frac{1}{2}b$ dans la formule (a).

Si l'axe était mené parallèlement à c *par le centre de la figure, qui est aussi le centre de gravité*, par un raisonnement analogue au précédent, on verrait, en décomposant le parallélipipède en quatre autres par deux plans passant par l'axe, qu'il faudrait, dans la formule (a), remplacer b par $\frac{1}{2}b$ et a par $\frac{1}{2}a$; ce qui donnerait

$$R^2 = \frac{1}{12}(a^2 + b^2).$$

1600. *Pour un ellipsoïde quelconque* (1210), suivant que le mouvement a lieu autour de l'axe $2c$, ou $2b$, ou $2a$, on a respectivement

$$R^2 = \frac{1}{5}(a^2 + b^2), \quad R^2 = \frac{1}{5}(a^2 + c^2), \quad R^2 = \frac{1}{5}(b^2 + c^2).$$

Lorsque l'ellipsoïde est de révolution, on a $c = b$, et les trois formules précédentes se réduisent aux deux suivantes :

$$R^2 = \frac{1}{5}(a^2 + b^2), \quad R^2 = \frac{1}{5}(b^2 + b^2) = \frac{2}{5}b^2,$$

applicables respectivement aux cas où l'ellipsoïde tourne autour de son petit ou grand axe.

Multipliant le volume de l'ellipsoïde (1210) par la densité de la matière, on a le poids P; on en conclut la masse $\frac{P}{g}$, et par suite le moment d'inertie $\frac{P}{g}R^2$.

Faisant $a = b = c = \rho$, les formules précédentes se réduisent à la formule unique

$$R^2 = \frac{2}{5}\rho^2.$$

Ce qui devait être, puisqu'alors l'ellipsoïde est une sphère (1597).

1601. *Pour un cylindre droit à base demi-parabolique* ABC *tournant*

autour de l'arête qui se projette en A, *on a*

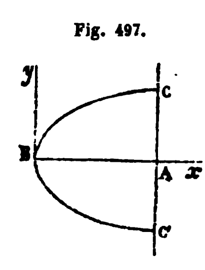


Fig. 497.

$$R^2 = \frac{1}{5}\left(\frac{8}{7}a^2 + b^2\right);$$

$$a = AB,$$

$$b = AC.$$

Pour un cylindre droit à base parabolique CBC′, on a la même valeur pour R^2.

Ayant (1257) surface $ABC = \frac{2}{3}ab$, connaissant la hauteur du cylindre, on déterminera son volume, puis son poids, et ensuite le moment d'inertie.

1602. *Étant donné le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe* Oz *passant par son centre de gravité* G, *trouver celui du même solide par rapport à un axe quelconque* AB *parallèle au premier.*

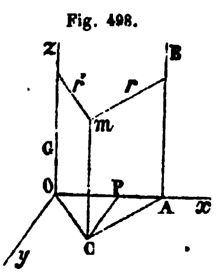


Fig. 498.

On mène un système de trois axes coordonnés perpendiculaires; on prend Oz pour l'un d'eux, et Ox dans le plan des deux axes de rotation Oz et AB.

Considérant alors un point quelconque m du solide, ses coordonnées x, y, z sont respectivement égales à OP, CP et Cm; ses rayons de gyration r' et r, par rapport aux axes Oz et AB, sont égaux aux droites CO et CA; soit $k = OA$ la distance des axes.

Cela établi, le triangle rectangle CAP donne

$$AC^2 = CP^2 + AP^2$$

ou

$$r^2 = y^2 + (k - x)^2 = y^2 + x^2 + k^2 - 2kx.$$

Remarquant que $y^2 + x^2 = r'^2$, il vient

$$r^2 = r'^2 + k^2 - 2kx.$$

Multipliant par m les deux membres de cette équation, on a le moment d'inertie

$$mr^2 = mr'^2 + mk^2 - 2kmx.$$

Chacun des autres points matériels a une expression analogue pour moment d'inertie; et en faisant la somme de toutes ces expressions on a le moment d'inertie cherché, qui est

$$\Sigma mr^2 = \Sigma mr'^2 + \Sigma mk^2 - 2k\Sigma mx.$$

Remarquant que Σmx est le moment du solide par rapport au plan yOz, et que ce moment est nul, puisque le centre de gravité G est sur ce plan (1534), on a

$$2k\Sigma mx = 0,$$

et par suite

$$\Sigma mr^2 = \Sigma mr'^2 + k^2 \Sigma m.$$

Ce qui fait voir que le moment d'inertie d'un corps solide par rapport à un axe quelconque, est égal au moment d'inertie du corps par rapport à un axe mené parallèlement au premier par le centre de gravité, plus le produit de la masse entière par le carré de la distance des deux axes.

Appelant R et R′ les rayons de gyration du solide par rapport à l'axe quelconque et à l'axe passant par le centre de gravité, la formule précédente devient, en appelant M la masse totale,

$$MR^2 = MR'^2 + Mk^2,$$

d'où

$$R^2 = R'^2 + k^2.$$

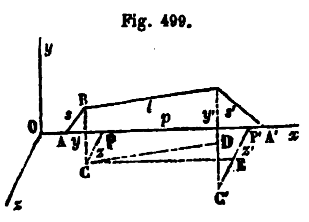
Ce qui fait voir que le carré du rayon de gyration d'un système solide par rapport à un axe quelconque, est égal au carré du rayon de gyration du même système par rapport à l'axe mené parallèlement au premier par le centre de gravité, plus le carré de la distance des deux axes. R est l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui a R′ et k pour côtés de l'angle droit (704).

Cette formule est employée dans la pratique, où il arrive souvent qu'on a à déterminer le rayon de gyration par rapport à un axe, pour un corps dont on connaît le rayon de gyration par rapport à un axe parallèle passant par le centre de gravité.

CALCUL DU TRAVAIL DES FORCES APPLIQUÉES AUX DIVERS POINTS D'UN SYSTÈME MATÉRIEL.

1603. Avant d'entrer en matière proprement dite, nous allons établir le lemme suivant de géométrie infinitésimale :

Fig. 499.



AA′ *ayant une longueur déterminée; la droite* BB′ *étant quelconque, mais telle que les distances* AB *et* A′B′ *soient infiniment petites, la différence entre* BB′ *et sa projection* PP′ *sur* AA′ *est une portion infiniment petite de la somme infiniment petite* AB + A′B′; *ce que l'on peut énoncer en disant que cette différence est une quantité infiniment petite du second ordre.* Cela établi, on pourra dans les applications supposer

$$BB' = PP'.$$

Faisons, pour abréger, $BB' = l$, $PP' = p$, $AB = s$ et $A'B' = s'$; on a $BC = y$, $CP = z$, $B'C' = y'$ et $C'P' = z'$ (1086).

Menant CD parallèle à BB′, et CE à PP′, on voit que CD = BB′ est la diagonale d'un parallélipipède rectangle dont les côtés sont $CE = p$,

C'D = C'B' — CB = $y'-y$ et C'E = C'P' — CP = $z'-z$; on peut donc poser (827)

$$l^2 = p^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2;$$

d'où il résulte qu'on a, en ajoutant trois termes de valeurs positives au second membre de cette équation,

$$l^2 < p^2 + \frac{(y'-y)^4}{4p^2} + \frac{(z'-z)^4}{4p^2} + (y'-y)^2 + (z'-z)^2 + \frac{2(y'-y)^2(z'-z)^2}{4p^2}.$$

Remarquant que le second membre de cette inégalité est le carré de $p + \frac{(y'-y)^2}{2p} + \frac{(z'-z)^2}{2p}$ (445), il en résulte qu'on a

$$l - p < \frac{(y'-y)^2}{2p} + \frac{(z'-z)^2}{2p}. \qquad (a)$$

La figure fait voir qu'on a (741) $s > y$, $s > z$ et $s' > y'$, $s' > z'$; d'où il suit que quels que soient les signes de ces quantités, on peut poser

$$(y'-y)^2 < (s+s')^2, \quad \text{et} \quad (z'-z)^2 < (s+s')^2.$$

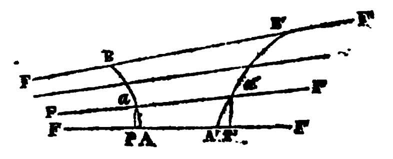
Substituant ces quantités plus grandes dans l'inégalité (a), il vient, à plus forte raison,

$$l - p < \frac{(s+s')^2}{2p} + \frac{(s+s')^2}{2p} = \frac{(s+s')^2}{p} = \frac{s+s'}{p}(s+s').$$

Ce qui fait voir que la différence $l-p$ est moindre que la fraction infiniment petite $\frac{s+s'}{p}$ de la quantité infiniment petite $s+s'$; on peut donc considérer cette différence comme nulle, et supposer BB' égal à PP' dans les applications.

1604. *Travail de deux forces* F *et* F', *égales, constantes et toujours directement opposées, agissant sur deux points d'un système.*

Fig. 500.



Soient AB et A'B' les courbes suivies par les points sollicités respectivement par les forces F, F'.

Soient Aa et A'a' deux arcs élémentaires parcourus simultanément par les deux points sollicités. On peut considérer ces arcs comme étant des lignes droites, et si l'on appelle α et α' les angles qu'ils font avec AA', les travaux élémentaires produits par F et F' sont (1471)

$$F \times Aa\cos\alpha = F \times AP, \quad \text{et} \quad F' \times A'a'\cos\alpha' = F' \times A'P'.$$

Le travail produit par les deux forces est donc, en remarquant que F = F',

$$F(AP + A'P') = F(PP' - AA');$$

et comme, d'après le numéro précédent, on peut remplacer PP' par

aa', on a donc, pour la somme des travaux élémentaires,

$$F(aa' - AA').$$

Ce qui fait voir que cette somme est égale au produit de l'une des forces par la quantité dont a varié la distance des deux points mobiles.

Pendant le parcours simultané de chacun des éléments de AB et A'B', la somme des deux travaux élémentaires des forces aurait la même expression; *donc le travail total produit par les deux forces pendant tout le parcours est égal à la somme de toutes ces sommes élémentaires, c'est-à-dire à l'une des forces multipliée par la quantité dont les deux points se sont éloignés ou rapprochés.*

Ce travail est le même que si l'un des points était fixe, et que l'autre, sollicité par l'une des forces agissant dans la direction de la droite qui joint les deux points, s'en soit éloigné ou rapproché de la même quantité.

On voit que le travail ne dépend nullement du mouvement absolu du système, mais seulement du mouvement relatif des deux points.

Il est évident que le travail est positif ou négatif, suivant que les forces étant répulsives, il y a écartement ou rapprochement des points, ou qu'étant attractives, il y a rapprochement ou éloignement.

Si les forces, tout en restant égales et directement opposées, variaient d'intensité, on pourrait les considérer comme étant constantes pendant le parcours de chacun des éléments du chemin; on aurait alors chaque travail élémentaire comme dans le cas précédent, et en faisant la somme de tous les travaux élémentaires, on aurait le travail total, qui serait d'autant plus exact qu'on aurait opéré sur des valeurs plus rapprochées des forces. On pourrait encore, pour évaluer ce travail total, tracer une courbe dont l'aire représenterait ce travail, comme au n° 1472.

1605. *Travail des forces appliquées à un corps solide ayant un mouvement de translation.*

1° *Supposons d'abord que les forces restent constantes et parallèles.*

Pendant un temps quelconque du mouvement, tous les points du système décrivant des chemins égaux et parallèles, le travail produit par une force F faisant un angle α avec la direction du mouvement est, pour un chemin parcouru E (1471),

$$E \times F \cos\alpha.$$

Menant un axe Ox parallèle à la direction du mouvement, E se projette en véritable grandeur sur cet axe, et désignant par E_x cette projection, on a $E = E_x$. La projection de F sur Ox est égale à sa projection sur la direction du mouvement, et l'on voit que désignant par F_x cette projection, on a

$$F \cos\alpha = F_x.$$

Représentant par $\mathcal{T}F$ le travail de F, on a donc

$$\mathcal{T}F = E_x F_x.$$

Pour toutes les autres forces, on a un travail d'une même expression; et en faisant la somme de tous ces travaux partiels, on a le travail total, qu'on peut alors mettre sous la forme, en remarquant que E_x est commun à toutes les parties de la somme,

$$\Sigma \mathcal{T}F = E_x \Sigma F_x.$$

Ce que l'on peut énoncer en disant que la somme des travaux des forces appliquées à un corps solide, pendant le mouvement de translation, est égale au chemin parcouru par un point quelconque du solide, multiplié par la somme des projections des forces sur un axe parallèle à la direction du mouvement. Cette somme de projections étant égale à la projection de la résultante (1526), on voit que *la somme des travaux des forces est égale au travail de la résultante* (1506).

2° Si les forces, au lieu de rester constantes et parallèles à elles-mêmes, changeaient d'intensité ou de direction, on établirait, pour l'un quelconque e des éléments de l'espace parcouru, l'équation que nous avons posée dans le cas précédent pour l'espace total E, et l'on aurait pour une force F

$$\mathcal{T}F = e_x F_x,$$

et pour toutes les forces,

$$\Sigma \mathcal{T}F = e_x \Sigma F_x';$$

ce que l'on peut énoncer en disant que la somme des travaux élémentaires des forces appliquées à un système solide, pendant le mouvement de translation du système, est égale au chemin élémentaire parcouru par l'un de ses points, multiplié par la somme des projections des forces sur un axe parallèle à la direction du mouvement.

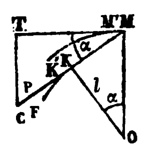
Pour avoir le travail produit pendant une portion quelconque du parcours, il suffirait d'ajouter toutes les sommes de travaux, que l'on obtiendrait comme dans le cas précédent, pour tous les éléments du chemin considéré.

On pourrait encore, comme au n° 1472, pour évaluer ce travail total, tracer une courbe dont l'aire représenterait ce travail; seulement chacune des ordonnées de la courbe, au lieu d'être égale à une seule force, représenterait une somme de projections de forces.

1606. *Travail des forces appliquées à un solide doué d'un mouvement de rotation autour d'un axe.*

Soient M un point du corps et F une force appliquée à ce point. Par le point M menons un plan perpendiculaire à l'axe; supposons que ce plan soit celui du papier, et que le point O soit la projection de l'axe sur ce plan.

Fig. 501.



Le point M se déplaçant d'une quantité infiniment petite MM' dirigée suivant la tangente MT, pendant ce déplacement, le travail de la force F est égal à MM' multiplié par la projection de F sur MT (1471). Or, remarquant que si MC représente en grandeur et en

direction la projection P de F sur le plan perpendiculaire à l'axe, et qu'on mène CT perpendiculaire à MT, MT est la projection de F sur MT (747), et par suite le travail élémentaire dû à F est

$$MT \times MM'.$$

Ce travail est positif ou négatif suivant que MC et MM' font un angle aigu ou obtus.

Représentant par α l'angle TMC, on a (1122)

$$MT = MC \cos\alpha = P \cos\alpha;$$

et faisant $MM' = e$, le travail élémentaire dû à F est

$$\mathfrak{T}F = P \cos\alpha \times e.$$

Désignant par a le déplacement angulaire du système, c'est-à-dire la longueur de l'arc décrit par un point situé à l'unité de distance de l'axe O, pendant que le point M décrit l'arc e, on a (725)

$$e = a \times OM,$$

et par suite

$$\mathfrak{T}F = P \times a \times OM \cos\alpha.$$

Abaissant la perpendiculaire OK sur MC, on a l'angle $O = \alpha$ (594), et par suite

$$OK = OM \cos\alpha.$$

Représentant par l la perpendiculaire OK, que nous avons appelée bras de levier de la force F et de sa projection P (1536), on a

$$\mathfrak{T}F = aPl. \qquad (1)$$

Pl est ce que nous avons appelé le moment de la force F et de sa projection P; ce moment prend le signe de la force P.

Le travail élémentaire de chacune des autres forces est analogue à celui de F, et en faisant la somme de toutes les expressions obtenues, on a le travail total élémentaire, que l'on peut exprimer par

$$\sum \mathfrak{T}F = a \sum Pl = a \sum M_0F,$$

en représentant par $\sum M_0F$ la somme des moments de toutes les forces.

Cette expression s'énonce en disant que la somme des travaux élémentaires des forces appliquées à un système solide pendant le mouvement de rotation de ce système autour d'un axe fixe, est égale au déplacement angulaire infiniment petit du système, multiplié par la somme algébrique des moments des forces par rapport à l'axe de rotation.

1607. Si la force F est constante et conserve toujours par rapport à l'axe la même position relative, ce qui a ordinairement lieu dans la pratique, le travail est exprimé par l'équation (1) du n° précédent pour chacun des éléments d'un espace angulaire quelconque parcouru, et en faisant la somme de tous les travaux élémentaires, on a le travail total produit par F pour l'espace parcouru. Cette somme est, en mettant Pl

en facteur commun, et en représentant par A la somme $a + a' + a'' ...$ de tous les éléments angulaires parcourus, c'est-à-dire l'espace total parcouru par le point situé à l'unité de distance de l'axe, on a

$$\mathcal{T}F = APl. \qquad (1)$$

Pour une autre force F′, le travail, pour un même espace angulaire, serait

$$\mathcal{T}F' = AP'l';$$

et de même pour toutes les forces du système.

Faisant la somme de tous ces travaux, on a le travail total, qui est

$$\mathcal{T} = A(Pl + P'l' + ...);$$

ce qui fait voir que *les forces étant constantes, et conservant toujours la même position relative par rapport à l'axe, le travail produit pendant le parcours d'un espace angulaire quelconque est égal à cet espace angulaire multiplié par la somme algébrique des moments de toutes les forces.*

1608. Le travail élémentaire produit par une force F dans le mouvement de rotation étant (1606)

$$\mathcal{T}F = aPl = Pal,$$

comme les arcs parcourus sont comme les rayons, ainsi (*fig.* 501)

$$a : KK' = 1 : OK \text{ ou } l, \quad \text{d'où} \quad KK' = al,$$

représentant KK′ par e, le travail élémentaire dû à la force F a aussi pour expression

$$\mathcal{T}F = Pe;$$

c'est le produit de la projection P *de la force* F *par l'arc élémentaire ayant le bras de levier pour rayon.*

La force F restant constante en grandeur et en position relative par rapport à l'axe, le travail reste le même pour chacun des éléments $e, e' ...$ parcourus par l'extrémité du bras de levier, et l'on conclut, E étant la somme de tous ces éléments, que le travail total produit par F pendant ce parcours est

$$\mathcal{T}F = PE;$$

expression que l'on pouvait obtenir directement en remarquant que dans la formule (1) du n° 1607), $Al = E$.

Ainsi dans le cas d'une force constante en grandeur et en direction relative, le travail est représenté par le produit de la projection de la force sur un plan perpendiculaire à l'axe par l'arc que décrit l'extrémité de son bras de levier.

Toutes les autres forces produiraient un travail d'une expression analogue, et en faisant la somme de toutes les expressions on aurait le travail total produit.

1609. *Remarque* 1. On voit que le travail produit par une force quelconque est le même que celui produit par sa projection sur un plan

perpendiculaire à l'axe, et que l'on peut supposer cette projection appliquée à l'extrémité de son bras de levier (1550, 1606).

1610. *Remarque* 2. La force F étant dans un même plan avec l'axe, elle lui est parallèle et alors $P=0$, où elle le rencontre et l'on a $l=0$. Dans l'un et l'autre cas, le moment $Pl=0$.

La réciproque est également vraie; car pour avoir $Pl=0$, il faut que $P=0$, c'est-à-dire que F soit parallèle à l'axe, ou que $l=0$, et alors F rencontre l'axe.

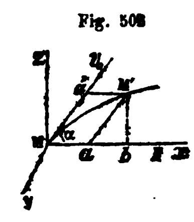
Quand $Pl=0$, le travail $aPl=0$; donc toutes les fois que la force sera dans un même plan avec l'axe, son travail sera nul.

La réciproque est également vraie pour $aPl=0$, car a ne pouvant être nul, il faut que $Pl=0$; ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que la force est dans un même plan avec l'axe.

DYNAMIQUE D'UN SYSTÈME MATÉRIEL QUELCONQUE.

1611. *Lorsqu'un point matériel* M *se meut dans l'espace en vertu d'une vitesse initiale* v_0, *et de l'action d'une force constante* F, *qui peut être la résultante de plusieurs autres, sa projection sur un axe quelconque se meut à chaque instant comme un corps qui, ayant même masse* m *que le mobile, a pour vitesse initiale la projection* v_{0x} *de la vitesse initiale* v_0, *et qui est sollicité par la projection* F_x *de la force* F.

Fig. 502.



Dans tous les cas, la courbe décrite par le mobile est dans un même plan avec les directions de la force F et de la vitesse initiale v_0. Cela établi, supposons d'abord que l'axe se confonde avec la direction MF de la force. Après le temps t, le mobile étant venu en M', sa projection a parcouru sur l'axe un espace $Mb = Ma + ab$, et comme on a (1427, 1437, 1461, 1487)

$$Ma = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2,$$

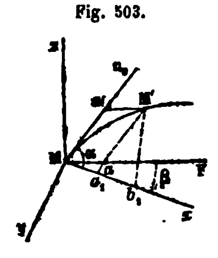
et

$$ab = aM'\cos\alpha = Ma'\cos\alpha = v_0 t\cos\alpha = v_0\cos\alpha \times t = v_{0x}t,$$

on a bien, comme il fallait le démontrer,

$$E_x = v_{0x}t + \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2.$$

Fig. 503.



Pour un axe Mx de direction quelconque, on peut supposer qu'il passe toujours par le point M, puisque tout se projette d'une manière identique sur deux droites parallèles. Alors des points M' et a menant des perpendiculaires à Mx, l'espace parcouru par la projection est

$$Mb_1 = Ma_1 + a_1 b_1.$$

Mais

$$Ma_1 = Ma\cos\beta = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2\cos\beta = \frac{1}{2}\frac{F\cos\beta}{m}t^2,$$

et

$$a_1b_1 = aM'\cos\alpha = v_0t\cos\alpha = v_0\cos\alpha\times t;$$

donc

$$E_x = v_{0x}t + \frac{1}{2}\frac{F_x}{m}t^2.$$

De cette formule on conclut $F_x = 0$ quand on a $E_x = v_{0x}t$. Ainsi *la somme des projections sur un axe quelconque des forces qui sollicitent un mobile est nulle, lorsque la projection du déplacement est égale à l'espace parcouru sous l'influence de la projection de la vitesse initiale.*

Dans le cas où les forces sont variables soit en intensité soit en direction, concevant le temps partagé en intervalles infiniment petits, pendant chacun d'eux, on peut considérer les forces comme constantes, et donnant lieu à la propriété précédente. On peut donc poser :

1° $\quad j_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{F_x}{m};$ (1435, 1461)

2° $\quad mv_x - mv_{0x} = F_{1x}\theta_1 + F_{2x}\theta_2 + \ldots$ (1468)

3° $\quad \dfrac{1}{2}mv_x^2 - \dfrac{1}{2}mv_{0x}^2 = F_{1x}e_{1x} + F_{2x}e_{2x} + \ldots$ (1475)

Résultats faciles à énoncer verbalement.

1612. Dans la pratique on a généralement à considérer un système de points matériels; mais ordinairement ces points matériels constituent un seul corps solide, ou s'ils en constituent plusieurs, ceux-ci n'exercent aucune action mutuelle les uns sur les autres, de sorte qu'on peut considérer chaque corps comme formant un système à part.

Dans un corps solide, pour les mouvements compatibles avec la solidité du système, les mouvements relatifs des molécules pouvant être supposés nuls (1510), il en résulte que le travail des actions mutuelles égales et directement opposées est nul (1604), et qu'il n'y a qu'à tenir compte des forces extérieures qui sollicitent le système. De plus, on peut considérer tout le système comme étant concentré à son centre de gravité s'il s'agit d'un mouvement de translation (1605), ou concentré à l'extrémité de son rayon de gyration s'il s'agit d'un mouvement de rotation (1606); et alors tout ce qui a été dit relativement à un point matériel peut se répéter pour un corps solide.

Cependant, comme on peut avoir à étudier un système composé de plusieurs corps solides, et qu'il pourra être commode et même quelquefois nécessaire de considérer les corps comme ne formant qu'un système (1651), nous allons citer les résultats qu'on obtient pour un système de deux ou d'un plus grand nombre de points matériels liés entre eux par des actions mutuelles, résultats qu'on pourra appliquer à un système quelconque de corps, en considérant ces corps comme étant concentrés à leurs centres de gravité ou aux extrémités de leurs rayons de gyration.

Considérons un système composé de deux éléments matériels M′ et M″ sollicités respectivement par les actions mutuelles, variables ou non, f' et f''. Soient F′ la résultante des forces extérieures qui sollicitent M′ et F″ celle des forces extérieures qui sollicitent M″; soient, de plus, v'_0 et v''_0, v' et v'' les vitesses initiales et les vitesses des points matériels M′ et M″ après le temps $t = \theta + \theta' \ldots$ En ajoutant l'indice x pour désigner les projections de ces forces et de ces vitesses sur un axe quelconque Ox, la relation entre la quantité de mouvement et l'impulsion suivant cet axe devient respectivement pour chacun des points matériels considérés séparément (1611)

$$m'v'_x - m'v'_{0x} = \sum F'_x\theta + \sum f'_x\theta,$$
$$m''v''_x - m''v''_{0x} = \sum F''_x\theta + \sum f''_x\theta.$$

Faisant la somme de ces deux équations on a, en remarquant que les forces f_x et f''_x étant toujours égales et de signes contraires, les impulsions $\sum f'_x\theta$ et $\sum f''_x\theta$ sont égales, de signes contraires et se détruisent,

$$(m'v'_x + m''v''_x) - (m'v'_{0x} + m''v''_{0x}) = \sum F'_x\theta + \sum F''_x\theta.$$

Ce qui fait voir que *l'accroissement de la somme des quantités de mouvement projetées suivant un axe quelconque est égal à la somme des impulsions des forces extérieures projetées sur le même axe, et indépendant des actions mutuelles.*

Dans le cas où F′ et F″ seraient constantes en grandeur et en direction, F'_x et F''_x seraient constantes, et l'équation précédente deviendrait

$$(m'v'_x + m''v''_x) - (m'v'_{0x} + m''v''_{0x}) = F'_x t + F''_x t.$$

Ce qui vient d'être dit pour un système de deux points matériels s'applique à un système composé d'un nombre quelconque de points. Ainsi l'on a

$$\sum mv_x - \sum mv_{0x} = \sum F_x\theta.$$

1613. *Mouvement du centre de gravité d'un système matériel.*

La somme des moments de différents points matériels par rapport à un plan quelconque étant égale au moment de tout le système concentré à son centre de gravité (1562), on a, en désignant par x', $x''\ldots$ les distances des points matériels au plan, par X celle du centre de gravité au même plan, et par m', $m''\ldots$ les masses de ces points,

$$m'x' + m''x'' + \ldots = X\sum m.$$

Soit Ox un axe parallèle aux distances x', $x''\ldots$X. Projetant tous les points matériels et le centre de gravité du système sur cet axe, les longueurs x', $x''\ldots$X se projetteront en véritable grandeur, et l'on aura encore pour ces projections

$$m'x' + m''x'' + \ldots = X\sum m. \qquad (1)$$

Ce qui fait voir que la projection du centre de gravité d'un système de points matériels sur un axe quelconque est le centre de gravité des projections des points matériels sur le même axe. C'est également vrai pour les projections sur un plan.

Supposons maintenant que les points matériels se déplacent d'une quantité infiniment petite, et que leurs ordonnées suivant le même axe Ox deviennent $x' + e'_x$, $x'' + e''_x + \ldots$; $X + e_x$ étant l'ordonnée du centre de gravité, on a pour cette nouvelle position

$$m'(x' + e'_x) + m''(x'' + e''_x) + \ldots = (X + e_x)\sum m.$$

Retranchant membre à membre l'équation (1) de cette dernière, il vient

$$m'e'_x + m''e''_x + \ldots = e_x\sum m.$$

Divisant les deux membres de cette équation par θ, instant pendant lequel le système s'est déplacé, on a

$$\frac{m'e'_x}{\theta} + \frac{m''e''_x}{\theta} + \ldots = \frac{e_x}{\theta}\sum m.$$

Remarquant que $\frac{e'_x}{\theta} = v'_x$, $\frac{e''_x}{\theta} = v''_x \ldots$ sont les vitesses des projections de m', $m''\ldots$ sur l'axe Ox (1431), et que $\frac{e_x}{\theta} = u_x$ est celle de la projection du centre de gravité, on a

$$m'v'_x + m''v''_x + \ldots = u_x\sum m.$$

Ce qui montre que la somme des quantités de mouvement projetées sur un axe est égale à la quantité de mouvement de tout le système concentré au centre de gravité projetée sur le même axe; ce qu'en abrégé on peut écrire ainsi :

$$\sum mv_x = u_x\sum m.$$

De cette formule on pourra tirer u_x.

Menant trois axes coordonnées, on aura une expression semblable pour chacun d'eux, et l'on pourra déterminer la vitesse de la projection, c'est-à-dire la projection de la vitesse u du centre de gravité sur chacun d'eux, et par suite la valeur et la direction de cette vitesse (1488, 1500).

On a (1612)

$$\sum mv_x - \sum mv_{0x} = \sum F_x\theta.$$

Remplaçant $\sum mv_x$ et $\sum mv_{0x}$ par leurs valeurs en fonction de la vitesse du centre de gravité, on a

$$u_x\sum m - u_{0x}\sum m = \sum F_x\theta,$$

ou

$$\sum m(u_x - u_{0x}) = \sum F_x\theta.$$

Cette équation fait voir que la variation de la projection de la vitesse du centre de gravité d'un système sur un axe dépend uniquement en grandeur et en direction des forces extérieures, et nullement des actions mutuelles et du rapprochement ou écartement des points matériels du système.

Cette vérité étant indépendante de l'axe, elle s'applique à trois axes coordonnés, et il en résulte que ce qui vient d'être dit pour les variations des projections peut se répéter pour la vitesse elle-même; ce qui prouve le théorème remarquable connu sous le nom de *principe de la conservation du mouvement du centre de gravité*, et qui consiste en ce que *le centre de gravité se meut comme un point matériel réunissant à lui seul la masse totale* $\sum m$ *de tous les points du système, et qui serait sollicité par les forces extérieures transportées en ce point parallèlement à elles-mêmes.*

La résultante de toutes ces forces extérieures transportées parallèlement à elles-mêmes en un même point a été appelée par M. Bellanger *résultante de translation.*

Comme cas particulier, quel que soit le nombre des forces qui sollicitent un corps solide entièrement libre, si ce corps est en équilibre, en appliquant toutes les forces, parallèlement à elles-mêmes, à un même point quelconque, ces forces se feront encore équilibre, et leur polygone se fermera de lui-même, c'est-à-dire donnera une résultante nulle (1492). Comme les relations entre les forces ainsi transportées ne changent pas, cette considération peut souvent être très-utile dans la pratique pour déterminer les conditions d'équilibre d'un corps solide soumis à l'action de plusieurs forces.

Exemples où le théorème du mouvement du centre de gravité se réalise.

1° Un projectile lancé faisant explosion, tant que les éclats ne rencontrent pas d'obstacles, sauf la modification due à la résistance de l'air, le centre de gravité continue son mouvement de la même manière que si l'explosion n'avait pas eu lieu.

2° Si un homme en tombant d'une certaine hauteur s'agite, son centre de gravité peut changer de position dans son corps, mais il continue son mouvement comme si l'agitation n'avait pas eu lieu.

Si en tombant l'homme lance un projectile qui l'accompagnait, il modifie son mouvement ainsi que celui du projectile, mais il ne modifie en rien celui du centre de gravité de l'ensemble de son corps et du projectile.

1614. *Extension du théorème des puissances vives à un système quelconque de points matériels. Cas des machines. Effets des volants.*

1° *Pour le seul point* M *décrivant une courbe quelconque*, animé de la vitesse initiale v_0 et sollicité par la résultante constante F, la formule 3° du n° 1611 devient, en prenant l'axe parallèle à la direction de F,

$$\frac{1}{2} mv_x^2 - \frac{1}{2} mv_{0x}^2 = F\sum e_x = FE_x.$$

Pour deux autres axes rectangulaires entre eux et au premier, la même formule donne, en remarquant que $F_y = 0$ et $F_z = 0$,

$$\frac{1}{2} mv_y^2 - \frac{1}{2} mv_{0y}^2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} mv_z^2 - \frac{1}{2} mv_{0z}^2 = 0.$$

Ajoutant ces trois équations, il vient, en remarquant que $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$ et $v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2 = v_0^2$,

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \mathrm{FE}_x = \mathcal{T}\mathrm{F}.$$

Formule qui fait voir que, *quelle que soit la courbe décrite par le mobile, l'accroissement de puissance vive est égal au travail de la résultante des forces* (1474).

Dans le cas où F varie en intensité ou en direction, on peut la considérer comme constante pendant des temps infiniment petits, et l'on a pour ces instants successifs

$$\frac{1}{2} mv_1^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \mathcal{T}\mathrm{F}_1,$$
$$\frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 = \mathcal{T}\mathrm{F}_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv^2_{n-1} = \mathcal{T}\mathrm{F}_n.$$

Faisant la somme de toutes ces équations, on a, en supprimant les quantités qui se détruisent, et en représentant par $\mathcal{T}\mathrm{F}$ la somme des travaux élémentaires,

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \mathcal{T}\mathrm{F}.$$

Ainsi, *dans tous les cas, l'accroissement de puissance vive est égal à la somme des travaux des forces.*

2° *Système composé d'un nombre quelconque de points matériels liés entre eux par des actions mutuelles.*

Pour deux points, en conservant les mêmes notations qu'au n° 1612, on a successivement pour les points matériels M′ et M″ considérés séparément (1°)

$$\frac{1}{2} m'v'^2 - \frac{1}{2} m'v'_0{}^2 = \mathcal{T}\mathrm{F}' + \mathcal{T}f',$$
$$\frac{1}{2} m''v''^2 - \frac{1}{2} m''v''_0{}^2 = \mathcal{T}\mathrm{F}'' + \mathcal{T}f''.$$

Ajoutant ces deux équations, on a pour tout le système

$$\Sigma \frac{1}{2} mv^2 - \Sigma \frac{1}{2} mv_0^2 = \Sigma \mathcal{T}\mathrm{F} + \Sigma \mathcal{T}f; \qquad (a)$$

équation qui s'applique à un nombre quelconque de points matériels,

et qui fait voir que l'*accroissement algébrique de la puissance vive du système est égal au travail des forces extérieures, plus celui des forces intérieures mutuelles.*

Ce dernier travail, qui s'évalue en grandeur absolue et en signe comme il a été indiqué au n° 1604 pour deux forces égales et contraires, dépend uniquement du mouvement relatif des différentes parties du système.

Ordinairement dans la pratique les systèmes qu'on étudie peuvent être considérés comme entièrement solides; alors les mouvements relatifs de leurs différents points matériels sont nuls, et le travail des actions mutuelles est aussi nul. Si ces mouvements ne sont pas nuls, ce qui arrive quand les solides sont soumis à de certains efforts, tant que ces efforts ne compromettent pas la solidité du système, ces déplacements sont négligeables, et l'on peut encore considérer comme nul le travail de ces actions mutuelles; de sorte que dans ces deux cas, qui se présentent généralement dans la pratique, on a

$$\Sigma \frac{1}{2} mv^2 - \Sigma \frac{1}{2} mv_0^2 = \Sigma \mathcal{T}\mathrm{F};$$

expression qui généralise celle du n° 1474, donnée pour un point matériel.

Dans le cas où les vitesses v et v_0 sont les mêmes pour tous les points du système, on a, en représentant la masse totale Σm du système par M,

$$\frac{1}{2} \mathrm{M}v^2 - \frac{1}{2} \mathrm{M}v_0^2 = \Sigma \mathcal{T}\mathrm{F}. \qquad (b)$$

Remarque 1. Lorsqu'un système est composé de deux ou d'un plus grand nombre de corps matériels qui se meuvent en glissant l'un sur l'autre, de ce glissement en contact naît un frottement qui est réellement une force mutuelle qui s'oppose au mouvement, et dont on évalue le travail d'après le mouvement relatif, comme il a été indiqué au n° 1604. L'existence de ce frottement oblige d'avoir recours à la formule (a); cependant comme cette résistance, qui joue un très-grand rôle dans toutes les machines, peut être évaluée d'après les grandeurs et directions des forces extérieures du système, on peut la considérer, pour la facilité des applications, comme étant une force extérieure, et l'on voit que la formule (b) s'applique encore dans ce cas, qui est le plus général de la mécanique.

Remarque 2. Lorsqu'un système quelconque (que les points ou corps matériels soient isolés ou composent une machine) est en mouvement, il peut être sollicité par des forces positives, que nous appellerons *puissances*, qui agissent dans le sens où le mouvement se produit ou doit se produire, et par des forces négatives, appelées *résistances*, qui s'opposent au mouvement. Appelant $\mathcal{T}_m$ le travail des forces motrices, et $\mathcal{T}_r$ le travail des résistances, on a le travail total des forces

extérieures,

$$\Sigma \mathcal{T}\mathrm{F} = \mathcal{T}_m - \mathcal{T}_r,$$

et la formule (*b*) devient

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{M}v^2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{M}v_0^2 = \mathcal{T}_m - \mathcal{T}_r. \qquad (c)$$

Si, à deux instants du mouvement, la vitesse est la même, qu'elle ait ou non varié entre ces deux instants, la variation de puissance vive est nulle, et par suite la formule précédente donne

$$\mathcal{T}_m = \mathcal{T}_r.$$

Si, à partir d'un instant déterminé, les forces motrices cessent leur effet, et que les résistances continuent d'agir, après un certain temps on aura

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{M}v^2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{M}v_0^2 = 0 - \mathcal{T}_r = -\,\mathcal{T}_r.$$

Ainsi le travail résistant fait décroître la vitesse. On conçoit alors qu'elle pourra décroître de manière à devenir nulle, et l'on aura

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{M}v^2 = 0,$$

et par suite

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{M}v_0^2 = \mathcal{T}_r;$$

ce qui fait voir que le travail résistant que le système M, animé de la vitesse v_0, est capable de vaincre, est représenté par

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{M}v_0^2 = \Sigma\,\frac{1}{2}\,mv_0^2 = \frac{1}{2}\,m'v_0'^2 + \frac{1}{2}\,m''v_0''^2 + \ldots\ldots$$

c'est-à-dire que, comme pour un point matériel (1474), ce travail est égal à la puissance vive que possède le système.

C'est sur cette propriété de la matière qu'est fondé l'usage des volants, pour régulariser la vitesse des machines. Le travail des puissances étant momentanément supérieur à celui des résistances, la vitesse de la machine et par suite celle du volant augmente de manière à ce que l'équation (*c*) soit satisfaite. Le travail résistant devenant ensuite supérieur au travail moteur, la vitesse diminue; mais comme les organes de la machine restituent le travail qu'ils avaient accumulé, la vitesse diminue moins rapidement.

Il convient de remarquer en passant que les volants n'augmentent nullement la puissance dynamique des machines. Le travail moteur devenant supérieur au travail résistant, le volant et les autres organes de la machine en accumulent l'excès, pour le restituer quand le travail moteur devient inférieur au travail résistant; mais le volant, comme les autres organes, ne restitue que ce qui lui a été transmis, et même

moins, vu que le frottement de ses tourillons et la résistance de l'air en absorbent toujours une partie.

THÉORÈME DU TRAVAIL VIRTUEL.

1615. Lorsque, sans avoir égard aux obstacles que des corps environnants peuvent opposer au mouvement d'un point matériel, on suppose par la pensée que ce point se déplace d'une quantité infiniment petite, sans cesser d'être accompagné par les forces réelles, extérieures ou mutuelles, le mouvement idéal qui en résulte est appelé *mouvement virtuel.*

1616. Le travail de chacune des forces, résultant de ce mouvement, est appelé *travail virtuel de la force considérée.*

1617. *Lorsqu'un point matériel est en équilibre ou se meut uniformément suivant une droite, la somme des travaux virtuels des forces qui le sollicitent est égale à* 0.

En effet, ce point étant en équilibre ou ayant un mouvement uniforme rectiligne, la résultante des forces qui le sollicitent doit être égale à zéro ainsi que son travail virtuel (1614). Mais le travail de la résultante F est égal à la somme des travaux des composantes F′, F″... (1605); on a donc aussi, en accompagnant les forces qui sollicitent le point matériel de $\mathcal{T}_v$ pour désigner le *travail virtuel*,

$$\mathcal{T}_v F = \mathcal{T}_v F' + \mathcal{T}_v F'' + \ldots = 0.$$

Considérant un système de points matériels en équilibre ou possédant un mouvement uniforme rectiligne; M′, M″... étant les points matériels; F′, F″... les résultantes des forces extérieures qui sollicitent respectivement les points M′, M″...; f'_1, f'_2... les actions mutuelles qui sollicitent M′; f''_1, f''_2... celles qui sollicitent M″, et de même pour tous les autres points du système, on a successivement pour les divers points du système:

$$\mathcal{T}_v F' + \mathcal{T}_v f'_1 + \mathcal{T}_v f'_2 + \mathcal{T}_v f'_3 + \ldots = 0,$$
$$\mathcal{T}_v F'' + \mathcal{T}_v f''_1 + \mathcal{T}_v f''_2 + \mathcal{T}_v f''_3 + \ldots = 0,$$

et ainsi de suite.

Ajoutant toutes ces équations, on aura, en représentant par $\sum \mathcal{T}_v F$ la somme des travaux de toutes les forces extérieures, et par $\sum \mathcal{T}_v f$ la somme des travaux virtuels des actions mutuelles,

$$\sum \mathcal{T}_v F + \sum \mathcal{T}_v f = 0.$$

Ce qui fait voir que le système étant en équilibre ou ayant un mouvement uniforme de translation, la somme des travaux virtuels de toutes les forces tant extérieures qu'intérieures est égale à 0.

Toutes les fois que dans le mouvement virtuel les distances mutuelles des points du système restent constantes, ce qui, par exemple, a toujours

lieu pour tous les mouvements virtuels d'un système d'une solidité parfaite, les travaux virtuels de toutes les actions mutuelles sont nuls; par suite, $\Sigma \mathcal{T}_v f = 0$, et l'équation d'équilibre précédente devient

$$\Sigma \mathcal{T}_v F = 0.$$

Ainsi, dans tout mouvement virtuel compatible avec la solidité parfaite du système, la somme algébrique des travaux virtuels des forces extérieures est nulle lorsqu'il y a équilibre. C'est la même condition que pour un point matériel.

1618. *La réciproque n'est pas vraie pour des corps non d'une solidité parfaite*, c'est-à-dire susceptibles de changer de forme sous l'action des forces extérieures. Un corps élastique, par exemple, soumis à l'action de deux forces égales et contraires, n'est pas en équilibre quoique ces deux forces se fassent équilibre.

1619. *Cette réciproque est toujours vraie pour les corps parfaitement solides.*

En effet, si un tel corps supposé en repos ou en mouvement se mettait en mouvement ou modifiait celui qu'il possède, il acquerrait dans un temps très-court une puissance vive très-petite, mais réelle, ou la puissance vive qu'il possède serait augmentée ou diminuée, ce qui ne peut avoir lieu dans l'un et l'autre cas qu'autant que le travail des forces n'est pas nul (1614); or le travail des forces intérieures étant nul, puisque le système est solide, et celui des forces extérieures l'étant par hypothèse, il est donc impossible que le système, d'abord en repos, se soit déplacé, ou que, d'abord en mouvement, ce mouvement se soit modifié.

1620. De ce qui précède, il résulte le théorème fondamental suivant :

Pour qu'un corps solide soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme algébrique des travaux virtuels des forces extérieures soit nulle pour tous les mouvements compatibles avec la condition de solidité.

Lorsqu'il s'agit d'un corps ou système matériel susceptible de déformation, les mêmes conditions générales d'équilibre sont encore nécessaires, mais non suffisantes.

CONDITIONS D'ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME MATÉRIEL DÉDUITES DES MOUVEMENTS VIRTUELS.

1621. *Mouvements virtuels les plus simples d'un système matériel quelconque.* Pour un système matériel, on peut supposer une infinité de mouvements virtuels plus ou moins définis, parmi lesquels il y en a de deux espèces parfaitement déterminées; la première comprend les mouvements virtuels de la translation, c'est-à-dire ceux dans lesquels tous les points se déplacent parallèlement à une même direction; la deuxième comprend les mouvements virtuels de rotation, c'est-à-

dire ceux dans lesquels tous les points, restant à la même distance d'un axe, ont même vitesse angulaire autour de cet axe (1586).

1622. *Des trois équations d'équilibre d'un système déduites des mouvements virtuels de translation.*

Supposant que le mouvement virtuel de translation a lieu parallèlement à un axe quelconque Ox, chacun des points d'application des forces décrit un chemin infiniment petit, égal à e, parallèle à Ox, et qui se projette en véritable grandeur sur cet axe, soit e_x cette projection. Les projections des forces sur la direction des chemins e sont égales aux projections de ces forces sur l'axe Ox. F'_x, F''_x étant ces projections, les travaux virtuels de ces forces sont respectivement $e_xF'_x$, $e_xF''_x$ ... Ajoutant tous ces travaux partiels, on a le travail virtuel de toutes les forces, qui est

$$e_xF'_x + e_xF''_x + \dots \quad \text{ou} \quad e_x(F'_x + F''_x + \dots),$$

travail que l'on peut exprimer par

$$\Sigma e_xF_x \quad \text{ou} \quad e_x\Sigma F_x.$$

Cette somme algébrique devant être égale à 0 pour l'équilibre (1620), on doit avoir

$$e_x(F'_x + F''_x + \dots) = 0 \quad \text{ou} \quad e_x\Sigma F_x = 0;$$

d'où l'on conclut, e_x n'étant pas nul,

$$F'_x + F''_x + \dots = 0 \quad \text{ou} \quad \Sigma F_x = 0.$$

Équation qui fait voir que, *quand il y a équilibre, la somme algébrique des projections des forces sur un axe quelconque est nulle.*

Cette propriété des forces en équilibre ne dépend, comme le fait voir la formule précédente, que des intensités absolues des forces et des angles qu'elles font avec l'axe, et non des positions de leurs points d'application.

En transportant toutes les forces parallèlement à elles-mêmes en un même point d'application, la somme de leurs projections ne changera pas, et elle sera encore égale à 0. Ces forces, ainsi transportées, ont une résultante unique appelée résultante de translation, laquelle ayant même projection sur un axe quelconque que toutes les forces (1528, 1529), il en résulte que la condition

$$F'_x + F''_x + \dots = 0 \quad \text{ou} \quad \Sigma F_x = 0$$

signifie que *la projection sur un axe quelconque de la résultante de translation d'un système de forces en équilibre est égale à zéro.*

Lorsque cette condition est vérifiée pour trois axes Ox, Oy *et* Oz *qui se rencontrent sans être situés dans un même plan, elle est satisfaite pour un autre axe quelconque.*

En effet, ayant $\Sigma F_x = 0$, la projection sur Ox de la résultante de

translation est nulle, d'où il résulte que la résultante de translation est nulle ou perpendiculaire à Ox.

Si l'on a en même temps $\sum F_x = 0$ et $\sum F_y = 0$, les projections sur Ox et Oy de la résultante de translation sont nulles, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que la résultante est nulle ou perpendiculaire à la fois à Ox et Oy, c'est-à-dire au plan xOy.

Enfin, si l'on a à la fois $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ et $\sum F_z = 0$, les projections de la résultante de translation sur les trois axes sont nulles, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que cette résultante est nulle ou perpendiculaire à la fois aux trois axes; comme cette dernière condition est impossible, puisque les trois axes ne sont pas dans un même plan, il faut donc que cette résultante de translation soit nulle. Cette résultante étant nulle, sa projection sur un axe quelconque l'est aussi, et comme cette projection est égale à la somme des projections de toutes les forces sur le même axe, il en résulte bien que cette somme est aussi égale à 0.

Ainsi déjà les trois équations distinctes

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0 \quad \text{et} \quad \sum F_z = 0$$

étant satisfaites, on est sûr que le système ne prendra aucun mouvement de translation.

1623. Ces équations renferment comme cas particulier celles du n° 1504 relatives à un point matériel sollicité par un nombre quelconque de forces. Dans ce cas, le mouvement virtuel ne pouvant qu'être de translation, on est sûr que les équations précédentes étant satisfaites, il y a équilibre; c'est ce que nous avons établi au n° 1504 sans avoir recours aux mouvements virtuels.

1624. *Des trois équations d'équilibre d'un système déduites des mouvements virtuels de rotation.*

Dans le mouvement de rotation autour d'un axe, tous les points conservant la même position relative, ils ont même vitesse angulaire (1586). Supposant un mouvement virtuel de rotation, et désignant par a le *déplacement angulaire virtuel*, le travail virtuel de chacune des forces du système étant égal au déplacement a multiplié par le moment pris par rapport à l'axe (1606), pour une force F', dont le bras de levier est l', on a

$$\mathcal{T}_v = aP'l'.$$

Chacune des autres forces donnera une expression analogue, et en faisant la somme de toutes ces expressions on aura le travail virtuel total

$$\mathcal{T}_v = a(P'l' + P''l'' + \ldots) = a\sum Pl,$$

ou (1606)

$$\mathcal{T}_v = a\sum M_0 F.$$

Ce travail total devant être nul pour qu'il y ait équilibre (1620), on

doit avoir

$$a\Sigma M_0 F = 0;$$

d'où, a n'étant pas nul,

$$\Sigma M_0 F = 0.$$

Ce qui fait voir que *dans le cas d'équilibre la somme algébrique des moments des forces extérieures par rapport à un axe quelconque est égale à* 0. C'est ce qui a été établi au n° 1551 sans le secours des mouvements virtuels.

Considérant trois axes Ox, Oy et Oz, se rencontrant sans être dans un même plan, on aura pour ces axes respectifs :

$$\Sigma M_{0x}F = 0, \quad \Sigma M_{0y}F = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma M_{0z}F = 0.$$

Les moments dépendant des distances des forces à l'axe, ces équations sont distinctes de celles du n° 1622, qui ne dépendent nullement de ces distances. De plus, elles sont distinctes entre elles; car si, par exemple, toutes les forces étaient situées dans le plan xOy, les deux premières équations seraient satisfaites, puisque toutes les forces étant ou parallèles aux axes Ox, Oy, ou les rencontrant, leurs moments seraient nuls, et cependant l'équation $\Sigma M_{0z}F = 0$ pourrait ne pas être satisfaite.

1625. *Prouvons maintenant que toutes les conditions d'équilibre d'un système solide quelconque se réduisent aux six équations distinctes des* n°s 1622 et 1624.

Soient F′, F″, F‴... les forces qui sollicitent le système, et soient S et T les équivalents de ce système (1527). Considérant trois axes Ox, Oy et Oz non situés dans le même plan :

1° Les forces F′, F″, F‴... satisfaisant aux conditions

$$\Sigma F_x = 0, \quad \Sigma F_y = 0, \quad \Sigma F_z = 0,$$

leur résultante de translation est nulle (1622); la résultante de translation des équivalents S et T est aussi nulle; ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que les deux forces S et T sont égales, parallèles et de sens contraires, c'est-à-dire forment un couple (1521). *Ainsi les sommes des projections des forces sur chacun des trois axes non situés dans un même plan étant nulles, les forces peuvent se réduire à un couple équivalent.*

2° Les forces F′, F″ ... satisfaisant à l'équation

$$\Sigma M_{0x}F = 0, \qquad (1624)$$

la somme des moments des forces équivalentes S et T sera aussi égale à 0. L'équivalente S passant par l'origine des axes, son moment est nul; le moment de l'équivalente T doit donc aussi être nul; ce qui ne peut avoir lieu qu'autant qu'elle est dans un même plan avec l'axe Ox.

L'équation

$$\Sigma M_{0y}F = 0$$

étant satisfaite, il en résulte, comme dans le cas précédent, que l'équivalente T est encore située dans un même plan avec l'axe Oy; les deux équations précédentes étant réalisées, il en résulte donc que T est dans le plan xOy, ou bien elle passe par le point O.

Enfin l'équation

$$\Sigma M_{Oz}F = 0$$

étant satisfaite en même temps que les précédentes, la force T doit être dans un même plan avec chacun des axes; ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que la force T passe par le point O. Comme déjà S passe par ce point, ces deux forces se réduisent à une force unique. *Ainsi lorsque les sommes des moments des forces par rapport à trois axes sont séparément nulles, ces forces peuvent se réduire à une résultante unique passant par l'origine commune des axes.*

Les forces satisfaisant à la fois aux six conditions

$$\Sigma F_x = 0, \qquad \Sigma F_y = 0, \qquad \Sigma F_z = 0,$$
$$\Sigma M_{Ox}F = 0, \qquad \Sigma M_{Oy}F = 0, \qquad \Sigma M_{Oz}F = 0,$$

il résulte du 1° que les deux équivalentes S et T peuvent être égales et de sens contraires, et du 2°, qu'elles passent par le même point O, et que par conséquent elles se réduisent à 0.

Ainsi, ces six équations étant satisfaites, la résultante de toutes les forces est nulle; son travail est donc nul, et par suite aussi celui de toutes les forces. *On peut donc affirmer alors que, dans tous les mouvements virtuels compatibles avec la solidité du système, le travail des forces* F *est nul, et que par conséquent le système matériel, s'il est solide, ne peut prendre aucun mouvement;* il est par conséquent en équilibre sous l'action des forces qui le sollicitent.

FROTTEMENT. PLAN INCLINÉ.

1626. La surface d'un corps n'étant jamais parfaitement unie, quel que soit son poli, il en résulte que quand on met deux surfaces en contact, elles se pénètrent toujours plus ou moins. Cet enchevêtrement n'est pas seulement dû à l'imperfection du poli des pièces, mais aussi à ce que les surfaces en contact se pressant mutuellement, il y a une déformation d'autant plus grande que les corps sont moins durs et que la pression de l'un sur l'autre est plus considérable.

De l'enchevètrement des molécules de deux surfaces en contact, il résulte que si l'on imprime un mouvement à l'un des corps, mais de manière à le laisser toujours en contact avec la surface de l'autre corps, il naît une résistance qui n'est autre chose qu'une action mutuelle (1509, 1614), qui s'oppose directement au mouvement et qui agit par conséquent dans le plan tangent aux deux surfaces de contact. Si, par exemple, l'une des surfaces frottantes est plane, la résistance agit dans ce plan et directement en sens contraire du mouvement.



Cette résistance, qui naît du mouvement des corps en contact, prend le nom de *frottement.*

1627. Si la même partie de la surface d'au moins un des corps reste toujours en contact, c'est-à-dire s'il y a glissement d'un ou de chacun des corps sur l'autre, le frottement prend le nom de *frottement de glissement.*

Si, au contraire, les parties des surfaces en contact varient à chaque instant, comme dans le mouvement d'une bille sur un tapis de billard, ou d'une roue de voiture sur une route, le frottement prend le nom de *frottement de roulement.*

1628. L'expérience prouve que le frottement est proportionnel à la pression normale que les surfaces exercent l'une sur l'autre, qu'il varie selon la nature et l'état des surfaces en contact, et qu'il est indépendant de la vitesse et de l'étendue de ces surfaces.

Des expériences récentes, faites par M. Jules Poirée sur le chemin de fer de Lyon, ont fait voir que pour des vitesses supérieures à 4 ou 5 mètres par seconde, le frottement diminue à mesure que la vitesse augmente. Dans ces expériences, on a serré les freins d'un wagon de manière à empêcher les roues de tourner, et on l'a fait mouvoir sur les rails comme un traîneau; la vitesse a été portée jusqu'à 22 mètres par seconde, et, à l'aide d'un dynamomètre (1444), on a constaté que le frottement de glissement des roues sur les rails diminuait à mesure que la vitesse devenait plus grande.

Il convient de remarquer que dans les cas habituels de la pratique, dans les machines par exemple, la vitesse est loin d'atteindre 4 mètres par seconde, et que l'on peut admettre que le frottement est indépendant de la vitesse.

En lubrifiant les surfaces en contact avec des corps onctueux, tels que l'huile, la graisse, le savon... on diminue considérablement le frottement, et d'autant plus que l'enduit est renouvelé avec plus de continuité. L'eau pure est un mauvais enduit, surtout pour les métaux; souvent même elle augmente le frottement.

Nous venons de dire que le frottement est proportionnel à la pression des surfaces entre elles; mais cela n'a lieu que jusqu'à une certaine limite; au delà, les surfaces grippent, c'est-à-dire s'entament en s'échauffant, et le frottement devient considérable sans varier suivant aucune loi. Les corps onctueux, tout en diminuant le frottement, reculent considérablement la limite à laquelle les surfaces commencent à gripper.

D'après des expériences de Wood, la pression des essieux de wagons dans leurs boîtes ne doit pas dépasser $6^k,33$ par centimètre carré de surface de contact; au-dessus de cette limite, la graisse qui lubrifie les surfaces est écrasée et chassée; alors les corps frottant à sec s'entament, et le frottement devient considérable. Aujourd'hui, que le graissage se fait avec soin et régulièrement, la pression peut atteindre 25 et jusqu'à 30 kilogr. par centimètre carré.

L'expérience prouve aussi que quand deux surfaces ont été en contact

et en repos relatif pendant un certain temps, le frottement de glissement est plus considérable au premier instant du mouvement que quand le mouvement a lieu. Cela est d'autant plus sensible que la pression est plus grande et que les corps sont plus compressibles; ces deux circonstances tendant à faire pénétrer les surfaces et à chasser l'enduit. (Voir partie pratique de notre *Aide-mémoire.*)

1629. Le rapport entre le frottement F, c'est-à-dire la résistance qui s'oppose directement au mouvement, et la pression P qui s'exerce normalement entre les deux surfaces de contact, est ce qu'on appelle *le coefficient de frottement;* ainsi, désignant ce coefficient par f, on a

$$f = \frac{F}{P}, \quad \text{d'où} \quad F = fP \quad \text{et} \quad P = \frac{F}{f}.$$

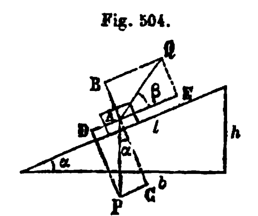
On a formé, d'après l'expérience, un tableau des valeurs de f pour les corps généralement employés dans les machines et constructions, et placés dans les circonstances de ces emplois. Dans ce tableau, donné au complet dans la partie pratique de notre *Aide-mémoire*, on trouve que pour le chêne, l'orme, le poirier sauvage, la fonte, le fer, l'acier et le bronze, glissant l'un sur l'autre, ou sur eux-mêmes, on a $f = 0,07$ à $0,08$ quand les surfaces frottantes sont lubrifiées à la manière ordinaire de suif, d'huile, de saindoux ou de cambouis mou.

La formule précédente fait voir que pour obtenir le frottement F dû à une pression P entre les deux surfaces, il suffit de multiplier P par la valeur de f donnée au tableau pour les corps frottants placés dans les circonstances où ils se trouvent. Ainsi pour $P = 500$ kilogr. et $f = 0,08$, on a $F = fP = 0,08 \times 500 = 40$ kilogr.

1630. *Équilibre du plan incliné en tenant compte du frottement* (1559).

1° *Supposons d'abord que le corps n'est sollicité que par la pesanteur.* Il est évident que dans ce cas le mouvement aura lieu suivant la ligne de plus grande pente du plan.

Fig. 504.



Suivant cette ligne, le corps est soumis à deux forces, dont l'une, $P \sin \alpha$, est la force mouvante, et dont l'autre, qui est le frottement, est la force résistante (1559). Ce frottement étant dû à la pression $P \cos \alpha$ normale au plan incliné, il est, en désignant par f le coefficient de frottement qui convient aux surfaces frottantes (1629),

$$fP \cos \alpha.$$

Le frottement étant toujours une force qui s'oppose au mouvement, on voit que si le mobile se meut, ce sera en vertu de la résultante

$$P \sin \alpha - fP \cos \alpha.$$

Pour $\alpha = 0$, on a $\sin \alpha = 0$ et $\cos \alpha = 1$ (1094); mais comme à mesure que α augmente, $\sin \alpha$ augmente et $\cos \alpha$ diminue, l'on conçoit que les

valeurs de P et f étant constantes, il y a une valeur de α pour laquelle

$$P \sin \alpha = fP \cos \alpha,$$

d'où (1107)

$$f = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tang} \alpha. \qquad (1)$$

L'angle qui satisfait à cette équation prend le nom d'*angle de glissement*.

De l'expression (1) résulte un moyen de déterminer les valeurs du coefficient de frottement des corps. Il suffit d'incliner le plan jusqu'à ce que le mouvement commence; de déterminer l'angle α, et tang α est la valeur de f.

Ainsi l'on voit que pour l'angle de glissement il y a égalité entre la composante mouvante $P \sin \alpha$ et le frottement $fP \cos \alpha$; le corps est en équilibre instable, c'est-à-dire que le plus petit effort le mettrait en mouvement.

Sitôt que l'angle α dépasse la valeur de glissement, la force mouvante $P \sin \alpha$ devient supérieure au frottement, et il y a mouvement.

Si au contraire α est inférieur à la valeur de glissement, la composante $P \sin \alpha$ est inférieure au frottement $fP \cos \alpha$, et comme le frottement n'est jamais force mouvante, il en résulte que le corps est en équilibre stable.

L'équation précédente (1) fait voir que le coefficient de frottement est égal à la tangente de l'angle de glissement des corps frottants. Pour $\alpha = 11°$, par exemple, on a (1238)

$$f = \operatorname{tang} 11° = 0{,}194.$$

Supposant le frottement nul, on arriverait aux relations du n° 1559.

2° *Le corps peut être sollicité, en outre de la pesanteur, par différentes forces.* Dans ce cas, pour qu'il suive la ligne de plus grande pente du plan, il faut que la résultante des autres forces soit dans le plan vertical passant suivant cette ligne.

Soient Q la résultante des forces qui sollicitent un corps dont le poids est P (*fig.* 504), β l'angle que la force Q fait avec la ligne de plus grande pente, et α l'inclinaison du plan.

Chacune des forces P et Q se décompose en deux, l'une parallèle au plan incliné, et l'autre normale à ce plan.

La résultante des deux composantes parallèles au plan est la force mouvante. Dans le cas de la *fig.* 504, cette résultante est, en remarquant que les composantes agissent en sens contraires,

$$P \sin \alpha - Q \cos \beta.$$

La résultante des composantes normales au plan est la pression entre les surfaces frottantes; c'est la force qui donne naissance au frottement. Cette résultante est, puisque dans le cas de la figure 504 les composantes agissent en sens contraires,

$$P \cos \alpha - Q \sin \beta; \qquad (2)$$

valeur qui devra toujours être positive pour que le corps se meuve sur le plan avec frottement. Si elle est égale à 0, le corps se meut parallèlement au plan, mais sans frottement; si elle est négative, le corps s'écarte du plan.

L'expression précédente étant la pression normale aux surfaces frottantes, le frottement est (1629)

$$f(P \cos \alpha - Q \sin \beta).$$

Le frottement agissant toujours en sens contraire du mouvement, il en résulte que si l'on a $P \sin \alpha > Q \cos \beta$, c'est-à-dire si l'expression (1) est positive, le corps, s'il se meut, ne pourra que descendre le plan incliné, et il se mouvra comme si, étant tout à fait libre, il n'était sollicité que par la résultante unique

$$P \sin \alpha - Q \cos \beta - f(P \cos \alpha - Q \sin \beta).$$

Comme dans le cas (1°), le corps se mouvra, ou sera en équilibre instable, ou en équilibre stable, quand cette résultante sera respectivement positive, nulle ou négative.

Quand, au contraire, on a $P \sin \alpha < Q \cos \beta$, c'est-à-dire quand l'expression (1) est négative, s'il y a mouvement, le corps remontera le plan et se mouvra comme s'il n'était sollicité que par la force unique

$$Q \cos \beta - P \sin \alpha - f(P \cos \alpha - Q \sin \beta).$$

Comme dans le cas précédent, le corps se mouvra, mais en remontant le plan, ou sera en équilibre instable, ou en équilibre stable, selon que cette résultante sera positive, nulle ou négative.

Quelle que soit la direction de la force Q autour du point A, c'est-à-dire la valeur de β, on déterminera les conditions de mouvement ou d'équilibre comme nous venons de le faire. Tant que Q agit à droite de BC, l'expression (1) reste la même; mais si Q agissait à gauche de BC, sa composante $Q \cos \beta$ s'ajouterait à $P \sin \alpha$, et l'expression (1) serait

$$P \sin \alpha + Q \cos \beta,$$

β étant toujours le plus petit des angles que fait la force Q avec le plan.

Tant que Q agit au-dessus du plan, l'expression (2) reste la même; mais quand cette force agit en dessous, $Q \sin \beta$ s'ajoute à $P \cos \alpha$, et l'expression (2) devient

$$P \cos \alpha + Q \sin \beta.$$

1631. *Mouvement d'un corps qui glisse sur un plan incliné.*

D'après ce que nous venons de voir, toutes les forces constantes qui sollicitent le mobile pouvant être ramenées à une force constante unique agissant suivant la ligne de plus grande pente, le mobile se mouvra suivant cette ligne, et avec un mouvement uniformément accéléré (1449).

En divisant la force unique F qui le sollicite par la masse $M = \frac{P}{g}$ du



mobile, on aura l'accélération de vitesse J (1449, 1461); ayant J, la vitesse v acquise par le mobile après le temps t est Jt; l'espace E, parcouru après ce temps, est $\frac{1}{2}Jt^2$ (1437).

Pour $F = 20^k$, $P = 100^k$ et $t = 10''$, on a:

$$M = \frac{P}{g} = \frac{100}{9,81} = 100 \times 0,102 = 10,2,$$
$$J = \frac{F}{M} = \frac{20}{10,2} = 1^m,96,$$
$$v = Jt = 1,96 \times 10 = 19^m,6,$$
$$E = \frac{1}{2}Jt^2 = \frac{1,96 \times 100}{2} = 98^m.$$

Nous conseillons aux lecteurs de faire quelques applications analogues, qui sont très-propres à leur faire bien comprendre les principes fondamentaux de la mécanique.

1632. Examinons le cas particulier où l'on suppose que le mobile n'est sollicité que par son propre poids et glisse sans frottement.

Dans ce cas, la force unique qui produit le mouvement est la composante $P \sin \alpha$ du poids, parallèle au plan; l'accélération de vitesse du mobile est alors (1630, 1631)

$$J = \frac{P \sin \alpha}{M} = \frac{P \sin \alpha}{\frac{P}{g}} = g \sin \alpha.$$

La vitesse acquise après le temps t est

$$v = g \sin \alpha t. \qquad (1)$$

Après le temps t l'espace parcouru est

$$E = \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2. \qquad (2)$$

Si E est la longueur totale l du plan, et que t soit le temps que le mobile met à descendre du sommet du plan à son pied, on a

$$l = \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2, \quad \text{d'où} \quad t = \sqrt{\frac{2l}{g \sin \alpha}}. \qquad (3)$$

Substituant cette valeur de t dans celle de v, il vient

$$v = g \sin \alpha \sqrt{\frac{2l}{g \sin \alpha}} = \sqrt{2gl \sin \alpha}.$$

Remarquant que $l \sin \alpha$ est égal à la hauteur h du plan (1122), on a

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Ainsi la vitesse que possède le mobile, quand il arrive au pied du

plan incliné, est égale à celle qu'il aurait acquise en tombant verticalement de la hauteur h sous l'action unique de la pesanteur (1446).

Ce qui vient d'être dit pour la longueur totale l du plan incliné est applicable à une partie quelconque l' de cette longueur. Ainsi, quand le mobile a parcouru l', on a

$$v' = \sqrt{2gh'};$$

c'est-à-dire que le mobile ayant parcouru un espace quelconque suivant le plan incliné, il possède une vitesse v' égale à celle qu'il acquerrait en tombant librement de la hauteur verticale h' dont il est descendu.

La valeur de v étant indépendante de l, on voit que des mobiles partant sans vitesse initiale d'un même point acquièrent tous la même vitesse en arrivant à un même plan horizontal, quelles que soient les inclinaisons des plans suivis par les mobiles. Si la vitesse acquise est indépendante de l'inclinaison et par suite de la longueur du plan, il n'en est pas de même du temps que mettent les mobiles pour arriver au plan horizontal; c'est ce que fait voir la formule (3).

Si le mobile avait possédé une vitesse initiale v_0, on en aurait tenu compte dans les formules (1) et (2), comme aux formules générales des n°s 1436, 1437, et l'on aurait ensuite conclu, des nouvelles formules (1) et (2), la vitesse après un parcours quelconque l', comme ci-dessus.

Remarque. La durée de la descente sur un plan étant

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2l^2}{gl \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2}{g} \times \frac{l^2}{h}},$$

Fig. 505.

on voit que cette durée est la même pour les divers plans inclinés donnant pour $\frac{l^2}{h}$ une quantité constante; ce qui a lieu pour tous les plans dont les longueurs l sont en grandeurs et inclinaisons les cordes AB, AC.... A'B, A'B'... d'une sphère ou d'un cercle, aboutissant toutes aux extrémités d'un même diamètre vertical AA'.

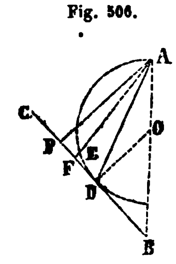
En effet, si d'un point quelconque B de la circonférence d'un cercle on abaisse une perpendiculaire BK sur un diamètre AA' = D, on a (676)

$$h : l = l : \text{D}, \quad \text{d'où} \quad \frac{l^2}{h} = \text{D} = \textit{constante};$$

ce qu'il fallait démontrer.

1633. *Étant donné un plan* BC, *déterminer le plan incliné sur lequel devra se mouvoir le mobile partant de* A *sans vitesse initiale, pour qu'il arrive au plan* BC *dans le temps le plus court possible.*

Fig. 506.



Il suffit de déterminer la ligne de plus grande pente du plan cherché. Pour cela, menant la verticale AB et la perpendiculaire AP au plan BC, la bissectrice AD de l'angle BAP est la ligne de plus grande pente cherchée. En effet, menons DO parallèle à PA, c'est-à-dire perpendiculaire à BC; du point O comme centre, avec OD pour rayon, décrivons une demi-circonférence; elle passera par le point A; car les angles ADO et DAO étant égaux chacun à DAP d'après les constructions, le triangle ADO est isocèle, et l'on a OA = OD.

Cela établi, toutes les cordes menées par A dans le cercle seraient parcourues par le mobile dans le même temps que AD (1632); mais comme le plan BC est tangent en D, tous ses points, autres que D, sont extérieurs au cercle, et par suite le mobile ne peut les atteindre que dans des temps plus longs que celui employé à parcourir AD.

FORCES CENTRIPÈTE ET CENTRIFUGE. PENDULES.

1634. Lorsqu'un mobile suit une circonférence ou seulement un arc de cercle, c'est qu'il est sollicité par une force indépendante de celles qui lui ont imprimé son mouvement actuel, et qui peut être la résultante de plusieurs autres. En effet, de l'action des forces primitives, il résulterait que le mobile se mouvrait en ligne droite, suivant la direction de la vitesse acquise, et d'un mouvement uniforme.

Ce qui suit s'applique au cas où le corps part du repos, comme à celui où il possède une vitesse rectiligne initiale.

1635. La résultante R des forces qui sollicitent actuellement le mobile se trouve évidemment dans le plan de la circonférence qu'il décrit. On peut alors la décomposer en deux : l'une, T, tangentielle à la circonférence, et qui modifie la vitesse du mobile; elle l'augmente ou la diminue selon qu'elle agit dans le même sens que la vitesse initiale ou en sens contraire; l'autre, C, agissant suivant le rayon de la circonférence décrite, et destinée à modifier, à infléchir à chaque instant le mouvement, de manière à le rendre circulaire, de rectiligne qu'il eût été sous l'influence de la vitesse initiale et de la composante tangentielle T.

La direction de la composante C lui fait donner le nom de *force centripète*, et son effet l'a fait appeler aussi *force infléchissante*.

1636. *Détermination de la force centripète* C *en fonction de la masse* m *du mobile, de sa vitesse* v *à l'instant considéré, et du rayon* r *de la circonférence qu'il décrit.*

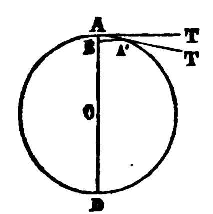
D'abord, si pendant l'instant infiniment petit θ la vitesse v varie de

la quantité infiniment petite dv, cette variation est due à la composante tangentielle T, qui a la même direction, et l'on a (1435, 1461)

$$T = m\frac{dv}{\theta}.$$

Revenons à la force centripète C. Soit A la position du mobile à l'instant considéré, et $AA' = s$ l'espace infiniment petit qu'il parcourt pendant le temps infiniment petit θ. La projection du mobile sur le rayon AO décrit l'espace infiniment petit $AB = s_1$ dans le même temps θ, et la figure fait voir que la vitesse initiale de la projection est nulle, puisque le premier élément de AA' étant perpendiculaire à OA, sa projection sur cette droite est un point.

Fig. 507.



Au point A la vitesse initiale tangentielle et la composante tangentielle T sont perpendiculaires à OA; en ce même point la force centripète C agit suivant AO; or le chemin AA' étant infiniment petit, on peut supposer que pendant tout son parcours la vitesse initiale, la force T et la force C conservent par rapport à AO les mêmes directions; d'où il résulte que l'espace AB est parcouru uniquement sous l'influence de la force constante C, qui agit seule suivant AB (1487). Le mouvement suivant AB peut alors être supposé uniformément accéléré, et l'on a (1437, 1461)

$$s_1 = \frac{1}{2}\frac{C}{m}\theta^2. \tag{1}$$

Cette formule n'est rigoureusement vraie qu'autant que θ et par suite s et s_1 sont infiniment petits; car autrement la force tangentielle T ne serait pas constamment perpendiculaire à AO, de même que la force C n'agirait pas constamment suivant AO, ni parallèlement à AO.

Puisque dans la formule précédente il entre des quantités infiniment petites, il faut les faire disparaître, afin qu'elle donne la valeur de C d'une manière évaluable.

On peut supposer que la vitesse moyenne $\frac{s}{\theta}$ pendant le parcours de l'espace infiniment petit s est égale à v; ainsi

$$v = \frac{s}{\theta} \quad \text{ou} \quad v^2 = \frac{s^2}{\theta^2}. \tag{2}$$

L'arc s étant infiniment petit, il se confond avec sa corde, et l'on a (676), en faisant $AD = 2r$,

$$s_1 : s = s : 2r, \qquad \text{d'où} \qquad s^2 = 2rs_1. \tag{3}$$

On pourrait éliminer les quantités s, s_1 et θ entre les équations (1), (2) et (3), mais elles disparaissent en multipliant membre à membre

ces trois équations; ce qui donne, en supprimant les facteurs communs,

$$1 = \frac{Cr}{mv^2}, \quad \text{d'où} \quad C = \frac{mv^2}{r}.$$

Ainsi, à un instant quelconque, la force centripète est égale au double de la puissance vive que possède le mobile à cet instant, divisé par le rayon (1473).

Remarque. Lorsque la force tangentielle T est nulle, la vitesse v reste constante, et par suite aussi la force centripète; et *réciproquement.*

1637. Supposant, comme cela a souvent lieu dans la pratique, que la force centripète agit sur le mobile par l'intermédiaire d'un fil dont une extrémité est retenue au centre de la circonférence décrite, en vertu du principe de la réaction égale et contraire à l'action (1508), le mobile exerce sur le point fixe une réaction égale à $\frac{mv^2}{r}$, directement opposée à la force centripète, et que l'on nomme *force centrifuge.*

En supprimant la force centripète, ce qui peut se faire en coupant le fil ou en le rendant libre, la force centrifuge est supprimée aussi, et le mobile n'étant plus soumis qu'à la vitesse initiale, et à la force tangentielle si elle n'est pas nulle, il s'éloigne en suivant la tangente à la circonférence. Cet effet est mis parfaitement en évidence par la fronde; le projectile rendu libre s'échappe suivant la tangente à la circonférence qu'il décrivait. De même, les détritus de boue qui se détachent d'une roue de voiture douée d'un mouvement rapide suivent la tangente à la roue.

1638. Appelant p le poids du mobile, on a $m = \frac{p}{g}$; par suite les forces centripète et centrifuge ont pour expression (1636)

$$C = \frac{pv^2}{gr},$$

d'où

$$C : p = \frac{v^2}{2g} : \frac{r}{2}.$$

h étant la hauteur due à la vitesse v, on a (1446)

$$h = \frac{v^2}{2g}, \text{ et, par suite, } C = \frac{2ph}{r}.$$

La proportion précédente fait voir que *les forces centripète et centrifuge sont chacune au poids du mobile comme la hauteur due à la vitesse du mobile est à la moitié du rayon de la circonférence qu'il décrit.*

1639. *Autres expressions de la valeur des forces centripète et centrifuge :*

1° Le mouvement étant uniforme, et t étant la durée d'une révolution entière du mobile, on a

$$v = \frac{2\pi r}{t}, \text{ et, par suite, } C = m\frac{4\pi^2 r}{t^2};$$

2° ω étant la vitesse angulaire du mobile (1587), on a aussi

$$v = \omega r, \text{ et, par suite, } C = m\omega^2 r.$$

1640. *Forces centripète et centrifuge quand le mobile, au lieu de suivre une circonférence ou un arc de cercle, décrit une courbe quelconque.*

Considérant un arc infiniment petit AA′ de la courbe décrite (*fig.* 507), on peut supposer qu'il est tout entier situé dans un même plan, et qu'il est un arc de cercle ayant pour rayon le rayon de courbure r de la courbe à l'élément AA′ (1275).

Ayant la masse m du mobile, le rayon de courbure r de la courbe au point considéré AA′ et la vitesse v, les forces centripète et centrifuge en ce point sont encore (1636)

$$C = \frac{mv^2}{r}.$$

Ainsi, en donnant à r cette dernière signification, les expressions des forces centripète et centrifuge s'appliquent à une trajectoire quelconque.

1641. *Applications :*

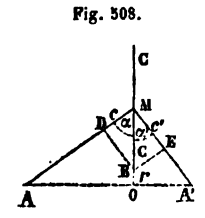
1° Un mobile, qui est attaché à l'une des extrémités d'un fil dont l'autre est fixe, est mis en mouvement par une cause quelconque qui tout à coup cesse son effet; on demande ce que devient alors la tension du fil, en négligeant la masse de ce fil, l'action de la pesanteur sur tout le système et la résistance de l'air?

Le mobile n'étant plus soumis qu'à la vitesse acquise et à la force centripète, qui est alors la tension du fil, il prend, normalement à ce fil, un mouvement uniforme, et si v est la vitesse acquise, on a, m étant la masse du mobile et r la longueur du fil,

$$C = \frac{mv^2}{r}.$$

2° Le mobile M, au lieu de n'être fixé qu'à un fil, est retenu par deux, MA et MA′; on demande quelles sont les tensions des deux fils, en négligeant la masse de ces fils, l'action de la pesanteur et la résistance de l'air, quand les forces motrices ont cessé leur action, c'est-à-dire quand le mouvement est devenu uniforme?

Fig. 508.



La circonférence décrite par M a pour rayon MO $= r$ et son plan est perpendiculaire à AA′. La force centripète a pour intensité (1636)

$$C = \frac{mv^2}{r}.$$

De plus, elle agit suivant MO, et comme elle est la résultante des tensions des fils, si on la représente par MB, ses composantes MD $= c$ et ME $= c'$ suivant les directions des fils MA et MA′ sont respectivement

les tensions de ces fils, et l'on a (1499)

$$\frac{C}{\sin(\alpha+\alpha')} = \frac{c}{\sin\alpha'} = \frac{c'}{\sin\alpha};$$

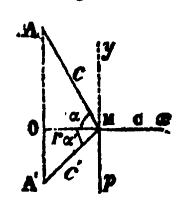
d'où

$$c = C\frac{\sin\alpha'}{\sin(\alpha+\alpha')}, \quad \text{et} \quad c' = C\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\alpha')}.$$

La force centrifuge étant encore égale et contraire à la force centripète, il résulte du mouvement considéré que les tensions des fils et par suite les tractions exercées par eux sur les points fixes A et A' sont les mêmes que si le mobile était en repos, et que le point M, appartenant aux deux fils, fût sollicité par une force égale à la force centrifuge.

3° Supposons que le mobile M au lieu de se mouvoir dans un plan vertical tourne dans un plan horizontal perpendiculaire à la droite AA', et qu'il s'agisse de trouver la tension de chacun des fils MA et MA', en négligeant toujours la masse de ces fils, mais en tenant compte du poids p du mobile M.

Fig. 509.



Conservant les mêmes notations que dans le cas précédent, on a toujours

$$C = \frac{mv^2}{r} = \frac{pv^2}{gr}.$$

L'axe My étant perpendiculaire à la vitesse initiale et au déplacement, la somme des projections des forces c, c' et p sur cet axe est nulle (1611), et l'on a

$$c\sin\alpha - c'\sin\alpha' - p = 0.$$

De plus, les tensions c et c', et le poids p ayant la force centripète pour résultante, considérant Ox comme axe, la somme des projections de ces forces est égale à la projection de la résultante, et l'on a

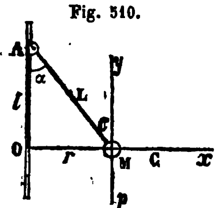
$$c\cos\alpha + c'\cos\alpha' = \frac{pv^2}{gr}.$$

Ces deux équations du premier degré entre les deux tensions c et c' donnent les valeurs de ces inconnues (480).

Dans le cas particulier où l'on arriverait à une valeur négative pour c', il faudrait remplacer le fil flexible A'M par une tige rigide, qui alors supporterait une pression égale à la valeur négative trouvée.

1642. *Pendule conique.* Supposons que le fil inférieur MA' soit supprimé, et que le mobile M tourne comme dans le cas précédent.

Fig. 510.



Quand le mouvement de M sera devenu uniforme, la force centrifuge fera équilibre à la tension c et au poids p; la somme des projections de la tension c et du poids p sur l'axe My sera nulle (1611), et l'on aura, en désignant par α l'angle OAM,

$$p - c\cos\alpha = 0, \quad \text{d'où} \quad c = \frac{p}{\cos\alpha}.$$

Ce problème se trouve réalisé par le pendule conique, dans lequel le fil AM est une tige rigide articulée à un manchon A, de manière à pouvoir tourner dans le sens vertical et à être entraîné, ainsi que le mobile M, par le manchon dans son mouvement de rotation horizontal.

Ce qu'il y a surtout d'important à déterminer dans le pendule conique, qui est destiné à régler le mouvement des machines d'après sa vitesse, c'est la relation qui existe entre la vitesse angulaire de M (1586) et l'angle α.

Or la tension $c = \frac{p}{\cos\alpha}$ et le poids p ayant la force centripète $C = \frac{p}{g}\omega^2 r$ (1639) pour résultante, considérant Ox comme axe, la somme des projections de ces forces étant égale à la projection de la résultante (1502), on a

$$\frac{p}{\cos\alpha}\sin\alpha + 0 = \frac{p}{g}\omega^2 r, \quad \text{d'où} \quad \omega^2 = \frac{g\sin\alpha}{r\cos\alpha}. \qquad (1)$$

Faisant $AM = L$, longueur du pendule, on a

$$r = L\sin\alpha.$$

Remplaçant r par cette valeur dans la formule (1), il vient

$$\omega^2 = \frac{g}{L\cos\alpha} \quad \text{ou} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L\cos\alpha}}.$$

Pour avoir la durée T d'une révolution entière du pendule, il suffit de remarquer que ω étant la vitesse angulaire, la vitesse du point M est ωr, et que par suite on a

$$T = \frac{2\pi r}{\omega r} = \frac{2\pi}{\omega},$$

ou, en remplaçant ω par sa valeur,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\alpha}{g}} = 2{,}006\sqrt{L\cos\alpha}.$$

Quand la vitesse du manchon change, la rigidité de la tige AM fait que la vitesse du mobile M ainsi que ω varient de la même manière.

Comme dans la valeur $\sqrt{\frac{g}{L\cos\alpha}}$ de ω il n'entre de variable que $\cos\alpha$, cette quantité étant en dénominateur, quand ω augmente, $\cos\alpha$ doit diminuer et par suite α augmenter. Le contraire arrive quand ω diminue.

On conçoit que l'on peut utiliser cette oscillation de la tige AM quand la vitesse varie, pour faire mouvoir l'organe qui introduit la vapeur

dans le cylindre d'une machine à vapeur, ou l'eau sur une roue hydraulique, et par suite régler l'arrivée de ces matières motrices, de manière à obtenir une vitesse que l'on peut considérer comme constante dans la pratique.

Appelant l la hauteur $AO = L\cos\alpha$ du pendule, on a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

1643. *Une surface de révolution possède un mouvement uniforme de rotation autour de son axe vertical; on pose en un point quelconque de cette surface une petite sphère pesante* M, *à laquelle on imprime le même mouvement de rotation; quelle doit être la méridienne* IMK *de la surface pour que la petite sphère reste en repos relatif?*

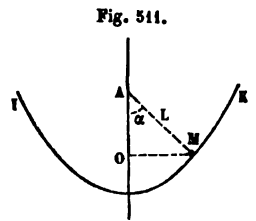


Fig. 511.

La réaction normale de la surface ne faisant que remplacer la tension de la tige du pendule conique (1642), on doit avoir pour l'équilibre

$$\omega^2 = \frac{g}{L\cos\alpha}.$$

La valeur de ω^2 étant constante pour toutes les positions de la sphère M, $L\cos\alpha$, c'est-à-dire la sous-normale de la méridienne IK doit être constante; ce qui indique (1253) que cette méridienne est une parabole dont le demi-paramètre est $p = L\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2}$, et l'équation,

$$y^2 = \frac{2g}{\omega^2}x.$$

La surface d'un liquide contenu dans un vase auquel on imprime un mouvement de rotation autour d'un axe vertical, affecte la forme de la surface de révolution précédente.

1644. *Le mobile, au lieu de tourner dans un plan horizontal comme dans le pendule conique* (1642), *décrit dans un plan vertical des révolutions dont le rayon est la longueur du fil* OM; *on suppose que le mobile, qui a reçu une impulsion tangentielle initiale, est soumis aux actions de la pesanteur, de la force centrifuge et de la tension du fil, et il s'agit, toujours en négligeant l'influence du fil et la résistance de l'air, de déterminer : 1° la vitesse* v *du mobile quand il occupe une position quelconque* M; *2° la tension* c *du fil pour cette même position, sachant qu'au point culminant* M_0 *sa vitesse, que l'on peut considérer comme vitesse initiale, était* v_0.

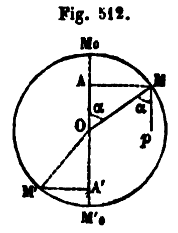


Fig. 512.

1° Le gain de puissance vive $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$ du mobile pendant le

parcours de M_0M est égal à la somme des quantités de travail produites par les forces qui sollicitent le mobile pendant ce même parcours (1614). Ces forces étant la force centrifuge, la tension du fil et l'action de la pesanteur, comme les premières sont à chaque instant perpendiculaires au chemin parcouru, leur travail est nul; on a donc, en désignant par e la projection M_0A du chemin parcouru M_0M sur la direction verticale M_0O de la pesanteur,

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\frac{p}{g}v^2 - \frac{1}{2}\frac{p}{g}v_0^2 = pe,$$

d'où.

$$v^2 = v_0^2 + 2ge.$$

Expression dans laquelle tout est connu, et qui fait voir qu'*en un point quelconque de la descente du mobile, le carré de la vitesse est égal au carré de la vitesse au point culminant plus le carré de la vitesse due à la hauteur verticale dont le mobile est descendu* (1446).

Au point inférieur M'_0 la vitesse étant v'_0 on a, en faisant $OM = r$,

$$v'^2_0 = v_0^2 + 4gr. \qquad (1)$$

Passé le point M'_0, le mobile commence à remonter, sa vitesse diminue, et l'on établit, comme pour la descente, que la vitesse en un point quelconque étant v', on a, en faisant $M'_0A' = e'$, ou $M'_0A' = 2r - e$,

$$v'^2 = v'^2_0 - 2g(2r - e).$$

Remplaçant v'^2_0 par sa valeur (1), il vient, en simplifiant,

$$v'^2 = v_0^2 + 2ge.$$

Ce qui fait voir que non-seulement pendant la partie descendante, mais bien *pour toute la révolution, le carré de la vitesse en un point quelconque est égal au carré de la vitesse au point culminant, plus le carré de la vitesse due à la distance verticale du point considéré au-dessous du point culminant.* De plus, on voit qu'à une même distance de ce point culminant, la vitesse est la même, que le mobile monte ou descende; on voit aussi que dans les hypothèses où nous nous sommes placés, c'est-à-dire en supposant qu'il n'y a ni frottement ni résistance d'air, le mouvement est périodique uniforme (1430); les révolutions sont de même durée, et pour cette raison dites *isochrones*.

En un mot, v_0 étant la vitesse connue en un point quelconque de la circonférence, et v la vitesse en un point situé à une distance verticale quelconque e du premier, on a

$$v^2 = v_0^2 + 2ge;$$

$2ge$ est positif ou négatif suivant que e est compté au-dessous ou au-dessus du point de départ.

Ce qui vient d'être posé est vrai pour tous les cas où un point maté-

niel soumis à l'action de la pesanteur se meut sur une courbe quelconque qui ne lui oppose qu'une résistance normale (1614).

2° *Proposons-nous maintenant de déterminer la tension* c.

Au point M le mobile se déplaçant normalement à la direction OM, la somme des projections sur OM, de la tension c et du poids p, est égale et directement opposée à la force centrifuge, ou mieux cette somme de projections est égale à la force centripète, et l'on a

$$c + p \cos\alpha = \frac{mv^2}{r}.$$

Remplaçant m par $\frac{p}{g}$, et v^2 par sa valeur $v_0^2 + 2ge$ (1°), il vient, en remarquant que $\cos\alpha = \frac{r-e}{r}$ (1090),

$$c + p\frac{r-e}{r} = \frac{pv_0^2}{gr} + \frac{2pe}{r},$$

d'où

$$c = p\left(\frac{v_0^2}{gr} + \frac{3e}{r} - 1\right).$$

Expression dans laquelle tout est connu, et qui fait voir que les valeurs de v_0^2 et de e peuvent être telles que la tension c soit négative; c'est alors une compression, et le fil doit être remplacé par une tige rigide.

Les formules précédentes s'appliquent à toutes les positions du mobile autour du point O, pourvu que α soit toujours l'angle du fil OM avec la partie OM_0 du diamètre vertical, ce qui fait varier en conséquence le signe de $\cos\alpha$ et par suite celui de $p\cos\alpha = p\,\frac{r-e}{r}$.

1645. *Pendule simple.* Supposons que, comme dans le cas précédent, le mobile se meuve dans un plan vertical; mais qu'au lieu de lui imprimer une vitesse initiale capable de lui faire décrire une révolution entière, on ne fasse que l'écarter de la position verticale OM'_0, et qu'on l'abandonne à l'action seule de la pesanteur (*fig.* 513).

Négligeant la résistance de l'air et le frottement, on calcule la vitesse du mobile en un point quelconque de sa course comme dans le cas du n° 1644, en remarquant que la vitesse v_0 est nulle. Ainsi le mobile étant arrivé au point M de sa course, c'est-à-dire ayant parcouru l'espace vertical $AA' = e$, on a

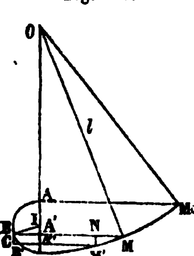
$$v^2 = 2ge \quad \text{ou} \quad v = \sqrt{2ge}.$$

Arrivé au point inférieur M'_0 de sa course, le mobile décrirait à gauche de OM'_0 un arc égal à M'_0M_0, puis redescendrait pour remonter en M_0 et redescendre de nouveau, et ainsi de suite, en reprenant toujours la même vitesse en un même point; d'où il résulterait à l'infini des oscillations égales en amplitude et en durée.

Dans la pratique, il n'y a que pour de très-petites oscillations que

l'on peut négliger l'influence du frottement et la résistance de l'air sur le mouvement; aussi est-ce pour ce cas, et en négligeant la matière de la tige, que nous allons déterminer la durée de l'oscillation de cette machine élémentaire, appelée *pendule simple.*

Fig. 513.



Supposons qu'arrivé au point M le mobile parcoure l'élément infiniment petit MM' dans l'instant infiniment petit θ; on aura (1431, 1446)

$$v = \frac{MM'}{\theta} = \sqrt{2ge}, \quad \text{d'où} \quad \theta = \frac{MM'}{\sqrt{2ge}};$$

expression du temps employé à parcourir un élément infiniment petit s de l'arc $M_0M'_0$ en fonction de cet élément et de l'abaissement vertical e.

Menant M'N parallèle à OM'_0, les deux triangles OA'M et MM'N sont semblables comme ayant les côtés perpendiculaires, et donnent

$$MM' : M'N = OM : MA';$$

d'où, en faisant $OM = l$, *longueur du pendule,*

$$MM' = l\frac{M'N}{MA'}.$$

La perpendiculaire MA' différant très-peu de la corde MM'_0, puisque l'arc MM'_0 est très-petit par rapport à son rayon, en posant

$$MA' = \frac{\text{corde } MM'_0}{k},$$

k aura une valeur de très-peu supérieure à l'unité.

Ayant (676)

$$2l : \text{corde } MM'_0 = \text{corde } MM'_0 : A'M'_0, \quad \text{d'où} \quad \text{corde } MM'_0 = \sqrt{2l \times A'M'_0},$$

on a

$$MA' = \frac{1}{k}\sqrt{2l \times A'M'_0};$$

par suite,

$$MM' = kl\frac{M'N}{\sqrt{2l \times A'M'_0}},$$

et

$$\theta = \frac{kl\dfrac{M'N}{\sqrt{2l \times A'M'_0}}}{\sqrt{2ge}} = \frac{k}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \times \frac{M'N}{\sqrt{e \times A'M'_0}}.$$

Décrivant une demi-circonférence sur AM'_0 comme diamètre, et prolongeant la perpendiculaire MA' jusqu'à cette circonférence au point B,

on a (676), en faisant $AA' = e$,

$$e : A'B = A'B : A'M'_0, \quad \text{d'où} \quad A'B = \sqrt{e \times A'M'_0};$$

donc

$$\frac{M'N}{\sqrt{e \times A'M'_0}} = \frac{M'N}{A'B}.$$

Prolongeant M'A'', menant la perpendiculaire BC et le rayon BI, les triangles semblables BB'C et BA'I donnent

$$BC \quad \text{ou} \quad M'N : A'B = BB' : BI;$$

d'où l'on conclut, en remplaçant A'B par sa valeur,

$$\frac{M'N}{\sqrt{e \times A'M'_0}} = \frac{BB'}{BI}.$$

Remplaçant le premier membre de cette égalité par le second dans la valeur de θ, on a, en remarquant que $BI = \frac{1}{2} AM'_0$,

$$\theta = \frac{k}{AM'_0}\sqrt{\frac{l}{g}} \times BB';$$

valeur dans laquelle toutes les quantités ont des valeurs réelles et constantes, à l'exception de BB'.

Pour chacun des éléments du parcours $M_0M'_0$ le temps θ aura une expression analogue, et en faisant la somme de toutes les expressions on aura la durée du parcours de $M_0M'_0$.

Cette somme est, en mettant $\frac{k}{AM'_0}\sqrt{\frac{l}{g}}$ en facteur commun, et en remarquant que pour l'arc $M_0M'_0$ la somme de tous les éléments analogues à BB' est la demi-circonférence de diamètre AM'_0,

$$\frac{k}{AM'_0}\sqrt{\frac{l}{g}} \times \frac{\pi}{2} AM'_0 = \frac{k\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Doublant cette valeur, on a pour la durée de l'oscillation complète

$$T = k\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

k est une quantité qui varie pour toutes les positions du mobile sur l'arc $M_0M'_0$; mais dans la pratique on la supposera constante et égale à une moyenne arithmétique entre sa plus grande et sa plus petite valeur. Pour de très-petites valeurs de l'angle $M_0OM'_0$ on peut faire $k = 1$, et poser

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Cette expression de la durée d'une très-petite oscillation du pendule

simple fait voir que, pour un même pendule ou pour des pendules de même longueur, les oscillations sont *isochrones*, c'est-à-dire de la même durée, partout où la valeur de g est la même. On voit de plus que cette durée est moitié de celle des oscillations du pendule conique d'une hauteur égale à l (1642), oscillations qui sont encore isochrones.

1646. *Remarques.* Pour un pendule d'une longueur l', oscillant dans un lieu où $g = g'$, on aurait

$$T' = \pi\sqrt{\frac{l'}{g'}};$$

donc

$$T : T' = \sqrt{\frac{l}{g}} : \sqrt{\frac{l'}{g'}}.$$

Lorsque $g = g'$, cette proportion devient

$$T : T' = \sqrt{l} : \sqrt{l'};$$

et pour $l = l'$,

$$T : T' = \sqrt{\frac{1}{g}} : \sqrt{\frac{1}{g'}};$$

proportions faciles à traduire verbalement.

1647. *Application.* Quelle est la longueur du pendule qui bat les secondes à Paris?

De la formule $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, on tire $l = \frac{gT^2}{\pi^2}$.

Remplaçant π, g et T par leurs valeurs, on a (1445)

$$l = \frac{9{,}8088 \times 1}{3{,}14159 \times 3{,}14159} = 0^m{,}99384..$$

On trouverait de même la longueur du pendule devant battre une durée quelconque.

1648. *Détermination de la valeur de* g (1447). Ayant (1645)

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \text{d'où} \quad g = \pi^2\,\frac{l}{T^2},$$

mesurant exactement la longueur l du pendule, et déterminant la durée T de ses petites oscillations, l'expression précédente donne la valeur de g dans le lieu où l'on opère.

CHOC DES CORPS SOLIDES.

1649. Tant que deux corps solides en repos ou en mouvement sont à distance, les actions mutuelles qu'ils exercent l'un sur l'autre sont négligeables; mais si, en vertu de vitesses acquises sous l'influence de causes quelconques, ils tendent à occuper au même instant une même partie de l'espace, dès qu'ils arrivent à être ce qu'on appelle en contact,

il se déclare des actions mutuelles répulsives qui atteignent un degré suffisant d'intensité pour modifier en grandeur ou en direction, ou à la fois en grandeur et en direction les vitesses primitives des deux corps, de manière que ceux-ci ne viennent pas occuper la même portion de l'espace au même instant, et par là satisfont à la loi générale de l'*impénétrabilité de la matière* (1509).

Lorsque deux corps se rapprochent ainsi de manière à donner naissance à ces actions mutuelles par leurs changements plus ou moins sensibles de formes, on dit qu'il y a *choc* ou *collision* entre les deux corps.

1650. Du principe de la réaction égale et contraire à l'action (1508), il résulte que *les actions mutuelles qui se développent pendant le choc de deux corps sont égales et directement opposées, et qu'elles n'influent en rien sur le mouvement du centre de gravité du système*, mouvement qui ne dépend en intensité et en direction que des forces extérieures (1613).

1651. *Vitesse du centre de gravité de l'ensemble de deux corps solides après leur choc.*

Supposons le cas le plus simple, celui où les centres de gravité des deux corps se meuvent suivant une même droite, par rapport à laquelle les deux corps sont symétriques. C'est à ce cas qu'on ramène les applications pratiques sur le choc.

Le centre de gravité de l'ensemble se mouvra sur la droite suivie par les deux corps, comme si le choc n'avait pas lieu (1650). De plus, il est évident que la vitesse de chacun des corps en particulier ne change pas de direction, mais bien d'intensité, et même l'une peut changer de signe.

Soient m et m' les masses des deux corps, v et v' leurs vitesses respectives avant le choc, et u la vitesse du centre de gravité.

Dès que le choc commence, les actions mutuelles égales agissent en sens contraire sur chacun des mobiles, et produisent des changements de formes et des vibrations qui dépendent de la nature et de la forme des corps.

Si la vitesse relative des deux corps l'un par rapport à l'autre est faible, et que les corps aient une certaine consistance, on peut admettre que le changement de forme pendant le choc s'étend à peu de distance du point de contact, et que les vibrations des molécules sont très-faibles; d'où il résulte que le mouvement de toutes les molécules de chacun des corps peut être considéré comme n'étant qu'un simple mouvement de translation, qui est le même pour toutes les molécules.

En se plaçant dans cette hypothèse, V étant la vitesse commune à tous les points et au centre de gravité du solide de masse m à un instant quelconque du choc, et V' celle de tous les points et du centre de gravité du solide de masse m' au même instant, on a (1612), en négligeant pendant le choc les impulsions des forces extérieures, s'il y en a, ce que l'on peut faire, la durée du choc étant très-petite,

$$mV + m'V' = mv + m'v'.$$

Il y a toujours pendant le choc un instant où les centres de gravité des deux corps ont la même vitesse, qui est aussi la vitesse u du centre de gravité du système; à cet instant, l'équation précédente devient

$$(m+m')u = mv + m'v',$$

d'où

$$u = \frac{mv + m'v'}{m+m'}.$$

u est la vitesse du centre de gravité, et sensiblement aussi celle de tous les points du système à l'instant considéré, dans le cas de très-faibles vibrations.

Lorsque les deux corps ne sont pas élastiques, c'est-à-dire quand ils conservent les formes que des forces quelconques peuvent leur donner, les actions mutuelles cessent leur effet dès que la vitesse u est devenue commune aux deux corps; alors les deux corps se meuvent en restant en contact, tant que des forces extérieures ne viennent pas modifier leur vitesse commune u.

Les formules précédentes s'appliquent au cas où les corps marchent en sens contraires, comme à celui où ils vont dans le même sens; seulement il faut avoir égard aux signes qu'il convient de donner aux valeurs de v et v', et par suite à celles de mv et $m'v'$. Le signe de u est toujours celui de la plus grande quantité de mouvement.

Si les deux quantités de mouvement sont égales et de signes contraires, la formule précédente donne $u=0$; ce qui montre que les corps arrivent au repos, et y restent s'ils sont dénués d'élasticité.

Si l'un des corps est au repos, on a

$$(m+m')u = mv,$$

d'où

$$u = \frac{mv}{m+m'}.$$

1632. *Perte de puissance vive due au choc de deux corps non élastiques.*

Si les corps restent unis après s'être comprimés, et qu'on néglige les vibrations auxquelles peuvent être soumises les molécules des deux corps, il est évident qu'il y a perte de puissance vive dans le système, puisque, pendant la compression des deux corps, et jusqu'au moment où la même vitesse est devenue commune aux deux corps, les molécules voisines du contact se sont rapprochées, et par suite les actions mutuelles répulsives de ces molécules ont produit un travail négatif, d'où il est résulté une perte de puissance vive (2°, 1614).

Le travail dû aux forces moléculaires, et par suite la perte de puissance vive du système ne dépendant que du mouvement relatif des deux corps, il en résulte que pour calculer cette perte on peut supposer que l'un des corps est en repos, et que l'autre vient le choquer avec une vitesse absolue égale à la vitesse relative du système.

Soit donc v la vitesse de la masse choquante m, et $v' = 0$ la vitesse de la masse choquée m'.

La puissance vive du système avant le choc est $\frac{1}{2} mv^2$. Après le choc, toutes les molécules des deux corps ayant la même vitesse u, à cet instant la puissance vive du système est

$$\frac{1}{2} (m + m')u^2.$$

La perte de puissance vive due au choc est alors

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} (m + m')u^2.$$

Remplaçant dans cette expression u par sa valeur en remarquant que $v' = 0$ (1651), la perte de puissance vive devient

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} m^2v^2 \frac{1}{m + m'} = \frac{1}{2} mv^2\left(1 - \frac{m}{m + m'}\right)$$

ou, en réduisant au même dénominateur et en simplifiant,

$$\frac{1}{2} \frac{mm'v^2}{m + m'}.$$

Comme nous l'avons dit plus haut, cette formule s'applique également aux cas où les corps ont tous deux une vitesse initiale avant le choc; mais alors il faut dans cette formule faire v égal à la vitesse relative des deux mobiles; ainsi, selon que les deux mobiles avanceront dans le même sens ou en sens contraires avant le choc, v sera égal à la différence ou à la somme des vitesses que possèdent les mobiles avant le choc.

1653. *Durée du choc et intensité des forces ou actions mutuelles.*

Supposant, ce qui s'écarte évidemment de la réalité, que les actions mutuelles égales f, f' restent constantes pendant toute la durée t du choc, c'est-à-dire depuis l'instant où les corps arrivent au contact jusqu'à celui où ils sont supposés avoir la même vitesse u, désignant par x et x' les chemins décrits par les centres de gravité de m et m' pendant le temps t, on a (1437, 1461)

$$x = vt - \frac{1}{2} \frac{f}{m} t^2 \quad \text{et} \quad x' = v't + \frac{1}{2} \frac{f}{m'} t^2.$$

$x - x'$ est la quantité dont les deux centres de gravité se rapprochent; en la désignant par d on a

$$d = (v - v')t - \frac{1}{2} ft^2 \frac{m + m'}{mm'}. \qquad (a)$$

Des équations (1468)

$$mu - mv = -ft \quad \text{et} \quad m'u - m'v' = ft$$

on tire, en éliminant u,

$$ft(m + m') = mm'(v - v').$$

Substituant dans la valeur de d, il vient

$$d = (v - v')t - \frac{1}{2}(v - v')t, \quad \text{d'où} \quad t = \frac{2d}{v - v'}.$$

Remplaçant t par cette valeur dans l'équation (a), on en tire

$$f = \frac{mm'}{m + m'} \times \frac{1}{d}\,\frac{(v - v')^2}{2} = \frac{PP'}{P + P'} \times \frac{1}{d}\,\frac{(v - v')^2}{2g}.$$

P et P' sont les poids des corps de masses m et m'.

Il convient de remarquer que $\frac{(v - v')^2}{2g}$ est la hauteur due à la vitesse relative $v - v'$ (1446).

1654. *Du choc des corps d'une élasticité parfaite.* Ces corps reprenant à l'instant où ils se séparent la forme qu'ils avaient avant le choc, le travail moléculaire total, compté depuis l'instant où les corps arrivent au contact jusqu'à celui où ils se séparent, est nul. Par conséquent, puisqu'on suppose qu'il n'y a pas de forces extérieures, la puissance vive du système n'a pas changé (1614), et désignant par V et V' les vitesses des deux corps à l'instant où ils se quittent, on a

$$\frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}m'V'^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m'v'^2.$$

On a aussi (1612)

$$mV + m'V' = mv + m'v'. \qquad (a)$$

Ces deux équations donnent

$$m'(V'^2 - v'^2) = m(v^2 - V^2), \quad \text{et} \quad m'(V' - v') = m(v - V);$$

d'où l'on tire, en divisant membre à membre (444),

$$V' + v' = v + V, \quad \text{ou} \quad V' - V = v - v'. \qquad (b)$$

Ce qui indique que la vitesse relative n'a fait que changer de signe.

Les deux équations (a) et (b), qui sont du premier degré, permettent de calculer facilement V et V'. Ainsi, en multipliant (b) par m et ajoutant à (a), on a

$$(m + m')V' = 2mv + m'v' - mv', \quad \text{d'où} \quad V' = \frac{2mv + (m' - m)v'}{m + m'}. \qquad (c)$$

Multipliant de même l'équation (b) par m' et retranchant de (a), on a

$$(m+m')V=2m'v'+mv-m'v, \quad \text{d'où} \quad V=\frac{2m'v'+(m-m')v}{m+m'}. \quad (d$$

Lorsque $m=m'$, les formules (c) et (d) donnent

$$V'=v, \quad \text{et} \quad V=v';$$

ce qui montre que dans ce cas les deux corps ne font que changer de vitesse.

L'équation (d) peut s'écrire

$$(m+m')V=2mv+2m'v'-(m+m')v,$$

ou en remarquant que $mv+m'v'$ est égal à la quantité de mouvement $(m+m')u$ du système condensé à son centre de gravité (1651),

$$(m+m')V=2(m+m')u-(m+m')v;$$

d'où

$$V=2u-v.$$

Cette valeur de V substituée dans l'équation (b) donne

$$V'=2u-v';$$

ce qu'on aurait pu déduire de l'équation (c).

En laissant tomber une boule de caoutchouc sur une table de marbre, elle rejaillit à peu près aux 2/3 de la hauteur de chute ; au lieu qu'en laissant tomber à plat un disque de même matière, le rejaillissement est presque nul. Cela tient à ce qu'il se produit des vibrations qui se propagent dans tout l'intérieur du disque après la séparation, au lieu que dans la sphère les vibrations ne se produisent guère avec quelque intensité que dans le voisinage du point de contact. Aussi la forme sphérique est-elle celle qui réalise le mieux les formules précédentes établies pour les corps d'une élasticité parfaite.

1655. Les pièces de machines, quand elles se choquent, prennent ordinairement une vitesse commune dans le sens normal au contact, et il en résulte des pertes de puissance vive, qu'il importe de réduire autant que possible, puisqu'elles diminuent le travail utile. Dans la pratique, ces pertes de puissance vive se calculent à l'aide de la formule du n° 1652, comme si les corps étaient dénués d'élasticité.

MACHINES.

1656. Une machine est un système matériel composé de différents corps ou organes tellement reliés entre eux, que tout mouvement de l'un, compatible avec la solidité du système, entraîne des mouvements relatifs déterminés pour chacun des autres. Son but est de transmettre le travail des forces.

Les mouvements relatifs des différents organes d'une machine ne

sont pas seulement déterminés en direction, mais aussi en intensité. Généralement, les mouvements sont périodiques uniformes (1430), et la vitesse est mise en harmonie avec les exigences des travaux industriels à produire, sans que jamais elle atteigne la limite à laquelle la solidité de la machine serait compromise.

1657. Sur une machine en mouvement agissent différentes forces que l'on peut diviser en trois classes :

1° *Les forces mouvantes ou motrices.* Ce sont les forces qui agissent dans le sens du mouvement des organes qu'elles sollicitent; c'est par conséquent à elles qu'est dû le mouvement de la machine;

2° *Les résistances utiles*, qui sont les forces que les matières sur lesquelles opère la machine opposent au mouvement des organes qui les sollicitent;

3° *Les résistances passives ou nuisibles*, ou les forces qui naissent du mouvement des différents organes de la machine pour s'opposer à ce mouvement; elles sont dues au frottement de ces organes entre eux ou sur des corps étrangers, aux chocs qui peuvent avoir lieu entre ces organes par suite de changements brusques de vitesse ou de direction, à la roideur des cordes ou courroies, etc.

1658. Considérant les forces motrices comme positives, puisqu'elles agissent dans le sens du mouvement, les résistances utiles et les résistances nuisibles sont négatives. Par conséquent, si l'on suppose le système animé d'un mouvement uniforme, la somme des travaux de toutes les forces pour un temps quelconque sera nulle, puisque le gain ou la perte de puissance vive est nulle, et l'on aura (1614)

$$\mathcal{T}_m - \mathcal{T}_u - \mathcal{T}_n = 0 \quad \text{ou} \quad \mathcal{T}_m = \mathcal{T}_u + \mathcal{T}_n;$$

ce qui fait voir que, *le mouvement étant uniforme, le travail moteur* $\mathcal{T}_m$ *dû aux forces motrices est égal au travail utile* $\mathcal{T}_u$ *dû aux résistances utiles, plus le travail nuisible* $\mathcal{T}_n$ *dû aux résistances passives.*

Réciproquement, si, à chaque instant, cette équation subsiste, le mouvement est uniforme; car la vitesse ne peut varier qu'autant que la somme des travaux de toutes les forces n'est pas nulle.

Lorsque dans une machine cette formule existe, on dit qu'il y a équilibre dynamique.

1659. Quand le mouvement d'une machine est périodique uniforme, le gain ou la perte de puissance vive n'est nul que pour la durée d'un nombre entier de périodes; pour ce temps, on a encore

$$\mathcal{T}_m = \mathcal{T}_u + \mathcal{T}_n.$$

On dit alors que la machine est en *équilibre dynamique périodique*: c'est l'état ordinaire des machines, non-seulement à cause de la forme de leurs organes, mais aussi à cause des variations plus ou moins grandes des forces motrices et surtout des résistances.

1660. *Impossibilité du mouvement perpétuel.* Dans le cas où l'on néglige les résistances passives, la formule précédente devient

$$\mathcal{T}_m = \mathcal{T}_u.$$

Ce qui fait voir que le travail utile $\mathcal{T}_u$ est égal au travail moteur $\mathcal{T}_m$.

Il est impossible de réaliser ce résultat dans la pratique; car, dans une machine quelconque, il y a toujours des résistances passives qui diminuent le travail utile.

Le travail nuisible, inévitable, des résistances passives fait voir l'impossibilité d'obtenir le mouvement perpétuel. Que cette vérité n'a-t-elle été mieux répandue plus tôt, et que ne l'est-elle davantage encore aujourd'hui; elle aurait évité et éviterait bien des déceptions à de pauvres malheureux qui croient ce mouvement réalisable!

Il est évident que s'il n'y avait pas de résistances passives, c'est-à-dire si l'on avait $\mathcal{T}_m = \mathcal{T}_u$, on pourrait obtenir le mouvement perpétuel, puisque, par exemple, à l'aide d'une quantité d'eau tomban d'une certaine hauteur, on pourrait en élever une même quantité à la même hauteur; celle-ci pourrait ensuite faire monter la première à la même hauteur, puis la première élever la seconde, et ainsi de suite indéfiniment. Un pendule écarté de la verticale oscillerait indéfiniment sans la résistance de l'air et le frottement de son axe de suspension (1645).

1661. P étant la force motrice agissant sur une machine quelconque, et Q la résistance utile vaincue par cette machine, E et e étant les espaces parcourus par les points d'application de P et Q dans la direction de ces forces et dans un même temps quelconque, au commencement et à la fin duquel la vitesse de la machine est la même, l'équation d'équilibre dynamique donne, en supposant nulles les résistances passives,

$$PE = Qe \quad \text{ou} \quad P : Q = e : E.$$

De l'égalité entre le travail de la puissance et celui de la résistance, il résulte que pour un même travail moteur $P \times E$, selon que la force Q sera multipliée par $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 2, 3... l'espace e sera respectivement divisé par les mêmes nombres; d'où découle la maxime bien connue : *Ce qu'on gagne en force, on le perd en espace, ou*, ce qui revient au même, *en vitesse.*

La proportion précédente permet de calculer l'une quelconque des quatre quantités P, Q, E, e, quand on connaît les trois autres.

Pour une machine quelconque, simple ou compliquée, s'il s'agit de trouver quelle est la résistance Q que pourra vaincre une puissance P, on détermine les espaces E et e parcourus dans le même temps par les points d'application des forces P et Q. E et e sont quelconques si ces points d'application ont des mouvements uniformes; mais on les prend correspondants à une période si le mouvement de la machine est périodique. Lorsque la machine est construite, c'est en la mettant en mouvement d'une manière quelconque qu'on détermine les valeurs de E et e. Lorsque la machine n'est qu'en dessin, d'une valeur de E, on déduit celle de e d'après les rapports des espaces parcourus par les différents organes qui transmettent le mouvement du point d'application de P à celui de Q.

Supposons que la résistance à vaincre $Q = 100^k$, et qu'il s'agisse de déterminer quelle sera la puissance P en négligeant les résistances passives. On détermine les valeurs correspondantes de E et e comme il vient d'être indiqué, soient $E = 2^m,5$ et $e = 0^m,80$; puis on remplace les lettres par leurs valeurs dans la proportion précédente, ce qui donne

$$P : 100^k = 0,80 : 2,5, \quad \text{d'où} \quad P = \frac{100 \times 0,80}{2,5} = 32^k.$$

Si l'on avait donné la puissance P, on aurait déterminé Q en opérant comme pour P.

1662. *Pour avoir la force théorique en chevaux-vapeur*, on constate le temps pendant lequel les espaces E et e sont parcourus quand la machine est en marche normale, et les produits égaux $P \times E$ et $Q \times e$ donnent chacun le nombre de kilogrammètres produit par P ou absorbé par Q dans ce temps. Divisant ce nombre de kilogrammètres par ce temps exprimé en secondes, on a la puissance de la machine exprimée en kilogrammètres par seconde. Ce nombre de kilogrammètres, divisé par 75, donne la puissance de la machine en chevaux (1481). Si, dans l'exemple précédent, E et e sont parcourus en 1″,5, $PE = 32 \times 2,5 = Qe = 100 \times 0,80 = 80^{km}$ est le nombre de kilogrammètres produit et absorbé en 1″,5; $\frac{80}{1,5} = 53^{km},33$ est la puissance de la machine en kilogrammètres par seconde, et $\frac{53,33}{75} = 0,71$ est sa puissance en chevaux-vapeur.

1663. Souvent, dans la pratique, on a la puissance dont on peut disposer en chevaux-vapeur; supposons qu'elle soit de 25 chevaux. Pour calculer P et Q, on commence par déterminer $E = 3^m$ et $e = 0^m,8$, comme il a été indiqué (1661). La durée de ces parcours étant de 1″,4, le travail de la machine dans ce temps est de $75 \times 25 \times 1,4 = 2625^{km}$; on a donc

$$PE = P \times 3 = 2625, \quad \text{d'où} \quad P = \frac{2625}{3} = 875^k.$$

Ayant P, on peut calculer Q à l'aide de la proportion du n° 1661; du reste, on a encore

$$Qe = Q \times 0,8 = 2625, \quad \text{d'où} \quad Q = \frac{2625}{0,8} = 3281^k,25.$$

1664. Il peut arriver qu'au lieu d'avoir une seule force motrice, on en ait plusieurs P, P′, P″... et que l'on ait aussi plusieurs résistances utiles Q, Q′, Q″... Constatant, comme pour deux forces, les espaces E, E′, E″... et e, e', e''... parcourus dans le même temps par les points d'application des forces dans la direction de ces forces, l'équation

$$\mathcal{T}_m = \mathcal{T}_u, \qquad (1660)$$

au lieu de fournir l'équation du n° 1661, donne

$$PE + P'E' + P''E'' + \ldots = Qe + Q'e' + Q''e'' + \ldots$$

Équation à l'aide de laquelle on déterminera une des quantités qui y entrent connaissant toutes les autres. Les membres de cette équation donnent chacun le travail théorique produit ou absorbé pendant la durée du parcours des espaces correspondants E, E'... e, e'... Connaissant cette durée, on déterminera le travail théorique en kilogrammètres produit ou absorbé pendant une seconde, et ce dernier travail divisé par 75 donnera la puissance en chevaux-vapeur (1663). Si l'on avait d'abord donné la puissance en chevaux, par des calculs inverses à ceux que nous venons d'indiquer, le problème aurait fourni, soit pour P, P'... E, E'..., soit pour Q, Q'... e, e'..., une infinité de valeurs satisfaisant à l'équation; mais les valeurs choisies auraient toujours dû donner, pour le premier et pour le deuxième membre de l'équation, une valeur correspondant à 25 chevaux ou à $25 \times 75 = 1875^{km}$ par seconde.

1665. Dans les machines, surtout dans les machines industrielles, les résistances passives sont assez considérables pour qu'on ne puisse pas négliger le travail qu'elles absorbent; l'équilibre dynamique de la machine est alors exprimé par

$$\mathcal{T}_m = \mathcal{T}_u + \mathcal{T}_n. \qquad (1658)$$

Pour un certain déplacement de la machine, les travaux $\mathcal{T}_m$, $\mathcal{T}_u$ et $\mathcal{T}_n$ s'évaluent comme dans le cas précédent; ainsi, P étant la puissance, Q la résistance utile, R, R'... les différentes résistances passives, et E, e, i, i'... les espaces correspondants parcourus dans le même temps par les points d'application dans la direction de ces forces, on a

$$PE = Qe + Ri + R'i' + \ldots$$

Équation qui revient à celle du n° 1664, dans laquelle on aurait remplacé différentes résistances utiles par des résistances nuisibles.

Il peut arriver qu'une ou plusieurs résistances nuisibles proviennent de chocs entre les organes de la machine. Le travail absorbé par ces résistances n'est plus évalué par un produit d'une force par l'espace que parcourt son point d'application, mais par la perte de puissance vive due au choc, et cette perte, évaluée en kilogrammètres (1655), entre dans le second membre de l'équation comme tous les autres travaux nuisibles Ri, $R'i'$...

A l'aide de l'équation précédente, connaissant, dans une machine, deux des trois travaux suivants: le travail moteur $\mathcal{T}_m = PE$, le travail utile $\mathcal{T}_u = Qe$, et le travail nuisible $\mathcal{T}_n = Ri + R'i' + \ldots$, on détermine le troisième.

1666. On se propose ordinairement d'établir une machine capable de produire un travail utile $\mathcal{T}_u = Qe$ donné. Il faut alors déterminer $\mathcal{T}_m = PE$ capable de produire non-seulement ce travail utile, mais

aussi le travail nuisible. On doit donc commencer par calculer ce travail nuisible; ce que l'on fait en déterminant les valeurs des différentes résistances nuisibles R, R'... en fonction de Q, et par suite $\mathfrak{T}_n$ en fonction de $\mathfrak{T}_u$.

Ayant $\mathfrak{T}_u$ et $\mathfrak{T}_n$, l'équation du n° 1665 donne $\mathfrak{T}_m$, et l'on peut déterminer le travail moteur en chevaux comme au n° 1662.

1667. Le travail moteur $\mathfrak{T}_m$ étant représenté par 100, les travaux utile T_u et nuisible T_n étant, par exemple, 75 et 25, on dit que le *rendement* de la machine est de 75 p. 100; la *perte* est alors de 25 p. 100. S'il était possible que la perte fût nulle, le rendement serait de 100 p. 100 (1660).

Ce qui précède fait voir l'importance que joue la formule de l'équilibre dynamique dans l'établissement des machines. Que de ruines et de procès souvent désastreux sont dus à ce que cette formule n'ayant pas été bien comprise, des machines établies n'ont pas produit le travail qu'on en attendait.

Au point où l'on en est aujourd'hui, la pratique a prononcé sur la quantité de travail nuisible $\mathfrak{T}_n$ qui a lieu dans les différentes machines industrielles, et l'on se base généralement sur ces résultats dans les constructions nouvelles, tout en cherchant à diminuer cette perte autant que possible.

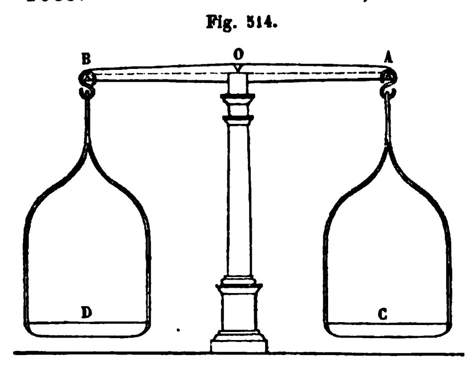
Il y a cependant des cas où il peut être nécessaire de se rendre compte de cette perte; c'est pourquoi nous allons établir les équations d'équilibre dynamique des différentes machines simples, en ayant égard aux résistances passives. De ces équations, on pourra passer à celles des machines les plus compliquées, qui ne sont en général que la réunion d'un certain nombre de ces machines simples.

ÉQUILIBRE DYNAMIQUE DES MACHINES SIMPLES.

1668. Il y a des machines simples dans lesquelles les résistances passives sont tellement faibles, qu'on peut négliger le travail qu'elles absorbent; alors les conditions d'équilibre statique peuvent être prises pour celles d'équilibre dynamique. Les machines à peser, que nous allons d'abord étudier, sont dans ce cas, et il en est de même du levier, dont on peut ordinairement négliger le frottement de l'axe d'oscillation (1539).

1669. *Balance.* Cette machine, destinée à mesurer les poids des corps en les comparant directement à des poids gradués, consiste en un levier du premier genre (1541) dont le point d'appui est au milieu de sa longueur. Ce levier AB, qu'on nomme *fléau*, est traversé perpendiculairement par un prisme triangulaire ou *couteau* O, qui fait corps avec lui, et dont l'arête inférieure, qui doit être horizontale, repose sur deux coussinets plans d'agate ou d'acier et sert d'axe de rotation. Aux extrémités du fléau sont implantés deux autres couteaux A et B, sur les arêtes supérieures desquels reposent librement les crochets auxquels sont suspendus les plateaux C et D devant recevoir les poids à comparer.

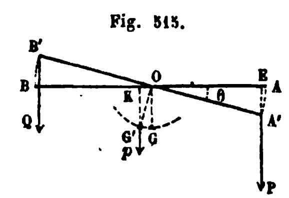
Fig. 514.



Le point de *rotation* O et les deux points de *suspension* A et B étant en ligne droite, et le centre de gravité du fléau étant au point de rotation O, comme le frottement est négligeable, il y aura équilibre dès que les poids suspendus en A et B seront égaux ; mais comme cet équilibre subsiste quand le fléau est incliné dans une position quelconque comme quand il est horizontal (ce qui fait dire que la balance est *indifférente*), et que la plus petite différence entre les charges des points A et B incline le fléau, c'est-à-dire le fait *trébucher*, du côté de la charge la plus grande, jusqu'à ce que le système rencontre un obstacle, ou jusqu'à ce que la droite AOB soit verticale, avec une telle disposition il serait bien difficile d'établir l'égalité entre les charges des points A et B, c'est-à-dire de faire une *pesée*, puisque rien n'indiquerait que l'équilibre soit prêt d'être atteint.

Dans la construction d'une balance, outre l'horizontalité de l'axe de rotation, les conditions qu'on doit s'attacher à remplir sont au nombre de trois : 1° le centre de gravité du fléau doit être situé au-dessous du centre de rotation O ; 2° la droite AB qui joint les points de suspension doit passer par le point O, et être perpendiculaire à la droite qui joint ce dernier point au centre de gravité du fléau ; 3° les deux bras du fléau doivent être de même longueur, et les deux plateaux doivent être de même poids.

Fig. 515.



Ces trois conditions étant remplies, tant que les poids P et Q placés sur les plateaux sont égaux ou nuls, si l'on incline le fléau, le poids p de ce fléau, appliqué à son centre de gravité G, le ramène dans la position horizontale, qui est sa position d'équilibre, et l'on voit que l'équilibre est stable.

Si l'un des poids est plus grand que l'autre, si $P - Q = p'$, AB prend la position A'B', le centre de gravité G vient en G', c'est-à-dire que le système s'incline jusqu'à ce qu'on ait (1539)

$$p \times OK = p' \times OE.$$

Les triangles rectangles semblables OKG' et OEA' donnent, en représentant $OA' = OA$ par l et $OG' = OG$ par d,

$$OK = d \sin\theta \quad \text{et} \quad OE = l \cos\theta. \qquad (1122)$$

Substituant ces valeurs dans l'équation précédente, il vient

$$pd \sin\theta = p'l \cos\theta, \quad \text{d'où} \quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{ou} \quad \tan\theta = \frac{p'l}{pd}. \qquad (a)$$

Telle est la relation d'équilibre de la balance, et l'on dit qu'une balance est plus ou moins *sensible*, selon que $\tan\theta$ ou l'angle θ est plus ou moins grand pour une même valeur de $P - Q = p'$. On dit en effet qu'une balance est sensible au milligramme, au demi-milligramme, etc., lorsque des poids égaux étant placés sur les deux plateaux, et l'horizontalité du fléau existant, celui-ci s'incline d'une quantité appréciable pour l'addition, dans l'un des plateaux, d'un poids de 1 milligramme, 1 demi-milligramme, etc.

La sensibilité d'une balance a, comme l'on voit, pour mesure le rapport $\frac{l}{pd}$; elle varie donc proportionnellement à la longueur l du bras du fléau, et en raison inverse du poids p du fléau et de la distance d du centre de gravité du fléau au centre d'oscillation. Pour qu'une balance soit sensible, il faut donc un fléau long et léger, dont le centre de gravité soit au-dessous, mais voisin du centre d'oscillation. Une balance qui manque de sensibilité, c'est-à-dire qui ne se meut sensiblement que pour des différences p' de poids relativement considérables, est dite *paresseuse*.

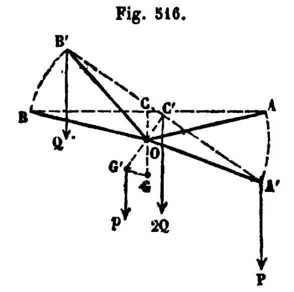
Il convient d'examiner ce qui arriverait si les conditions précédentes n'étaient pas remplies.

1° *La droite* AB *passant par le point* O, si le centre de gravité G est en O, nous avons déjà vu que l'équilibre est indifférent pour toutes les positions du fléau.

Si la droite AB passe par le point O, et que le centre de gravité G se trouve au-dessus de O, tant que la droite GO est verticale, p est détruit par l'axe O, et deux poids égaux P et Q se font équilibre; mais l'on voit que cet équilibre est instable et qu'il y a impossibilité de faire une pesée, puisque pour le moindre écart de GO de la verticale, le poids p rompt lui-même l'équilibre, et ferait tourner le fléau d'une demi-révolution, si aucun obstacle ne le retenait. On dit qu'une telle balance est *folle*.

2° *La droite* AB *ne passant pas par l'axe de rotation* O, si elle passe au-dessus, quand on aura P = Q, AB sera horizontale, et la résultante des deux forces P et Q sera appliquée au point C, milieu de AB, et sera détruite par la fixité du point d'appui. Si l'on ajoute un petit poids dans le plateau de droite, si P — Q = p', le fléau prend une position A'OB' d'équilibre stable, dans laquelle il est en équilibre sous l'influence du poids p du fléau appliqué en G', du poids p' appliqué en A', et de la charge 2Q, soit sensiblement P + Q, appliquée au point C', milieu de A'B'. Avec ces éléments, on peut donc calculer l'angle de sensibilité G'OG; mais sans faire aucun calcul, on voit que cet angle sera d'autant plus grand, que la charge P + Q, toujours appliquée au milieu de A'B', sera plus grande. Ainsi, avec une telle disposition, la sensibilité de la balance augmenterait avec la charge.

Fig. 516.

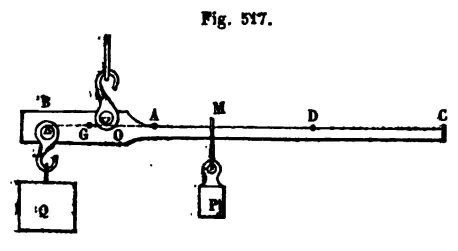


Si AB passait au-dessous du point d'appui O, en faisant pour ce cas une figure analogue à la précédente, on verrait que le point C' serait, comme le centre de gravité G', situé à gauche de la verticale OG, et que par suite l'angle de sensibilité G'OG décroîtrait à mesure que la charge P + Q augmenterait.

Méthode des doubles pesées. Dans la presque impossibilité d'obtenir une balance exempte de défaut, lorsqu'il s'agit de pesées délicates, on fait une double pesée. Ainsi, ayant placé le corps à peser dans l'un des plateaux, on lui fait équilibre en mettant dans l'autre plateau du sable ou de la grenaille de plomb. On retire alors le corps, et on le remplace par des poids gradués, de manière à rétablir de nouveau l'équilibre. La somme des poids gradués qui se trouvent dans le plateau quand l'équilibre est rétabli, est le poids du corps, et cela indépendamment de l'inégalité des bras du fléau, et même de toute autre condition; la précision du résultat ne dépend pas de la justesse de la balance, mais seulement de sa sensibilité.

1670. *Balance romaine.* Cet appareil à peser consiste en un levier du premier genre (1541) mobile autour d'un point O. Le fardeau à peser se suspend en B du petit bras, et on lui fait équilibre par un poids constant P qui peut glisser le long du grand bras. Les points de suspension des poids P et Q, le centre de gravité G du levier et le centre d'oscillation O sont sur une même droite; de plus, le centre de gravité G et le point de suspension B se trouvent du même côté par rapport au point O.

Fig. 517.



Désignant par R le poids du levier, par r la distance OG et par q la

distance OB, on a pour l'équilibre (1543)

$$P \times OM = Qq + Rr.$$

Le poids P devant être placé en A pour établir l'équilibre quand le fardeau Q est enlevé, on a

$$P \times OA = Rr.$$

Retranchant membre à membre cette équation de la précédente, il vient

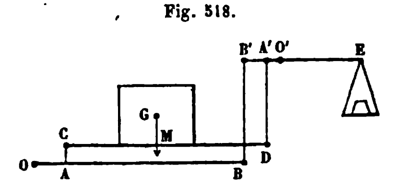
$$P \times AM = Qq, \quad \text{d'où} \quad AM = \frac{Qq}{P}.$$

Ce qui montre que la distance variable AM est proportionnelle à Q.

Pour graduer l'appareil, on détermine expérimentalement le point A, et l'on y marque la division 0. On suspend ensuite en B un poids connu, de 100 kilogrammes par exemple, et l'on détermine le point D où il faut amener le poids constant P pour établir l'équilibre. On marque 100 au point D, on divise l'intervalle AD en 100 parties égales, et l'on prolonge la division au delà du point D. D'après cette graduation, il est évident que si un fardeau suspendu en B exige pour l'équilibre que le poids P soit en M, le poids Q de ce fardeau étant proportionnel à AM, il sera exprimé en kilogrammes par la division qui se trouve en M.

1671. *Bascule.* Cette balance, dite de *Quintenz*, son inventeur, se compose de deux leviers du deuxième genre OB, CD (1541) articulés en O et C, et d'un levier du premier genre B'E mobile autour du point O'. Les articulations O et O' sont fixes ; mais celle C participe au mouvement du levier OB, sur lequel elle repose par une pièce AC. Les deux premiers leviers OB, CD sont reliés au troisième B'E par des tringles BB', DA' articulées à leurs extrémités. Le levier CD porte un tablier sur lequel on place le fardeau à peser M, et le levier B'E porte à son extrémité E un plateau destiné à recevoir des poids gradués. Le poids du plateau est déterminé expérimentalement de manière que le levier B'E soit horizontal quand le plateau et le tablier sont vides.

Fig. 518.



Ayant placé un fardeau M sur le tablier, on rétablit l'horizontalité du levier B'E en plaçant des poids gradués dans le plateau, et du poids total P placé dans le plateau on déduit le poids Q du fardeau M. La condition essentielle à laquelle doit satisfaire l'appareil est que le rapport $\frac{OA}{OB}$ soit égal à celui $\frac{O'A'}{O'B'}$. Cette condition étant remplie, si, par exemple, OA est le sixième de OB et O'A' le sixième de O'B', considérant le poids Q du fardeau M comme décomposé en deux forces

verticales, l'une Q' appliquée en C, et l'autre Q'' appliquée en D, la force Q' agissant sur le levier OB comme une force $\frac{Q'}{6}$ appliquée en B, et cette force $\frac{Q'}{6}$ agissant sur le levier B'E comme une force Q' appliquée en A'; de plus, la force Q'' sollicitant en A' avec toute son intensité le levier B'E; ce levier est donc sollicité en A' par $Q' + Q''$, c'est-à-dire par le poids Q, qui est égal à cette somme.

Comme pour l'équilibre du levier B'E, qui n'est sollicité que par les forces Q et P, on doit avoir (1539)

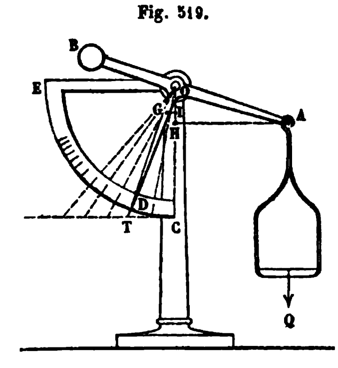
$$Q \times O'A' = P \times O'E, \quad \text{d'où} \quad Q = P\frac{O'E}{O'A'},$$

pour avoir le poids Q, il suffit donc de multiplier P par le rapport $\frac{O'E}{O'A'}$, qui est ordinairement égal à 10.

Il est à remarquer que la relation entre Q et P est indépendante de la position du corps M sur le tablier.

1672. *Peson.* Le fléau AB du peson est muni à son articulation d'une aiguille OD qui lui est perpendiculaire, à l'une A de ses extrémités d'un plateau destiné à recevoir les corps à peser, et à l'autre extrémité B d'un contre-poids tel que le centre de gravité G du système mobile se trouve sur l'axe de l'aiguille au-dessous du point de suspension, et que quand aucun fardeau n'est sur le plateau l'axe de l'aiguille soit vertical.

Fig. 519.



AB étant la position que prend le fléau sous l'influence du poids p du levier appliqué au centre de gravité G, et du poids Q du corps à peser, menant la verticale OC et les horizontales GI, AH et CT, on a (1539)

$$Q \times AH = p \times GI, \quad \text{d'où} \quad Q = p\frac{GI}{AH}.$$

Les triangles semblables GOI, TOC et AOH donnent

$$GI : OI = CT : OC,$$
$$OI : AH = OG : OA.$$

Multipliant ces deux proportions terme à terme, et supprimant le facteur OI commun aux deux termes du premier rapport, on a

$$\frac{GI}{AH} = \frac{CT \times OG}{OC \times OA},$$

et substituant dans la valeur de Q, il vient

$$Q = p\,\frac{CT \times OG}{OC \times OA}.$$

Les quantités p, OG, OC et OA étant constantes, le poids Q est donc proportionnel à CT, c'est-à-dire à la tangente de l'arc décrit du point O comme centre avec OC pour rayon.

Pour graduer l'instrument, on charge le plateau d'un poids connu, 2 décagrammes par exemple; l'axe de l'aiguille venant rencontrer l'horizontale CT en T, on divise CT en deux parties égales, et l'on continue la division au delà du point T, si cela est nécessaire; puis, par des droites partant du centre O, on reporte les points de division sur le secteur CE, où on les gradue de manière que le 0 soit en C et le 2 en D. La division du secteur CE à laquelle s'arrête l'aiguille indique en décagrammes le poids Q du corps placé dans le plateau. En subdivisant les divisions de la tangente CT en dix parties égales, et en reportant le tout sur le secteur CE, l'instrument indique le poids à moins de 1 gramme.

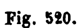
1673. *Travail absorbé par le frottement d'un corps qui glisse sur un autre.* P étant la pression normale à la surface de contact des deux corps, le frottement est fP (1629), et pour un espace E parcouru par chacun des corps relativement à l'autre, le travail absorbé est fPE (1471).

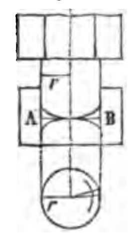
1674. *Travail absorbé par le frottement d'un tourillon sur son coussinet.*

P étant la réaction normale commune du tourillon et du coussinet, le frottement est fP, comme dans le cas précédent. Le travail absorbé par ce frottement est encore égal à fP multiplié par l'espace parcouru; ainsi, pour une révolution complète du tourillon, r étant le rayon de ce tourillon, le travail absorbé est

$$\mathcal{T} = fP \times 2\pi r = 2\pi r f P.$$

1675. *Travail absorbé par le frottement de la face horizontale* AB *d'un pivot sur sa crapaudine.*


Fig. 520.



Soit P la pression normale du pivot sur la crapaudine. On peut admettre que cette pression se répartit uniformément sur tous les éléments de la surface de contact; alors le travail total dû au frottement est égal à la somme des travaux dus aux frottements élémentaires de tous les éléments de la surface de contact.

Concevant la surface de contact divisée en éléments infiniment petits par des rayons, chacun de ces éléments peut être considéré comme étant un triangle. Considérant un de ces éléments triangulaires, le frottement agit avec la même intensité en chacun de ses points et suivant des directions que l'on peut, à la limite, considérer comme étant parallèles entre elles.

La résultante de tous ces frottements parallèles est égale à leur somme, et son point d'application est situé au centre de gravité du triangle élé-

mentaire, c'est-à-dire aux deux tiers du rayon à partir du centre (1569). Le travail absorbé par cette résultante est égal à celui absorbé par ses composantes, et il est, pour une révolution du pivot dont r est le rayon de la surface frottante,

$$fp \times 2\pi \times \frac{2}{3} r = fp \times \frac{4}{3} \pi r.$$

p pression normale sur l'élément triangulaire;
f coefficient de frottement;
fp frottement de l'élément triangulaire;
$2\pi \times \frac{2}{3} r$ espace parcouru par le point d'application de la résultante de frottement pour une révolution du pivot.

Tous les éléments triangulaires qui composent la surface frottante du pivot donnent chacun le même frottement et le même travail absorbé. Le travail absorbé par le frottement de tout le pivot est égal à la somme de tous ces travaux partiels, et il est, P étant la pression totale du pivot sur la crapaudine,

$$\mathcal{T} = f\mathrm{P} \times \frac{4}{3} \pi r = \frac{4}{3} \pi r f \mathrm{P}.$$

Le travail absorbé étant proportionnel à r, on le diminue en arrondissant les surfaces en contact, comme l'indique la figure 520.

1676. *Travail absorbé par le frottement de la surface plane d'un collet.*

Fig. 521.

r étant le rayon extérieur du collet et r' son rayon intérieur, appelant ρ son rayon moyen et l la largeur $r - r'$ de la couronne, on a

$$r = \rho + \frac{l}{2} \quad \text{et} \quad r' = \rho - \frac{l}{2}.$$

La surface de la couronne étant

$$\pi(r^2 - r'^2) = \pi\left[\left(\rho + \frac{l}{2}\right)^2 - \left(\rho - \frac{l}{2}\right)^2\right] = 2\pi\rho l,$$

et celle du cercle de rayon r',

$$\pi r'^2 = \pi\left(\rho - \frac{l}{2}\right)^2 = \pi\left(\rho^2 + \frac{l^2}{4} - \rho l\right),$$

P étant la pression sur la couronne, en supposant que la pression varie proportionnellement à la surface, la pression qui s'exercerait sur le cercle de rayon r' est

$$\mathrm{P}\,\frac{\rho^2 + \frac{l^2}{4} - \rho l}{2\rho l}.$$

La pression qui aurait lieu sur le cercle de rayon r est

$$P+P\frac{\rho^2+\frac{l^2}{4}-\rho l}{2\rho l}=P\left(1+\frac{\rho^2+\frac{l^2}{4}-\rho l}{2\rho l}\right)=P\frac{\rho^2+\frac{l^2}{4}+\rho l}{2\rho l}.$$

Le travail absorbé par le frottement de la couronne est égal au travail absorbé par le frottement qui aurait lieu sur la surface totale du cercle de rayon $r=\rho+\frac{l}{2}$, moins celui qui aurait lieu sur la surface du cercle de rayon $r'=\rho-\frac{l}{2}$; il est donc (1675)

$$\mathcal{T}=\frac{4}{3}\pi f P\frac{\rho^2+\frac{l^2}{4}+\rho l}{2\rho l}\left(\rho+\frac{l}{2}\right)-\frac{4}{3}\pi f P\frac{\rho^2+\frac{l^2}{4}-\rho l}{2\rho l}\left(\rho-\frac{l}{2}\right),$$

ou, effectuant les calculs et simplifiant,

$$\mathcal{T}=fP\times 2\pi\left(\rho+\frac{1}{12}\frac{l^2}{\rho}\right). \qquad (a)$$

Application. Soit à déterminer, pour une révolution, le travail absorbé par le frottement du collet d'un arbre en fonte graissé d'huile, contre la joue latérale d'un coussinet en bronze; la pression P du collet contre la joue du coussinet étant de 55 kilog., le grand rayon r, $0^m,06$, et le petit r', $0^m,05$.

Ayant

$$\rho=\frac{0,06+0,05}{2}=0^m,055,\quad l=0,06-0,05=0^m,01,$$

et (1629) $$f=0,08,$$

remplaçant les lettres par leurs valeurs dans la formule (a), il vient

$$\mathcal{T}=0,08\times 55\times 2\times 3,14\left(0,055+\frac{1}{12}\frac{(0,01)^2}{0,055}\right)=1^{km},52.$$

1677. *Travail absorbé par la roideur des cordes.*

Lorsqu'on vainc une résistance Q au moyen d'une corde qui s'enroule sur une poulie ou sur un tambour, la puissance P doit, pour l'équilibre dynamique, vaincre non-seulement la résistance Q et le frottement des tourillons, mais aussi une résistance due à la roideur de la corde, et dont l'effet consiste à infléchir la corde.

Appelant R cette résistance, ou mieux la force qui, d'après les expériences, en agissant à très-peu près tangentiellement au cylindre sur lequel s'enroule la corde, fait équilibre à cette résistance, l'équilibre dynamique donnera, pour un tour de poulie, en négligeant les frottements et en appelant D le diamètre de la poulie et d celui de la corde (1665),

$$\mathcal{T}_m=P\times\pi(D+d)=Q\times\pi(D+d)+R\times\pi D,\quad \text{d'où}\quad P=Q+R\frac{D}{D+d}.$$

Coulomb a fait quelques expériences pour déterminer la valeur de R. Navier, de la discussion des résultats obtenus par cet expérimentateur, a conclu l'expression suivante pour la valeur de R,

$$R = \frac{1}{D}(ad^{\mu} + bd^{\mu}Q). \qquad (a)$$

ad^{μ} quantité constante pour une même corde;
$bd^{\mu}Q$ quantité proportionnelle au poids élevé Q;
μ nombre qui varie avec l'usé de la corde.

Les expériences de Coulomb sont insuffisantes pour fixer la loi de variation de μ; cependant Navier fait $\mu = 2$ pour les cordes neuves d'un grand diamètre, $\mu = 1{,}5$ pour les cordes plus qu'à demi usées, et $\mu = 1$ pour les petites ficelles très-flexibles.

Navier a admis (ce que ne confirme pas le tableau suivant dû aux expériences de Coulomb) que pour une même résistance utile Q, la résistance due à la roideur d'une corde blanche varie en raison inverse du diamètre de la poulie ou du tambour, et qu'elle est directement proportionnelle à la puissance μ du diamètre de la corde.

De cette hypothèse, il résulte que pour deux cordes de diamètres différents, s'enroulant sur deux poulies de diamètres inégaux, et élevant des poids égaux, on a

$$R' = R\,\frac{D}{D'}\left(\frac{d'}{d}\right)^{\mu}. \qquad (b)$$

R' résistance due à la roideur de la corde de diamètre d', s'enroulant sur la poulie dont le diamètre est D';
R résistance due à la roideur de la corde de diamètre d, s'enroulant sur la poulie dont le diamètre est D.

Pour les cordes goudronnées, la roideur ne varie pas sensiblement avec le degré d'usé, et il est plus exact de remplacer, dans la formule précédente, le rapport $\frac{d'^{\mu}}{d^{\mu}}$ par celui $\frac{n'}{n}$, n' et n exprimant les nombres de fils de caret que contiennent les deux cordes; ce qui donne

$$R' = R\,\frac{D}{D'} \times \frac{n'}{n}.$$

Pour les cordes blanches mouillées, Navier admet que la roideur constante ad^{μ} est double de celle des mêmes cordes sèches, mais que la roideur bd^{μ} est la même que pour ces dernières. Les expériences ne paraissent pas assez nombreuses pour conclure d'une manière générale à cet égard.

Tableau de la roideur de différentes cordes s'enroulant sur une poulie de 1 mètre de diamètre, calculée par Navier, d'après les expériences de Coulomb.

DÉSIGNATION des cordes.	NOMBRES de fils de caret.	DIAMÈTRES des cordes.	POIDS des cordes par mètre de longueur.	ROIDEUR constante ad^{μ}.	ROIDEUR variable bd^{μ} par kilogr. de la charge Q.
		mèt.	kilogr.	kilogr.	kilogr.
Corde blanche neuve. .	30	0,0200	0,2834	0,22246	0,0097382
id.	15	0,0144	0,1448	0,063514	0,0055182
id.	6	0,0088	0,0522	0,0106038	0,0023804
Corde goudronnée. . .	30	0,0236	0,3326	0,3496	0,0125514
id.	15	0,0168	0,1632	0,105928	0,0060592
id.	6	0,0096	0,0693	0,021208	0,0025962

Ce tableau montre bien, comme nous l'avons fait remarquer, que les quantités ad^{μ} et bd^{μ} ne varient pas avec la grosseur de la corde suivant une même loi (ad^{μ} croît à peu près proportionnellement à la quatrième puissance du diamètre, et bd^{μ} proportionnellement à la deuxième puissance). Il est donc impossible que l'expression (a) représente la résistance R.

Application. A l'aide de ce tableau, et en admettant les formules précédentes, on peut résoudre tous les problèmes analogues au suivant:

Quelle est la résistance due à la roideur d'une corde blanche neuve de $0^{m},0254$ *de diamètre, s'enroulant sur une poulie de* $0^{m},40$ *de diamètre et élevant un poids de* 500 *kilogr.?*

La corde blanche neuve du tableau, dont le diamètre $0^{m},02$ s'approche le plus de $0^{m},0254$, donne, en remplaçant les lettres par leurs valeurs dans la formule (a),

$$R = \frac{1}{0,40}(0,22246 + 0,0097382 \times 500) = 12^{k},73.$$

Alors, pour la corde de $0^{m},0254$ de diamètre placée dans les mêmes circonstances, on aura [formule (b)]

$$R' = 12,73\left(\frac{0,0254}{0,02}\right)^{2} = 20^{k},53.$$

M. Morin, reprenant la discussion des résultats de Coulomb, a conclu, en appelant A et B les deux quantités que Navier a représentées par ad^{μ} et bd^{μ}:

1° Que pour les cordes en chanvre non goudronnées, dites *cordes blanches*, sèches ou imbibées d'eau, en bon état, A et B varient à peu près proportionnellement au carré du diamètre de la corde;

2° Que pour ces mêmes cordes à demi usées, A et B varient comme les puissances 1,5, c'est-à-dire comme les racines carrées des cubes des diamètres des cordes (505);

3° Que pour les cordes goudronnées, B est proportionnel au nombre des fils de caret de la corde.

De cette discussion, M. Morin a conclu les formules suivantes, dans lesquelles n désigne le nombre des fils de caret, et D le diamètre de la poulie :

1° *Cordes blanches :*

$$A = (0{,}000\,297 + 0{,}000\,245n)n \quad \text{et} \quad B = 0{,}000\,363n,$$

d'où

$$R = \frac{1}{D}\left[(0{,}000\,297 + 0{,}000\,245n)n + 0{,}000\,363nQ\right] \text{ kil.}$$

2° *Cordes goudronnées :*

$$A = (0{,}001\,4575 + 0{,}000\,346n)n \quad \text{et} \quad B = 0{,}000\,4181n,$$

d'où

$$R = \frac{1}{D}\left[(0{,}001\,4575 + 0{,}000\,346n)n + 0{,}000\,4181nQ\right] \text{ kil.}$$

Diamètres des cordes selon le nombre de fils de caret.

NOMBRES de fils.	DIAMÈTRES.	NOMBRES de fils.	DIAMÈTRES.	NOMBRES de fils.	DIAMÈTRES.	NOMBRES de fils.	DIAMÈTRES.
	mèt.		mèt.		mèt.		mèt.
6	0,0089	21	0,0168	36	0,0220	51	0,0261
9	0,0110	24	0,0179	39	0,0228	54	0,0268
12	0,0127	27	0,0190	42	0,0237	57	0,0276
15	0,0141	30	0,0200	45	0,0246	60	0,0283
18	0,0155	33	0,0210	48	0,0254		

Application. Soit à résoudre le même problème que page 718. Substituant les valeurs de A et B correspondant au diamètre $0^m,0254$ dans la formule

$$R = \frac{1}{D}(A + BQ),$$

on a, en remarquant que $n = 48$,

$$R = \frac{1}{0{,}40}\left[(0{,}000\,297 + 0{,}000\,245 \times 48)48 + 0{,}000\,363 \times 48 \times 500\right]$$

ou $R = \frac{1}{40}(0{,}578\,7504 + 0{,}017\,424 \times 500) = 23^k,23,$

au lieu de $20^k,53$ que nous avons trouvés en faisant usage de la table de Navier.

Pour un tour de poulie, le travail absorbé par cette résistance est

$$\mathcal{T}_n = \pi D \times 23^k,23 = 3{,}14 \times 0{,}40 \times 23{,}23 = 29^{km},18.$$

La puissance

$$P = Q + R\frac{D}{D+d} = 500 + 23,23\frac{0,40}{0,40+0,0254} = 521^k,84.$$

Le travail utile est, pour un tour de poulie,

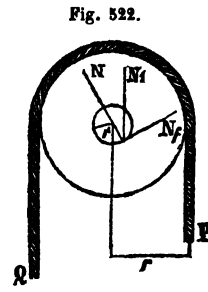
$$\mathcal{T}_u = \pi(D+d)\times Q = 1,336\times 500 = 668^{km},$$

et le travail moteur,

$$\mathcal{T}_m = P\pi(D+d) = \mathcal{T}_u + \mathcal{T}_n = 668 + 29,18 = 697^{km},18.$$

1678. *Équilibre dynamique de la poulie* (1545).

Fig. 522.



Négligeant le poids de la poulie, le système est soumis à l'action de cinq forces : la puissance P, la résistance Q, la réaction normale N du support sur le tourillon ou l'œil de la poulie, le frottement Nf des tourillons et la roideur $\frac{1}{D}(A+BQ)$ de la corde (1677).

Pour un tour de poulie, l'équilibre dynamique donne (1665), en remarquant que le travail de la réaction normale N est nul (1471),

$$P\times 2\pi r = Q\times 2\pi r + Nf\times 2\pi r' + \frac{\pi D}{D}(A+BQ);$$

d'où l'on tire

$$P = Q + Nf\frac{r'}{r} + \frac{1}{2r}(A+BQ). \qquad (1)$$

Afin d'avoir une relation déterminée entre P et Q, il faut faire disparaître N de cette équation.

Remarquons que si l'on désigne par N_1 la résultante des deux forces ou réactions N et Nf, ces deux réactions étant perpendiculaires entre elles, on a (1499)

$$N_1 = \sqrt{N^2 + N^2f^2} = N\sqrt{1+f^2}.$$

La poulie étant en équilibre sous l'action des forces P, Q, N_1 puisqu'elle ne prend aucun mouvement de translation, c'est que ces trois forces se font équilibre, et que par conséquent N_1 est égale et directement opposée à la résultante de P et Q. Appelant ω l'angle de ces deux forces, on a donc (1499)

$$N_1 \quad \text{ou} \quad N\sqrt{1+f^2} = \sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\omega}, \qquad (2)$$

d'où

$$N = \frac{\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\omega}}{\sqrt{1+f^2}}.$$

Remplaçant N par cette valeur dans la formule (1), on a, en faisant $\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}=f_1$,

$$P = Q + \frac{1}{2r}(A + BQ) + f_1 \frac{r'}{r} \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \omega}. \qquad (3)$$

Quand $\omega = 0$, c'est-à-dire quand les deux forces P et Q sont parallèles, on a $\cos \omega = 1$, la formule (2) donne

$$N_1 = P + Q,$$

et la formule (3) devient

$$P = Q + \frac{1}{2r}(A + BQ) + f_1 \frac{r'}{r}(P + Q),$$

d'où

$$\frac{P(r - f_1 r')}{r} = Q + \frac{1}{2r}(A + BQ) + f_1 \frac{r'}{r} Q,$$

ou

$$P(r - f_1 r') = \frac{1}{2} A + \left(r + \frac{B}{2} + f_1 r'\right) Q;$$

ce qui donne

$$P = \frac{1}{r - f_1 r'}\left[\frac{1}{2} A + \left(r + \frac{1}{2} B + f_1 r'\right) Q\right]. \qquad (a)$$

Pour les données du n° 1677, c'est-à-dire pour $Q = 500$ kil., un diamètre de poulie $D = 0^m,40$, et un diamètre de corde $d = 0^m,0254$, d'où $r = 0^m,2127$, supposant $r' = 0^m,01$, on a d'abord

$$f_1 = \frac{0,15}{\sqrt{1 + 0,15 \times 0,15}} = 0,1484,$$

et par suite

$$P = \frac{1}{0,2127 - 0,1484 \times 0,01}\left[\frac{0,5787504}{2} + (0,2127 + \frac{0,017424}{2} + 0,1484 \times 0,01)500\right] = 529^k.$$

Remarque. La formule (*a*) fait voir que la valeur de P se compose de deux parties : la première $\frac{A}{2(r - f_1 r')}$, qui est constante pour une même poulie et une même corde, et que l'on peut représenter par α; la deuxième $\frac{(r + \frac{1}{2} B + f_1 r')Q}{r - f_1 r'}$, qui est proportionnelle à Q et que l'on peut représenter par βQ; ce qui permet de mettre la valeur de P sous la forme

$$P = \alpha + \beta Q.$$

Fig. 523.

La *fig.* 523 représente une poulie à *gorge*, montée dans une *chape* ou espèce d'étrier en fer. Un crochet sert à suspendre l'engin à un point fixe quand on en veut faire usage. Le pourtour de la poulie est creusé en gorge afin que la corde ou la chaîne, à l'aide de laquelle on élève les fardeaux, ne s'échappe pas latéralement.

1679. *Équilibre dynamique de la moufle ou du palan, en négligeant le poids de la corde et celui des poulies, le frottement latéral des poulies, et en supposant que ces poulies ont même diamètre et que les cordons sont parallèles.*

Fig. 524.



Appelant :

P la puissance, c'est-à-dire la tension du cordon libre ou *garant*;

Q la résistance utile;

$t_1, t_2, t_3 \ldots t_n$ les tensions des divers cordons dits *courants* allant d'une chape à l'autre;

n le nombre des cordons allant d'une chape à l'autre;

α et β les fonctions déterminées comme à la remarque précédente,

on a (1678. Remarque) :

$$t_2 = \alpha + \beta t_1 \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{\alpha}{\beta - 1}(\beta - 1) + \beta t_1;$$

$t_3 = \alpha + \beta t_2$ ou, en remplaçant t_2 par sa valeur,

$$t_3 = \alpha + \alpha\beta + \beta^2 t_1 = \alpha(1+\beta) + \beta^2 t_1 = \frac{\alpha}{\beta - 1}(\beta^2 - 1) + \beta^2 t_1.$$

On passe à cette dernière valeur de t_3 en divisant α par $\beta - 1$ et en multipliant $(1+\beta)$ par $(\beta - 1)$, afin de ne rien changer (444).

$$t_4 = \alpha + \beta t_3 = \alpha(1 + \beta + \beta^2) + \beta^3 t_1 \ldots\ldots = \frac{\alpha}{\beta - 1}(\beta^3 - 1) + \beta^3 t_1.$$

On passe de même à cette dernière valeur de t_4 en divisant α par $(\beta - 1)$ et en multipliant $(1 + \beta + \beta^2)$ par $(\beta - 1)$ et simplifiant.

On obtient par les mêmes calculs

$$t_n = \alpha + \beta t_{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{\alpha}{\beta - 1}(\beta^{n-1} - 1) + \beta^{n-1} t_1,$$

$$P = \alpha + \beta t_n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{\alpha}{\beta - 1}(\beta^n - 1) + \beta^n t_1.$$

Ces valeurs obtenues, remarquons qu'on a

$$Q = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots\ldots + t_n.$$

Remplaçant $t_2, t_3 \ldots\ldots t_n$ par leurs valeurs, il vient

$$Q = \frac{\alpha}{\beta - 1}(\beta - 1 + \beta^2 - 1 + \ldots\ldots \beta^{n-1} - 1) + (1 + \beta + \beta^2 + \ldots \beta^{n-1})t_1 =$$

$$\frac{\alpha}{\beta - 1}(1 + \beta + \beta^2 + \ldots\ldots + \beta^{n-1} - n) + (1 + \beta + \beta^2 + \ldots + \beta^{n-1})t_1.$$

Multipliant et divisant la quantité $(1 + \beta + \beta^2 + \ldots + \beta^{n-1})$ par $(\beta - 1)$ et simplifiant, on a

$$Q = \frac{\alpha}{\beta - 1}\left(\frac{\beta^n - 1}{\beta - 1} - n\right) + \frac{\beta^n - 1}{\beta - 1}t_1.$$

Ayant les valeurs de P et Q en fonction de t_1, il suffit d'éliminer t_1 pour avoir une relation déterminée entre P et Q. Or, de l'équation précédente on tire

$$t_1 = Q\frac{\beta - 1}{\beta^n - 1} - \frac{\alpha}{\beta^n - 1}\left(\frac{\beta^n - 1}{\beta - 1} - n\right) = Q\frac{\beta - 1}{\beta^n - 1} + \alpha\left(\frac{n}{\beta^n - 1} - \frac{1}{\beta - 1}\right).$$

Substituant cette valeur dans celle de P, on a

$$P = \alpha\frac{\beta^n - 1}{\beta - 1} + \alpha\left(\frac{n\beta^n}{\beta^n - 1} - \frac{\beta^n}{\beta - 1}\right) + \frac{(\beta - 1)\beta^n}{\beta^n - 1}Q,$$

ou, en mettant α en facteur commun et simplifiant,

$$P = \alpha\left(\frac{n\beta^n}{\beta^n - 1} - \frac{1}{\beta - 1}\right) + \frac{(\beta - 1)\beta^n}{\beta^n - 1}Q.$$

En négligeant toutes les résistances passives, on aurait

$$t_1 = t_2 = \ldots\ldots = t_n = P \quad \text{et} \quad Q = t_1 + t_2 + \ldots\ldots + t_n = nP.$$

Ainsi, la tension de chacun des cordons serait égale à la puissance P, et la résistance Q serait égale à la puissance P multipliée par le nombre n des cordons allant d'une chape à l'autre.

La vitesse de Q est à celle de P dans le rapport $\frac{P}{Q} = \frac{P}{nP} = \frac{1}{n}$, c'est-à-dire que la vitesse de Q est égale à celle de P divisée par le nombre des cordons allant d'une chape à l'autre. Il est évident que, sauf l'allongement inégal des cordons sous des charges différentes, le rapport des vitesses de Q et de P est le même, que l'on tienne ou non compte des résistances passives.

La *fig.* 525 représente un palan à trois poulies dans chaque chape. La moufle supérieure est munie d'un crochet A qui sert à suspendre l'engin à un point fixe, la moufle mobile est aussi munie d'un crochet M auquel on suspend le fardeau à élever.

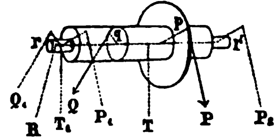
On dispose encore quelquefois le palan comme l'indique la *fig.* 526; les poulies, appelées *mouflettes*, sont de diamètres inégaux. Cette disposition est moins commode que la précédente.

Fig. 525.

Fig. 526.

1680. *Treuil* (1546). En négligeant les frottements des tourillons du treuil et la roideur de la corde (1677), on a, pour l'équilibre dynamique,

Fig. 527.



$$P \times 2\pi p = Q \times 2\pi q, \quad \text{d'où} \quad Pp = Qq,$$

comme au n° 1550.

P puissance ou force motrice agissant dans un plan normal à l'axe du treuil;

p bras de levier de P par rapport à l'axe du treuil;

Q résistance vaincue agissant dans un plan normal à l'axe du treuil;

q bras de levier de Q par rapport à l'axe du treuil.

Les forces P et Q peuvent ne pas être parallèles entre elles.

En tenant compte du frottement des tourillons du treuil, la formule

précédente devient (1674)

$$Pp = Qq + fRr + fR'r'.$$

f coefficient de frottement des tourillons sur leurs coussinets;
r et r' rayons des tourillons;
R et R' résultantes des composantes des trois forces: le poids du treuil, la puissance P et la résistance Q, décomposées chacune en deux autres agissant dans des plans normaux à l'axe au milieu de la longueur des tourillons r et r' (1492, 1518, 1552);
fRr et $fR'r'$ moments des frottements des tourillons.

Comme R et R' dépendent de Q, on résoudra l'équation précédente par tâtonnement: on déterminera d'abord Q en négligeant le frottement des tourillons; ayant Q, on déterminera les valeurs correspondantes de R et R', par les décompositions indiquées plus haut et figure 527; ces valeurs, substituées dans l'équation précédente, donneront une deuxième valeur de Q plus exacte que la première. Opérant sur cette seconde valeur de Q comme sur la première, on obtiendra une troisième valeur s'approchant encore plus de la vérité, et en continuant ainsi de suite, on obtiendra pour Q une valeur aussi exacte qu'on voudra. Dans la pratique, on pourra généralement considérer la deuxième valeur de Q comme suffisamment approchée de la valeur réelle.

Les points d'application de P et Q décrivant dans le même temps quelconque des arcs qui correspondent au même angle au centre, les espaces E et e parcourus par ces points d'application sont proportionnels aux rayons ou bras de levier p et q:

$$\frac{E}{e} = \frac{p}{q}.$$

Comme, s'il était possible que toutes les résistances passives fussent nulles, on aurait

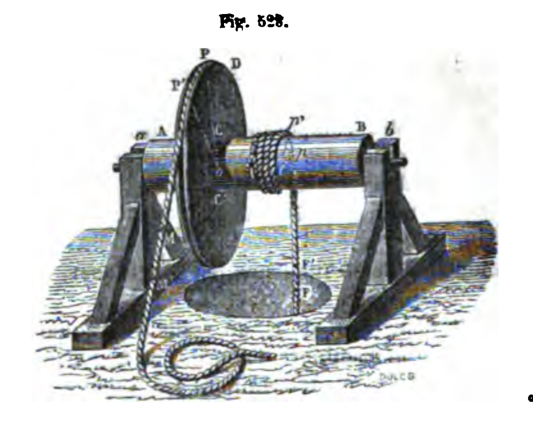
$$\frac{P}{Q} = \frac{q}{p},$$

on aurait donc aussi

$$\frac{P}{Q} = \frac{e}{E}.$$

Dans la fig. 528 la puissance agit sur une corde M enroulée sur une

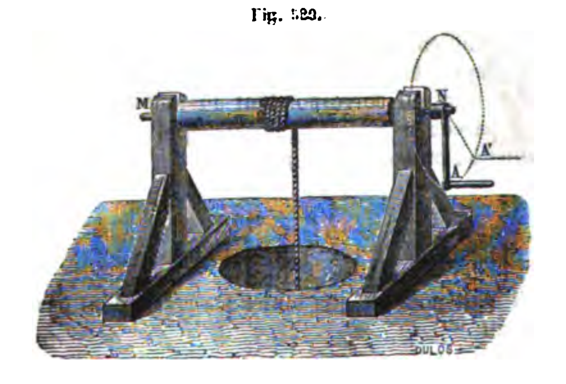
Fig. 528.



poulie D, qui est ordinairement un tambour, et la résistance sur une autre corde F qui s'enroule sur l'arbre AB du treuil.

Dans le *treuil de puits* (fig. 529), la puissance, au lieu d'agir par

Fig. 529.



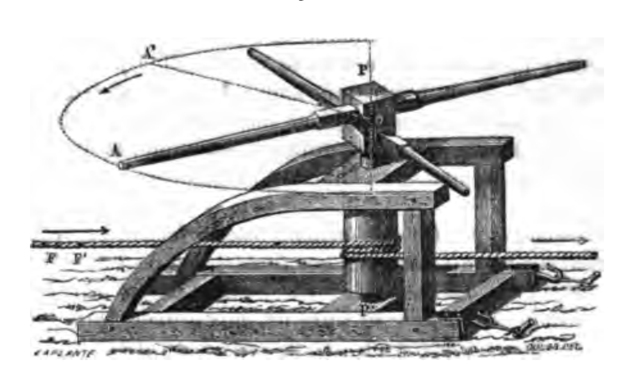
l'intermédiaire d'une corde enroulée sur un tambour, agit sur une manivelle NA montée à l'extrémité de l'arbre MN du treuil.

La fig. 530 représente le treuil dont les carriers se servent pour élever les pierres par les puits. Sur l'arbre est montée une roue en bois de 6 à 8 mètres de diamètre, dans la jante A de laquelle sont implantées des chevilles en bois ou en fer. La puissance est produite par des hommes qui tirent avec les mains ou poussent avec les pieds, sur les chevilles, à peu près à la hauteur de l'axe.

Fig. 530.

1681. *Cabestan.* Si, outre les forces P et Q qui sollicitent le treuil en agissant dans des plans normaux à son axe (1680), une force F agit pa-

Fig. 531.



rallèlement à cet axe, comme cela arrive dans les cabestans (*fig.* 531), qui ne sont autre chose que des treuils à axe vertical, dont le poids, au lieu de se reporter sur le contour des tourillons, agit sur la face horizontale du pivot inférieur, la formule posée pour le treuil (1680), devient

$$Pp = Qq + fRr + fR'r' + f'F\,\frac{2}{3}\,r''.$$

$f'F\,\frac{2}{3}\,r''$ moment du frottement de la face horizontale du pivot (1675);

f' coefficient de frottement qui peut être différent de celui du pourtour du pivot;

r'' rayon de la surface frottante horizontale du pivot.

1682. *Équilibre dynamique d'un corps glissant par son poids sur un plan incliné* (1630).

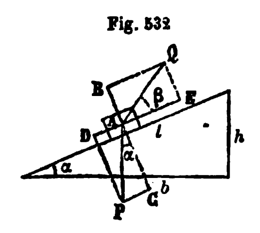


Fig. 532

Le corps est soumis à l'action de deux forces: son poids P, qui est la puissance, et le frottement, qui est la résistance. Le corps parcourant un certain espace, la longueur l du plan incliné par exemple, ce même espace est parcouru par le point d'application de la puissance P et par celui du frottement.

La projection de P sur le déplacement l étant $AD = P \sin \alpha$, son travail est $lP \sin \alpha$. La pression normale du corps sur le plan étant $AC = P \cos \alpha$, le frottement est $fP \cos \alpha$ (1629), et son travail, $lfP \cos \alpha$. L'équation d'équilibre dynamique est alors (1665)

$$lP \sin \alpha = lfP \cos \alpha \quad \text{ou} \quad P \sin \alpha = fP \cos \alpha,$$

d'où

$$f = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tang \alpha.$$

Ainsi, il y aura équilibre dynamique lorsque la tangente de l'angle d'inclinaison du plan à l'horizon sera égale au coefficient de frottement f.

De là résulte un moyen de déterminer le coefficient de frottement de deux corps. Formant le plan incliné de l'un des corps et le mobile de l'autre corps; inclinant doucement le plan incliné jusqu'à ce que le mobile soit prêt à se mettre en mouvement, c'est-à-dire jusqu'au point où le mobile conserve le léger mouvement qu'on lui imprime, à ce point le mobile est en équilibre dynamique, et la tangente de l'angle α que fait le plan avec l'horizon est égale au coefficient de frottement f.

Supposons que le mobile soit sollicité non-seulement par son poids et par le frottement, mais aussi par une force Q, *qui peut être la résultante de plusieurs autres, qui est située dans le plan vertical* PAE *contenant le centre de gravité du corps et la ligne de plus grande pente du plan incliné, et que nous considérerons comme résistance utile.*

Les points d'application de toutes les forces parcourent encore le même espace. Évaluons en particulier le travail produit par chacune des forces pour le même espace parcouru l.

Comme dans le cas précédent, le travail de la puissance P est $lP \sin \alpha$.

La projection de la résistance Q sur l est $Q \cos \beta$, et le travail qu'elle absorbe est $lQ \cos \beta$.

La pression du corps sur le plan est égale à la composante $P \cos \alpha$ du poids P, normale au plan, moins la composante normale $Q \sin \beta$ de la force Q, cette dernière composante tendant dans le cas de la figure à soulever le corps. Le frottement est alors $(P \cos \alpha - Q \sin \beta) f$, et le travail absorbé par ce frottement $(P \cos \alpha - Q \sin \beta) fl$. L'équation d'équilibre dynamique est donc, en supprimant le facteur commun l,

$$P \sin \alpha = Q \cos \beta + f(P \cos \alpha - Q \sin \beta). \qquad (1)$$

Si le mobile avait remonté le plan incliné au lieu de le descendre, Q aurait été la puissance et P la résistance utile, et l'on aurait eu, pour l'équilibre dynamique,

$$Q \cos \beta = P \sin \alpha + f(P \cos \alpha - Q \sin \beta).$$

Suivant la valeur de l'angle β, $Q \cos \beta$ est une puissance ou une résistance qui s'ajoute à la puissance $P \sin \alpha$ ou s'en retranche, et $Q \sin \beta$ se retranche de $P \cos \alpha$ ou s'y ajoute.

Dans le cas où l'angle α est nul, c'est-à-dire quand le plan est horizontal, $\sin \alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$, $Q \cos \beta$ est seul puissance, et l'équation (1) devient, pour l'équilibre dynamique,

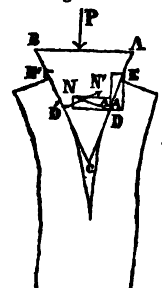
$$Q \cos \beta = f(P - Q \sin \beta).$$

Si de plus l'angle β était nul, c'est-à-dire si la puissance Q agissait parallèlement au plan horizontal, on aurait $\sin \beta = 0$, $\cos \beta = 1$, et l'équation d'équilibre dynamique deviendrait

$$Q = fP.$$

1683. *Équilibre dynamique du coin.*

Fig. 533.



Le coin est sollicité par cinq forces :

La puissance P, qui le sollicite suivant son mouvement;

Les réactions N et N′ normales aux surfaces de contact;

Les frottements Nf et $N'f$ des surfaces de contact.

Chacune de ces quatre dernières forces se décompose en deux : l'une parallèle à P, mais agissant en sens contraire de cette force, et l'autre perpendiculaire à P :

	N	en N cos A	parallèle à P	et N sin A	perpend. à P,
DE =	N*f*	en N*f* sin A	*id.*	et N*f* cos A	*id.*
	N′	en N′ cos B	*id.*	et N′ sin B	*id.*
DE′ =	N′*f*	en N′*f* sin B	*id.*	et N′*f* cos B	*id.*

Le coin parcourant un certain espace e, remarquant que les points d'application de toutes les forces parcourent ce même espace suivant les forces, et que les forces perpendiculaires à P étant normales à cet espace leur travail est nul, on a pour l'équilibre dynamique

$$eP = eN\cos A + eNf\sin A + eN'\cos B + eN'f\sin B; \qquad (1)$$

équation dans laquelle on peut supprimer e.

Sur un axe perpendiculaire à P, la projection de l'espace parcouru e étant nulle, la somme des projections des forces sur cet axe est nulle (1611), et l'on a, en négligeant les forces perpendiculaires à l'axe, dont les projections sont chacune égales à zéro,

$$N\sin A + N'f\cos B = N'\sin B + Nf\cos A \qquad (a)$$

ou

$$N(\sin A - f\cos A) = N'(\sin B - f\cos B).$$

Cette équation donne la relation qui existe entre les deux forces N et N′, ainsi l'on en tire

$$\frac{N}{N'} = \frac{\sin B - f\cos B}{\sin A - f\cos A}. \qquad (2)$$

Remplaçant successivement dans l'équation (1) N et N′ par leurs valeurs tirées de cette dernière, on en conclurait respectivement P en fonction de N′ ou de N.

Supposant $f=0$, c'est-à-dire que le frottement est nul, les formules (1) et (2) deviennent

$$P = N\cos A + N'\cos B \qquad (1')$$

et

$$\frac{N}{N'} = \frac{\sin B}{\sin A}. \qquad (2')$$

Remplaçant dans l'équation (1′) N par sa valeur tirée de l'équation (2′), il vient

$$P = N'\left(\frac{\sin B\cos A}{\sin A} + \cos B\right).$$

Réduisant au même dénominateur, on a, en remarquant que

$$\sin B\cos A + \cos B\sin A = \sin(A+B) = \sin C, \qquad (1098,\ 1111)$$

$$P = N'\frac{\sin C}{\sin A} \quad \text{ou} \quad \frac{P}{N'} = \frac{\sin C}{\sin A}.$$

Cette relation et celle (2) font voir que l'on a

$$\frac{P}{\sin C} = \frac{N}{\sin B} = \frac{N'}{\sin A}, \qquad (A)$$

ou encore que ces forces sont entre elles comme les côtés AB, AC, BC du coin, qui leur sont respectivement perpendiculaires (1123).

Dans le cas où l'angle B est droit, on a $\sin B = 1$, $\cos B = 0$, et les équations (1) et (2) deviennent

$$P = N\cos A + Nf\sin A + N'f \qquad (1'')$$

et

$$\frac{N}{N'} = \frac{1}{\sin A - f\cos A}. \qquad (2'')$$

Ordinairement dans la pratique $A = B$; alors on a $N = N'$, et la formule (1) devient

$$P = 2N(\cos A + f\sin A). \qquad (1''')$$

S'il s'agissait de retirer le coin, on aurait encore les formules (1) et (a), dans lesquelles P, Nf et $N'f$ auraient changé de signes; ainsi ces formules seraient

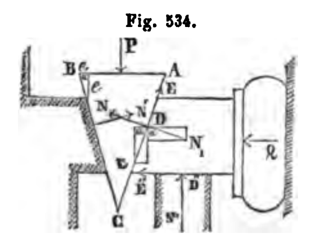
$$-P = N\cos A - Nf\sin A + N'\cos B - N'f\sin B, \qquad (1)$$
$$N\sin A - N'f\cos B = N'\sin B - Nf\cos A. \qquad (a)$$

Équations desquelles on déduirait comme précédemment, pour les cas particuliers que nous avons examinés, les relations entre les forces.

La suite de rapports (A) montre que quand le coin est en équilibre, il existe entre les forces P, N, N' qui le sollicitent et les sinus des angles du triangle formé par le coin, les mêmes relations qu'entre trois forces en équilibre autour d'un même point et les angles du triangle des forces (1499). Ainsi, appliquant les forces P, N, N' parallèlement à elles-mêmes, en un même point, et traçant le polygone des forces (1492), ce polygone se fermera de lui-même, c'est-à-dire donnera une résultante nulle, et il sera, dans le cas qui nous occupe, un triangle semblable à celui ABC (1613).

1684. *Équilibre dynamique de la presse à coin.*

Fig. 534.



Les circonstances dans lesquelles se trouve le coin ABC sont absolument les mêmes qu'au numéro précédent; ainsi, supposant l'angle $A = B = \alpha$, la formule (1''') devient

$$P = 2N(\cos\alpha + f\sin\alpha). \qquad (1)$$

Considérant maintenant le bloc interposé entre le coin et la matière, il est sollicité par cinq forces :

1° La pression N_1 normale à la surface de contact avec le coin ;
2° Le frottement $DE_1 = N_1 f$ du coin sur sa surface de contact.

Ces deux forces ne sont que les réactions des forces de même nom N et Nf qui sollicitent le coin ; par conséquent, elles leur sont égales et directement opposées.

3° La réaction N'' du support D'' sur le bloc;

4° Le frottement $D''E'' = N''f$ du support D'' contre le bloc;

5° La résistance utile Q qu'oppose la matière à comprimer.

Le mouvement du bloc ayant lieu suivant la direction de la force Q, décomposons chacune des cinq forces qui le sollicitent en deux autres, l'une parallèle et l'autre perpendiculaire à Q; ainsi :

N_1	en	$N_1 \sin\alpha$	parallèle à Q,	et	$N_1 \cos\alpha$	perpendiculaire à Q;
$N_1 f$	en	$N_1 f \cos\alpha$	*id.*		$N_1 f \sin\alpha$	*id.*
N''	en	0	*id.*		N''	*id.*
$N''f$	en	$N''f$	*id.*		0	*id.*
Q	en	Q	*id.*		0	*id.*

Pour un déplacement quelconque $2e'$ du bloc, remarquant que les points d'application de toutes les forces parallèles à Q parcourent cet espace suivant ces forces, et que le travail de chacune des forces perpendiculaires à Q est nul, on a pour l'équilibre dynamique du bloc

$$N_1 \sin\alpha = N_1 f \cos\alpha + N''f + Q. \qquad (2)$$

Sur un axe perpendiculaire à Q ou à e', les projections des forces donnent (1611, 1683)

$$N_1 \cos\alpha + N_1 f \sin\alpha - N'' = 0.$$

Remplaçant dans la formule (2) N'' par sa valeur tirée de cette dernière équation, on a, en réunissant les termes en N_1,

$$N_1(\sin\alpha - 2f\cos\alpha - f^2 \sin\alpha) = Q.$$

L'équation (1) donne

$$N \text{ ou } N_1 = \frac{P}{2(\cos\alpha + f\sin\alpha)}.$$

Substituant cette valeur de N_1 en fonction de P dans l'équation précédente, on en conclut

$$P = \frac{2(\cos\alpha + f\sin\alpha)}{\sin\alpha - 2f\cos\alpha - f^2\sin\alpha} Q.$$

Divisant par $\cos\alpha$ les deux membres de la fraction, et faisant $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tang}\alpha$ (1107), on a

$$P = \frac{2(1 + f\operatorname{tang}\alpha)}{\operatorname{tang}\alpha - 2f - f^2\operatorname{tang}\alpha} Q. \qquad (2)$$

Pour $Q = 1000$ kil., $\alpha = 87°10'$, d'où $\operatorname{tang}\alpha = 20{,}205553$, ou sensi-

blement 20,2, et $f = 0,16$, qui convient au chêne frotté de savon sec glissant sur chêne, les fibres étant parallèles, l'équation précédente donne

$$P = \frac{2(1 + 0,16 \times 20,2)}{20,2 - 2 \times 0,16 - 0,16 \times 0,16 \times 20,2} \times 1000 = 437^k.$$

Telle est la relation qui doit exister entre la puissance P et la résistance utile Q pour qu'il y ait équilibre dynamique, c'est-à-dire pour que le moindre effort mette la presse en mouvement, et que ce mouvement se conserve uniforme quand cet effort additionnel cesse son action. Il est évident qu'un tel mouvement ne peut se réaliser qu'autant que la résistance Q reste constante, ce qui n'a pas lieu quand on comprime des matières; mais, dans toutes les positions, les valeurs de P et Q sont liées par la relation précédente.

L'application qui vient d'être faite montre que la presse à coin est peu avantageuse pour obtenir de grandes compressions, et qu'il ne convient guère de l'employer quand la force motrice est une simple pression, et non le résultat d'un choc.

Relation entre le travail moteur et le travail utile résistant.

Pour un abaissement e du coin, le bloc comprimant avançant de $2e'$, les travaux moteur et utile sont

$$P \times e \quad \text{et} \quad Q \times 2e'.$$

On a (1122)

$$e = e' \operatorname{tang} \alpha. \qquad (3)$$

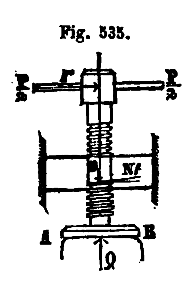
Multipliant membre à membre les équations (2) et (3), on obtient

$$P \times e = \frac{\operatorname{tang}\alpha + f \operatorname{tang}^2\alpha}{\operatorname{tang}\alpha - 2f - f^2 \operatorname{tang}\alpha} Q \times 2e'.$$

Formule donnant le travail moteur Pe en fonction du travail utile $Q \times 2e'$.

1688. *Équilibre dynamique de la presse à vis à filets carrés.*

Fig. 535.



Appelons :

P la puissance agissant dans un plan perpendiculaire à l'axe de la vis; nous supposons P répartie uniformément autour de l'axe de la vis, afin qu'elle ne fasse naître aucune pression contre la surface latérale des filets; ainsi la puissance est divisée, par exemple, en deux forces $\frac{1}{2}$ P formant un couple dont le bras de levier est divisé en deux parties égales par l'axe (1521);

r le bras de levier de la puissance P;

r' le rayon moyen de la surface hélicoïdale en contact.

Nous supposerons la surface hélicoïdale réduite à une hélice travaillante ayant r' pour rayon (1294).

α l'angle que fait l'hélice moyenne, ou mieux la tangente à cette hélice avec le plan perpendiculaire à l'axe;

h le pas de l'hélice, c'est la distance d'axe en axe de deux filets consécutifs;

Q la résistance utile que la matière oppose au mouvement de translation de la vis; elle agit suivant l'axe de la vis.

Négligeant le frottement de l'extrémité de la vis sur la surface AB, la vis peut être considérée comme étant soumise à l'action de six forces :

1° P puissance;

2° Q résistance utile;

Appelant N la réaction normale aux surfaces de contact de l'écrou sur la surface hélicoïdale des filets, elle se décompose en deux forces :

3° $N \cos\alpha$ agissant parallèlement à l'axe de la vis;

4° $N \sin\alpha$ agissant dans un plan perpendiculaire à l'axe;

Le frottement Nf de la surface hélicoïdale se décompose également en deux forces :

5° $Nf \sin\alpha$ agissant parallèlement à l'axe;

6° $Nf \cos\alpha$ agissant dans un plan perpendiculaire à l'axe.

Établissons les conditions d'équilibre dynamique pour une révolution de la vis. Remarquons que, excepté le point d'application de la force Q, ceux des autres forces décrivent des hélices, et que leur mouvement peut être décomposé en deux, l'un parallèle à l'axe, et l'autre circulaire autour de l'axe. Considérant ce premier mouvement, h étant l'espace parcouru par les points d'application de toutes les forces, on a pour l'équilibre dynamique, en remarquant que le travail de chacune des forces agissant perpendiculairement à h est nul,

$$hN\cos\alpha - hNf\sin\alpha - hQ = 0,$$

d'où

$$N = \frac{Q}{\cos\alpha - f\sin\alpha}.$$

Pour le deuxième mouvement, on a pour l'équilibre dynamique, en remarquant que le travail de chacune des forces agissant suivant l'axe est nul,

$$P \times 2\pi r - N\sin\alpha \times 2\pi r' - Nf\cos\alpha \times 2\pi r' = 0; \qquad (1)$$

d'où, en supprimant 2π et en remplaçant N par sa valeur,

$$P = Q\frac{r'}{r} \times \frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\cos\alpha - f\sin\alpha}.$$

Divisant les deux termes de la dernière fraction par $\cos\alpha$ et faisant

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha, \qquad (1107)$$

on a

$$P = Q\frac{r'}{r} \times \frac{\tang\alpha + f}{1 - f\tang\alpha}.$$

On peut donner à cette valeur de P une autre forme.

Remarquant qu'en développant le cylindre de rayon r', chaque spire de l'hélice devient l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont $2\pi r'$ et h (1299), on a (1090)

$$\tang\alpha = \frac{h}{2\pi r'}.$$

Substituant cette valeur dans celle de P, il vient, en réduisant au même dénominateur et en supprimant le dénominateur $2\pi r'$ commun aux deux termes de la fraction,

$$P = Q\frac{r'}{r} \times \frac{h + 2\pi r' f}{2\pi r' - fh}.$$

Si l'on néglige le frottement, ce qui revient à faire $f = 0$, on a

$$P = Q\frac{r'}{r} \times \frac{h}{2\pi r'} = Q\frac{h}{2\pi r}.$$

En tenant compte du travail absorbé par le frottement de l'extrémité de la vis sur la surface AB, remarquant que la pression sur cette surface est Q, si le coefficient de frottement est le même que pour les filets de la vis, le frottement est Qf, et le travail absorbé pour une révolution de la vis est $\frac{4}{3}\pi r'' Qf$ (r'' rayon de la surface frottante (1675)). La formule (1) devient alors

$$P \times 2\pi r - N\sin\alpha \times 2\pi r' - Nf\cos\alpha \times 2\pi r' - \frac{4}{3}\pi r'' Qf;$$

d'où, en effectuant les mêmes opérations que dans le cas précédent,

$$P = Q\frac{r'}{r} \times \frac{\tang\alpha + f}{1 - f\tang\alpha} + Q \times \frac{2}{3} f \frac{r''}{r},$$

ou

$$P = Q\left(\frac{r'}{r} \times \frac{\tang\alpha + f}{1 - f\tang\alpha} + \frac{2}{3} f \frac{r''}{r}\right). \qquad (a)$$

Remplaçant $\tang\alpha$ par $\frac{h}{2\pi r'}$, on a

$$P = Q\left(\frac{r'}{r} \times \frac{h + 2\pi r' f}{2\pi r' - fh} + \frac{2}{3} f \frac{r''}{r}\right). \qquad (b)$$

Application. Pour $Q = 9000$ kil., $r = 1^m,00$, $r' = 0^m,034$, $r'' = 0^m,025$, $h = 0^m,016$ et $f = 0,08$, la formule précédente donne

$$P = 9000 \left(\frac{0,034}{1} \times \frac{0,016 + 2 \times 3,14 \times 0,034 \times 0,08}{2 \times 3,14 \times 0,034 - 0,08 \times 0,016} + \frac{2 \times 0,08 \times 0,025}{3}\right)$$

ou

$$P = 9000 \times 0,006632 = 59^{k},69.$$

Quand on ne tient pas compte du frottement du bout de la vis, on a

$$P = 9000 \times 0,005299 = 47^{k},69.$$

Ce qui montre que ce frottement n'est pas négligeable.

Fig. 536.

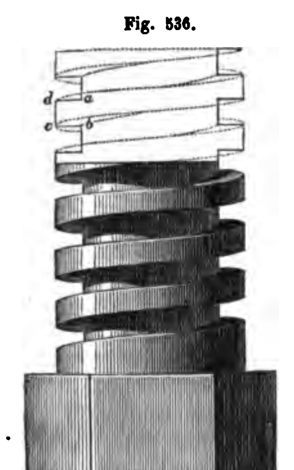
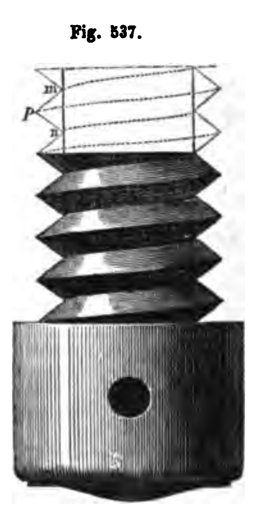


Fig. 537.



Dans les vis à filets carrés (*fig.* 536), la section *abcd* du filet par un plan passant par l'axe de la vis est ordinairement un carré.

1686. *Équilibre dynamique de la vis à filets triangulaires.* Le plan méridien passant par l'axe de la vis coupe le filet suivant un triangle isocèle *mnp* (*fig.* 537).

Opérant comme pour la vis à filets rectangulaires, on obtient des équations semblables à celles du numéro précédent. La légère différence vient de ce que la pression normale N n'étant plus située dans le plan tangent au cylindre de rayon r', on la décompose d'abord en deux forces, l'une $N \cos \beta$ située dans ce plan, et l'autre $N \sin \beta$ normale à ce plan : cette dernière rencontrant l'axe de la vis et lui étant perpendiculaire, elle ne produit aucun travail.

Comme l'angle β que forme la normale N avec le plan tangent est égal à la moitié de l'angle au sommet du triangle isocèle générateur du filet, c'est-à-dire à l'angle formé par chacun des côtés égaux *pm*, *pn* du triangle avec la hauteur, on a, en désignant par a le côté, et par s la hauteur, qui est la saillie du filet sur le noyau de la vis, $\cos \beta = \frac{s}{a}$, et, par suite, en représentant $\frac{s}{a}$ par m, $N \cos \beta = Nm$.

Nm se décompose ensuite en deux autres forces, l'une N$m \cos \alpha$ parallèle à l'axe de la vis, et l'autre N$m \sin \alpha$ agissant dans un plan perpendiculaire à cet axe, tangentiellement à la circonférence de rayon r'.

Cela établi, pour le mouvement parallèle à l'axe de la vis, on a

$$hNm \cos \alpha - hNf \sin \alpha - hQ = 0, \quad \text{d'où} \quad N = \frac{Q}{m \cos \alpha - f \sin \alpha},$$

et pour le mouvement de rotation,

$$P \times 2\pi r - Nm \sin \alpha \times 2\pi r' - Nf \cos \alpha \times 2\pi r' - \frac{4}{3}\pi r'' Q f = 0;$$

d'où, en divisant par 2π, et en remplaçant N par sa valeur,

$$P = Q\left(\frac{r'}{r} \times \frac{m \sin \alpha + f \cos \alpha}{m \cos \alpha - f \sin \alpha} + \frac{2}{3} f \frac{r''}{r}\right).$$

On a ensuite

$$P = Q\left(\frac{r'}{r} \times \frac{m \operatorname{tang} \alpha + f}{m - f \operatorname{tang} \alpha} + \frac{2}{3} f \frac{r''}{r}\right),$$

ou

$$P = Q\left(\frac{r'}{r} \times \frac{mh + 2\pi r' f}{2\pi r' m - fh} + \frac{2}{3} f \frac{r''}{r}\right).$$

Pour les vis en chêne, orme, etc., l'angle β est égal à 45°, d'où $\cos \beta = \frac{s}{a} = m = 0{,}707$; pour celles en bois plus durs, comme le buis, le cormier, le sorbier, etc., et pour celles en fer, on fait $\beta = 30°$, d'où $m = 0{,}866$.

Pour $\beta = 30°$, l'application du numéro précédent donne $P = 63^k{,}55$.

Pour les vis à filets carrés, $\beta = 0$, $\cos \beta = m = 1$, et faisant $m = 1$ dans les formules précédentes elles deviennent bien celles (a) et (b) du numéro précédent.

Pour serrer une vis, si elle est mobile (*fig.* 538), à l'aide d'un levier ou d'une clef, on imprime un mouvement de rotation à la tête, et la vis pénètre dans son écrou. Si elle est fixe (*fig.* 539), au moyen d'une clef, on tourne l'écrou. Que ce soit par la tête ou par l'écrou, pour serrer une vis, on tourne de gauche à droite; on la desserre en tournant de droite à gauche. Ce n'est que dans des cas exceptionnels, pour obtenir quelques mouvements particuliers d'organes de machines, que l'on fait des *vis à gauche*.

Les petites vis se serrent ou se desserrent au moyen du *tourne-vis*, lame d'acier dont on introduit le bout dans une fente que porte la tête de la vis.

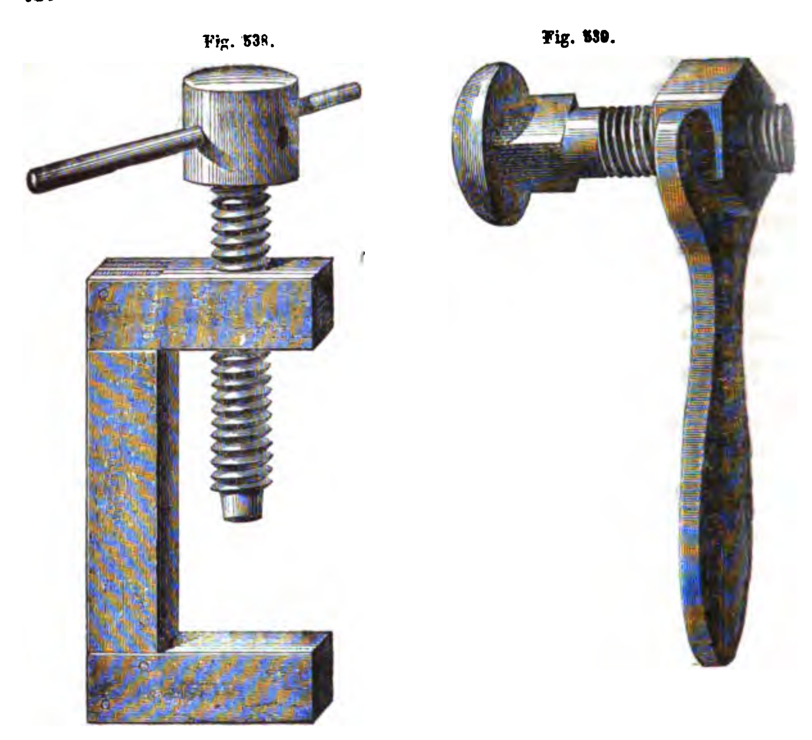


Fig. 538.

Fig. 539.

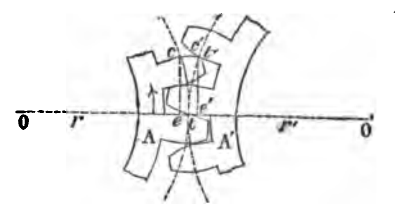
1687. *Double frottement de roulement et de glissement* (1627). Lorsqu'un corps avance en roulant sur un autre, comme, par exemple, une roue de wagon sur un chemin de fer, si la quantité dont il avance parallèlement à la surface de cet autre est égale à l'espace parcouru par les points de son pourtour autour de son centre, il n'y a que roulement du premier corps sur l'autre, et, par suite, qu'un simple frottement de roulement. Si la quantité dont avance le premier corps parallèlement à l'autre n'est pas égale à l'espace parcouru par les points de son pourtour autour de son centre, c'est qu'il y a eu à la fois roulement et glissement du premier corps sur l'autre. On admet dans ce cas qu'il y a glissement d'une surface sur l'autre sur une étendue égale à la différence des chemins parcourus sur les surfaces en contact, et roulement sur une étendue égale au plus petit de ces chemins. Si une locomotive avance d'une quantité égale à l'espace que les jantes de ses roues parcourent autour de leurs axes, c'est qu'il n'y a que roulement des jantes sur les rails; si la locomotive reste en repos, quoique ses roues tournent sur place, le chemin parcouru le long des rails étant nul, il y a glissement sur une étendue égale à l'autre chemin, c'est-à-dire sur un espace égal à celui parcouru par les pourtours des jantes autour de leurs axes. Enfin, si, par exemple, pendant que la jante d'une roue parcourt 15 mètres autour de son axe, la quantité dont elle avance le

long du rail est de 6 mètres, il y a glissement sur une étendue de 15 — 6 = 9 mètres, et roulement sur une longueur de 6 mètres. De même si, pendant que la jante parcourt ces 15 mètres, elle avance de 20 mètres le long du rail, effet qui se produit quand on fait agir le frein sur une roue, il y a roulement sur une longueur de 15 mètres, et glissement sur celle de 20 — 15 = 5 mètres. Ce double mouvement de roulement et de glissement se présente fréquemment dans les machines; ainsi il arrive souvent qu'une poulie qui commande une courroie de transmission, ou qui est commandée par elle, ne parcourt pas le même espace que la courroie.

1688. *Frottement des engrenages.* Le double mouvement de roulement et de glissement dont il vient d'être question a lieu entre les dents en contact de deux roues d'engrenage qui se commandent. Nous allons déterminer le travail absorbé par le frottement de glissement seulement; celui absorbé par le frottement de roulement pouvant, dans ce cas, être négligé par rapport au premier.

Connaissant la pression normale entre les dents, on a le frottement de glissement (1629); de sorte que si l'on connaissait l'espace parcouru par le frottement d'une dent sur l'autre, on aurait le travail absorbé par ce frottement (1673).

Fig. 540.



Soient:

A la roue qui commande;

r son rayon. Quand on dit simplement le rayon d'une roue d'engrenage, on désigne celui Ot de sa *circonférence primitive*, c'est-à-dire de la circonférence qui passe par le point de contact t situé sur la ligne des centres;

A' la roue commandée;

$r' = O't$ son rayon;

$a = tc = tc'$ le pas des engrenages; c'est la distance d'axe en axe de deux dents consécutives d'une même roue, ou la dimension d'une dent plus celle d'un vide, mesurées sur la circonférence primitive de la roue;

Q résistance s'opposant au mouvement de A' en agissant tangentiellement à la circonférence primitive.

Ordinairement il y a plusieurs dents de la roue qui travaillent à la fois; mais, afin de faciliter les calculs, on suppose qu'il n'y en a qu'une, et qu'elle ne commande que de t en c, c'est-à-dire sur un espace égal au pas. Pendant ce parcours a, le travail absorbé par la pression normale entre les dents est égal à cette pression multipliée par la longueur de la courbe parcourue par le point de contact t dans son passage de t en t', longueur qui ne diffère pas sensiblement de a; or, puisque le point de contact s'éloigne très-peu de l'arc tc', on peut sup-

poser que la pression est égale à la force Q agissant tangentiellement à tc', et le travail absorbé est (1471)

$$aQ.$$

De l'hypothèse que la pression normale entre les dents est constamment égale à Q, il en résulte que le frottement est égal à Qf (1629).

Quant au travail absorbé par ce frottement, on remarque que pendant que le point de contact t passe en t', l'espace parcouru par ce point sur la dent qui commande est égal à $t'c$, et que celui qu'il a parcouru sur la dent commandée est $t'c'$, d'où il résulte qu'il y a eu glissement sur une longueur égale à $t'c - t'c'$, différence que l'on peut supposer égale à une droite joignant c et c'. Le travail absorbé par le frottement est donc $Qf \times cc'$.

Abaissant les perpendiculaires ce et $c'e'$ à la ligne des centres, OO' étant à peu près parallèle à cc', on peut supposer $cc' = ee' = te + te'$; or on a (676)

$$te = \frac{\overline{ct}^2}{2r} \quad \text{et} \quad te' = \frac{\overline{c't}^2}{2r'};$$

et comme l'on peut supposer, sans erreur sensible, que $ct = c't = a$, ce qui se rapproche d'autant plus de la vérité que le pas est plus petit par rapport au rayon, on a donc

$$te = \frac{a^2}{2r} \quad \text{et} \quad te' = \frac{a^2}{2r'};$$

et par suite le travail absorbé par le frottement est

$$Qf\left(\frac{a^2}{2r} + \frac{a^2}{2r'}\right) = \frac{Qfa^2}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right).$$

Le travail que la roue A doit transmettre à la roue A' pour le chemin parcouru a est alors

$$\mathcal{T}_m = Qa + Qa\,\frac{fa}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right). \qquad (1)$$

Si P est la force motrice qui sollicite tangentiellement la roue qui conduit, le travail moteur pour le parcours a est Pa, et l'on a

$$Pa = Qa + Qa\,\frac{fa}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right),$$

d'où

$$P = Q + Q\,\frac{fa}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right).$$

Qa étant le travail utile $\mathcal{T}_u$, la formule (1) peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{T}_m = \mathcal{T}_u + \mathcal{T}_u \frac{fa}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right). \qquad (2)$$

n étant le nombre des dents de la roue A, et n' celui de la roue A′, on a

$$na = 2\pi r \quad \text{et} \quad n'a = 2\pi r',$$

d'où

$$r = \frac{na}{2\pi} \quad \text{et} \quad r' = \frac{n'a}{2\pi}.$$

Remplaçant r et r' par ces valeurs dans l'équation (2), il vient

$$\mathcal{T}_m = \mathcal{T}_u + \mathcal{T}_u \frac{fa}{2}\left(\frac{2\pi}{na} + \frac{2\pi}{n'a}\right),$$

ou, en réduisant,

$$\mathcal{T}_m = \mathcal{T}_u + \mathcal{T}_u f\pi \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right). \qquad (3)$$

Formule encore plus commode à appliquer que celle (2).

Application. On a $\mathcal{T}_m = 300^{km}$ par seconde; la roue motrice a 100 dents et le pignon 21, le graissage des dents est bien fait et donne $f = 0{,}08$; il s'agit de déterminer le travail utile $\mathcal{T}_u$ que pourra transmettre l'arbre du pignon dans une seconde.

Remplaçant les lettres par leurs valeurs dans la formule précédente, on a

$$300 = \mathcal{T}_u + \mathcal{T}_u \times 0{,}08 \times 3{,}14 \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{21}\right),$$

d'où l'on tire

$$\mathcal{T}_u = \frac{300}{1 + 0{,}0145} = 295^{km}{,}71.$$

Le travail absorbé par le frottement en une seconde est

$$\mathcal{T}_m - \mathcal{T}_u = 300 - 295{,}71 = 4^{km}{,}29.$$

La formule (2) fait voir que la perte de travail due au frottement est proportionnelle au pas a, que l'on doit par conséquent prendre le plus petit possible.

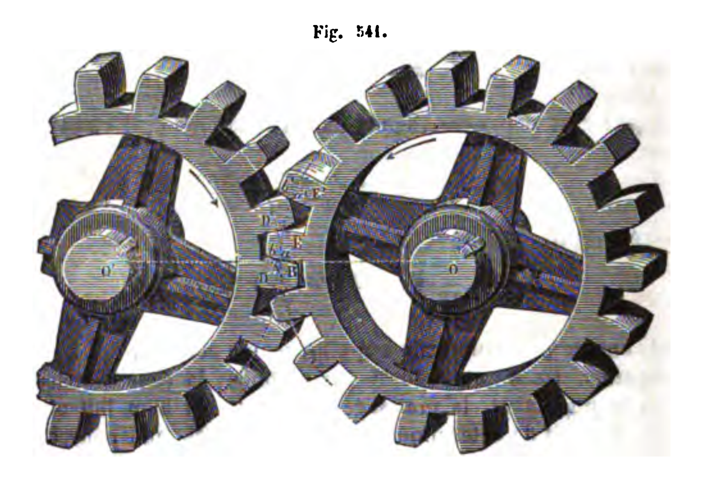
D'après la même formule (2), le travail absorbé par le frottement est proportionnel à $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$, c'est-à-dire à $\frac{r + r'}{rr'}$, quantité qui est d'autant plus petite, pour une même valeur de $r + r'$, que le produit rr' est plus grand. Or ce produit augmentant à mesure que r diffère moins de r' (537), on voit donc que le travail absorbé par le frottement sera

d'autant plus petit, pour une même valeur de $r + r'$, que r différera moins de r', et il sera minimum quand on aura $r = r'$.

Enfin la formule (2) fait voir encore que pour les mêmes valeurs de a, r et r', le rapport entre le travail moteur et le travail utile est le même quelle que soit la roue qui commande l'autre, c'est-à-dire que dans les deux cas le travail absorbé par le frottement est le même.

Les formules précédentes s'appliquent aux engrenages cylindriques (*fig.* 541), employés pour transmettre le mouvement d'un arbre O à

Fig. 541.

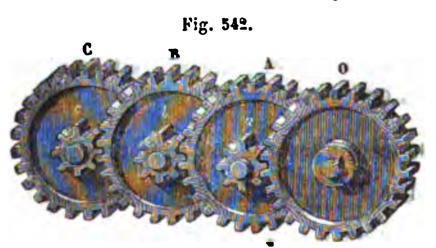


un arbre parallèle O'. Appelant r et r' les rayons OA et O'A des circonférences primitives, et n, n' les nombres de tours des deux roues dans le même temps, on a

$$\frac{n'}{n} = \frac{r}{r'}, \quad \text{d'où} \quad n' = n\frac{r}{r'}.$$

Lorsque le rapport $\frac{n'}{n}$ doit être très-grand, pour éviter de faire le rayon r' trop petit par rapport à r, on emploie des engrenages intermédiaires. Ainsi (*fig.* 542) pour transmettre le mouvement de l'arbre O à l'arbre C, on emploie deux arbres intermédiaires portant chacun une roue et un pignon. R, R', R'' étant les rayons des roues O, A, B; r, r', r'' les rayons des pignons a, b, c, et n, n', n'', n''' les nombres de tours des arbres O, A, B, C dans le même temps, on a successivement :

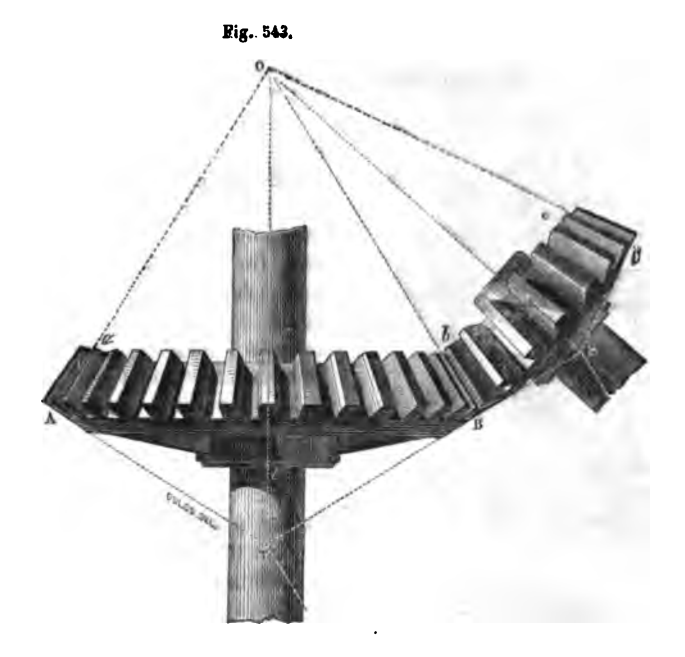
Fig. 542.



$$n' = n\frac{R}{r}, \quad n'' = n'\frac{R'}{r'} = n\frac{RR'}{rr'}, \quad n''' = n''\frac{R''}{r''} = n\frac{RR'R''}{rr'r''}.$$

1689. *Engrenages coniques* (fig. 543), employés pour transmettre le mouvement d'un arbre à un autre qui le rencontre suivant un certain

Fig. 543.



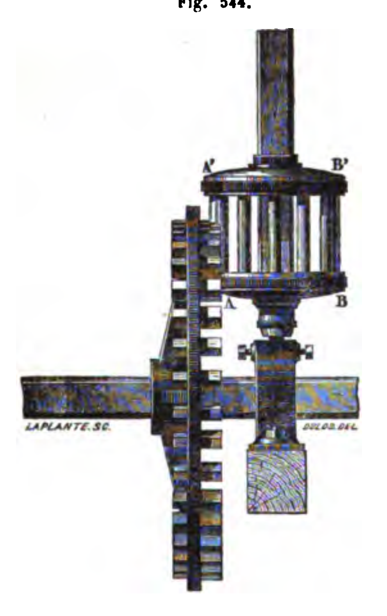
angle. a, r et r' étant le pas et les rayons moyens, c'est-à-dire au milieu de la longueur de la dent sur la génératrice de contact OB, appelant α l'angle que font entre eux les axes des engrenages, les formules (2) et (3) du numéro précédent deviennent respectivement :

$$T_m = T_u + T_u \times \frac{fa}{2}\sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} + \frac{2\cos\alpha}{rr'}},$$

$$T_m = T_u + T_u \times f\pi \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n'^2} + \frac{2\cos\alpha}{nn'}}.$$

Ces formules font voir que le travail absorbé par le frottement augmente depuis $\alpha = 180°$, ce qui correspond aux engrenages cylindriques intérieurs, pour lesquels il est le plus petit, jusqu'à $\alpha = 0$, ce qui correspond aux engrenages cylindriques extérieurs, pour lesquels il est le plus grand. Pour $\alpha = 0$, ces formules reviennent à celles du numéro précédent, comme cela devait être.

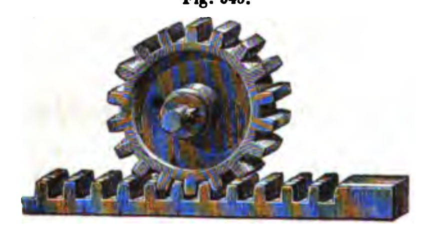
Fig. 544.



1690. *Engrenages à lanterne*, que l'on rencontre encore dans quelques anciennes usines (fig. 544). Un tambour, dit *lanterne*, est formé de deux plateaux AB, A'B', réunis entre eux par des cylindres en bois appelés *fuseaux*, et il est mis en mouvement par une roue munie de dents arrondies appelées *alluchons*.

1691. *Frottement de la crémaillère*. On peut considérer une crémaillère comme étant une roue d'engrenage cylindrique dont le rayon r' est infini; par conséquent, pour une crémaillère commandant une roue d'engrenage ou pour une roue d'engrenage commandant une crémaillère, la formule (2) du n° 1688 devient

Fig. 545.



$$T_m = T_u + T_u \frac{fa}{2} \times \frac{1}{r}.$$

1692. *Équilibre dynamique du pilon*.

Fig. 546.

Soient :

- P la puissance motrice agissant verticalement à l'extrémité du *mentonnet*, dont la longueur, comptée depuis l'axe de la tige jusqu'au point d'application de la puissance, est l;
- Q la résistance utile; c'est le poids du pilon et de sa tige supposée avoir i de côté;
- N la pression normale contre la prison ou guide supérieur C;
- Nf le frottement contre cette prison;
- N' la pression contre la prison inférieure C';
- N'f le frottement contre cette prison.

Remarquons que dans ce cas toutes les forces sont les unes parallèles et les autres perpendiculaires à la direction de la puissance P, suivant laquelle a lieu le mouvement.

Les points d'application de toutes les forces parcourant le même espace h dans le même temps, on a donc (1665), en remarquant que le travail des forces perpendiculaires à P est nul,

$$Ph = Qh + Nfh + N'fh. \qquad (1)$$

Formule où l'on peut supprimer h, et de laquelle il faut faire disparaître les inconnues N et N', afin d'avoir une relation déterminée entre P et Q, ou entre les travaux de ces forces.

Sur un axe perpendiculaire à P, Q, Nf et $N'f$, les projections de l'espace parcouru et de la vitesse initiale étant nulles, la somme des projections des forces sur le même axe est nulle (1611), et l'on a, en supprimant les projections égales à 0,

$$N - N' = 0, \quad \text{d'où} \quad N = N'. \qquad (2)$$

La formule (1) donne donc

$$Ph = Qh + 2Nfh. \qquad (a)$$

Le système n'ayant pas tourné autour du point A, c'est que les forces qui tendent à produire ce mouvement se font équilibre autour de ce point, et que par suite la somme de leurs moments est nulle, ce qui donne

$$P \times l - Q \times 0 - N \times d + Nf \times \frac{i}{2} - N' \times 0 - N'f \times \frac{i}{2} = 0; \qquad (3)$$

d'où, en supprimant les termes nuls, et en remarquant que $+Nf \times \frac{i}{2}$ et $-Nf \times \frac{i}{2}$ se détruisent,

$$Pl = Nd, \quad \text{d'où} \quad N = \frac{Pl}{d}.$$

Substituant cette valeur de N dans la formule (a), on a

$$Ph = Qh + Ph\,\frac{2lf}{d},$$

d'où

$$Ph = \frac{Qh}{1 - \frac{2lf}{d}} = Qh\,\frac{d}{d - 2lf}.$$

Ce qui fait voir que le travail utile Qh est d'autant plus petit, pour un même travail moteur Ph, que l est plus grand ; supposant $l = 0$, c'est-à-dire que la force P est appliquée à l'axe de la tige et agit suivant cet axe, la formule précédente devient

$$Ph = Qh.$$

Ce qui montre que le travail utile est alors égal au travail moteur, et que par conséquent le frottement contre les prisons est nul.

Quand le travail est transmis par une came, comme cela a lieu ordinairement, le système mobile est sollicité non-seulement par les six forces du cas précédent, mais aussi par le frottement $P'f$ de la came sous le mentonnet, force agissant perpendiculairement à la nouvelle force motrice P'. Opérant sur ces sept forces comme dans le cas précédent, la formule (1) conserve la même expression; ainsi l'on a encore

$$P' = Q + Nf + N'f. \qquad (1')$$

La formule (2) devient, en remarquant que $P'f$ agit dans le sens de N,

$$N + P'f = N'. \qquad (2')$$

Quant à la formule (3), le bras de levier de $P'f$ variant d'une manière continue entre des limites qui diffèrent entre elles de la quantité h dont s'élève le pilon, on peut supposer qu'il reste constant et égal à la moyenne arithmétique entre ses deux valeurs *limites;* de sorte que sa valeur est $b + \frac{h}{2}$, en supposant que la distance du point A au mentonnet est égale à b quand le pilon est au bas de sa course, et la formule (3) devient

$$P'l - P'f\left(b + \frac{h}{2}\right) - Q \times 0 - Nd + Nf\,\frac{i}{2} - N' \times 0 - N'f\,\frac{i}{2} = 0$$

ou

$$P'\left[l - f\left(b + \frac{h}{2}\right)\right] - Nd + Nf\,\frac{i}{2} - N'f\,\frac{i}{2} = 0.$$

Remplaçant dans cette formule N' par sa valeur (2'), on a

$$P'\left[l - f\left(b + \frac{h}{2}\right) - f^2\,\frac{i}{2}\right] = Nd,$$

d'où

$$N = P'\,\frac{l - f\left(b + \frac{h}{2}\right) - f^2\,\frac{i}{2}}{d}.$$

Cette valeur, substituée dans l'équation (2'), donne

$$N' = P'\,\frac{fd + l - f\left(b + \frac{h}{2}\right) - f^2\,\frac{i}{2}}{d}.$$

Ces valeurs de N et de N' substituées dans l'équation (1') fournissent

$$P'\,\frac{d - f\left[2l - 2f\left(b + \frac{h}{2}\right) - f^2 i + fd\right]}{d} = Q,$$

d'où

$$P' = Q \frac{d}{d - f\left[2l - 2f\left(b + \frac{h}{2}\right) - f^2 i + fd\right]}.$$

Ordinairement on a $b + \frac{h}{2} = \frac{d}{2}$; alors

$$P' = Q \frac{d}{d - 2lf + f^2 i}. \qquad (4)$$

Comme $f^2 i$ a une valeur réelle, on voit que la valeur de la puissance P' est moindre que celle obtenue pour P dans le cas précédent pour une même valeur de Q.

Si l'on demandait quelle est la quantité de travail moteur $\mathcal{T}_m$ que devrait transmettre l'arbre à cames pour une élévation h du pilon; considérant la came comme une dent d'engrenage dont le rayon est r, et commandant une crémaillère, le travail absorbé par le frottement de la came étant, pour la pression transmise P' (1691),

$$P' h \frac{fh}{2r},$$

on a

$$\mathcal{T}_m = P'h + P'h \frac{fh}{2r} = P'h \left(1 + \frac{fh}{2r}\right).$$

Remplaçant P' par sa valeur (4), on a

$$\mathcal{T}_m = Qh \frac{d}{d - 2lf + f^2 i}\left(1 + \frac{fh}{2r}\right) = Qh \frac{d(2r + fh)}{2r(d - 2lf + f^2 i)}.$$

n étant le nombre de coups de pilon donné pendant une révolution de l'arbre à cames, et P la force motrice tangentielle qui agit à l'extrémité du rayon r, on doit avoir pour l'équilibre dynamique

$$n \mathcal{T}_m = 2\pi r P,$$

d'où

$$P = \frac{n \mathcal{T}_m}{2\pi r} = nQh \frac{d(2r + fh)}{4\pi r^2 (d - 2lf + f^2 i)}.$$

HYDROSTATIQUE ET HYDRODYNAMIQUE.

PRINCIPES.

1693. *États principaux des corps* (1509). Les corps de la nature se présentent sous trois états principaux : 1° les *corps à l'état solide* ou les *solides*, tels que les pierres, les bois, les métaux en général, qui résistent plus ou moins à l'action des forces extérieures sans se déformer ; 2° les *corps à l'état liquide*, ou les *liquides*, comme l'eau, le vin, les

liqueurs en général, le métal appelé mercure, etc., lesquels se distinguent des corps solides par l'extrême mobilité de leurs parties; 3° les *corps à l'état gazeux*, ou les *gaz* et les *vapeurs*, classe qui comprend l'*air* et tous les corps analogues, qu'on nomme pour cette raison *aériformes;* le nom de vapeur est spécial aux gaz produits par les liquides à une certaine température.

Les liquides et les gaz prennent le nom commun de *fluides;* seulement les derniers sont appelés *fluides aériformes.*

Les liquides ne se compriment que bien faiblement pour de très-fortes pressions; c'est ce qui leur fait souvent donner le nom de *fluides incompressibles.* Les gaz, au contraire, sont très-compressibles, et comme, en outre, ils jouissent d'une élasticité parfaite, on les a appelés *fluides élastiques.*

Quand les liquides sont comprimés, si la pression cesse son action, ils reprennent exactement leur volume primitif. Les liquides se distinguent des gaz en ce qu'ils ne jouissent pas de la faculté expansive à l'état libre, au lieu que les gaz se dilatent de manière à toujours remplir un espace vide, quelle que soit l'augmentation qu'on fasse subir à cet espace sans y introduire une nouvelle quantité de gaz.

Un même corps peut être à l'état solide, liquide ou gazeux : ainsi l'eau peut être à l'état solide, ce qui donne la glace, ou liquide, ou encore à l'état de gaz, c'est-à-dire de vapeur. La quantité de chaleur plus ou moins grande que renferme l'eau lui fait prendre l'un ou l'autre de ces états.

1694. *Divisibilité.* La matière qui constitue les corps peut se réduire à un état de ténuité extrême, mais non indéfini. Les parties constituantes, placées à la limite extrême de la division effective de la matière, prennent le nom d'*atomes.* Tous les atomes sont de même nature dans un corps simple, comme l'hydrogène ou l'oxygène, par exemple. Dans un corps composé, tel que l'eau, qui se compose d'hydrogène et d'oxygène, un certain nombre déterminé d'atomes de chacun des corps composants s'unissent pour former un groupe qui prend le nom de *molécule;* dans l'eau, la molécule se compose de deux atomes d'hydrogène pour un atome d'oxygène, et cette composition est la même pour toutes les molécules d'eau. Une très-petite agglomération d'atomes ou de molécules prend le nom de *particule.*

1695. La partie de la mécanique qui traite de l'équilibre des liquides prend le nom d'*hydrostatique.* Celle relative à l'équilibre des fluides élastiques est la *pneumatique.* Le nom d'*hydrodynamique* est réservé à la partie qui a pour but l'examen des fluides en mouvement. La partie de l'hydrodynamique ayant exclusivement rapport aux liquides prend le nom d'*hydraulique* (1424).

1696. En traitant de la mécanique des corps solides, on a pu poser des axiomes desquels on a déduit les lois générales de l'équilibre et du mouvement de ces corps, et il a été facile d'appliquer sans erreur sensible ces lois à des combinaisons diverses qui n'en sont que des conséquences. Mais lorsqu'il s'agit des fluides, les abstractions manquent, et

que cela tienne à l'imperfection de la manière d'envisager *l'action mécanique réciproque des molécules les unes sur les autres (1509)*, ou au défaut des calculs analytiques, ou encore, comme il y a lieu de le supposer, à ces deux causes réunies, toujours est-il qu'on n'a pu donner jusqu'ici une théorie parfaite des propriétés des fluides. Cependant l'expérience jointe au calcul a suffi pour poser des règles convenables à la détermination des phénomènes pratiques.

1697. La mécanique des fluides ne peut être abordée par l'analyse sans avoir recours à quelques suppositions qui s'écartent plus ou moins de ce qui a lieu dans la pratique. Ainsi l'on suppose les corps d'une fluidité parfaite, c'est-à-dire tels que leurs molécules glissent les unes sur les autres et contre les parois des vases qui les contiennent sans donner naissance à aucun frottement (1626).

1698. De cette première hypothèse résulte le *principe de l'égalité de pression des fluides*. Ce principe très-important, découvert par Pascal, consiste en ce que les fluides transmettent uniformément en tous sens, dans leur intérieur et normalement aux parois des vases qui les contiennent, la pression transmise par un point quelconque de ces parois.

Ce principe, sur lequel est fondée la construction des presses hydrauliques, se vérifie en pratiquant deux ouvertures dans deux parties quelconques des parois et en y adaptant deux pistons. Comprimant le liquide avec l'un des pistons, on remarque que la pression transmise par le fluide à l'autre piston est à la compression du premier dans le rapport des sections des pistons.

1699. De l'hypothèse de la fluidité parfaite résulte aussi que dans un fluide en repos, dont les parties ne sont sollicitées par aucune force extérieure autre que leur poids (par exemple, le fluide est placé dans un vase où il existe un vide parfait, et de plus il ne jouit d'aucune force expansive), une colonne verticale prismatique de fluide, ayant sa base supérieure sur la surface supérieure du liquide dans le vase, exerce sur sa base inférieure une pression égale au poids de la colonne, et en général la pression sur une section horizontale quelconque de cette colonne est égale au poids de la partie de colonne qui surmonte la section considérée. Ainsi la pression sur la base supérieure de la colonne est nulle, et elle augmente pour chaque section horizontale proportionnellement à la profondeur de cette section au-dessous de la surface supérieure du liquide.

Puisqu'il y a équilibre dans toute la masse du liquide, et que la pression exercée par la colonne prismatique sur une section horizontale quelconque se transmet latéralement, il en résulte que la pression est constante entre toutes les molécules d'une même section horizontale de toute la masse liquide, et qu'elle se transmet normalement aux parois du vase en tous les points de la même section.

1700. Cette pression est mesurée sur chaque unité de surface de la section du liquide et du vase, par une colonne du liquide ayant pour base cette unité de surface, et pour hauteur la profondeur, mesurée verticalement, de la section au-dessous du point supérieur de la surface

du liquide. Cette pression, en chaque point d'une section horizontale du liquide et de la paroi du vase, ne dépend nullement de la forme de ce vase, mais seulement de la profondeur verticale de la section au-dessous du point supérieur de la masse liquide. C'est pourquoi l'on peut faire éclater un tonneau très-résistant, en le remplissant d'un liquide, et en le surmontant d'un tube très-petit qu'on élève suffisamment haut et qu'on remplit également de liquide.

1701. Dans les cas ordinaires de la pratique, les fluides ne sont pas soumis seulement à l'action de la pesanteur; ainsi un gaz placé dans un vase où l'on avait fait le vide réagit, en vertu de sa force élastique, contre les parois du vase, et cette réaction est considérée comme une force extérieure agissant par l'intermédiaire des parois sur la masse fluide. Un liquide placé dans un vase ouvert est soumis à la pression atmosphérique, qui produit l'effet d'un piston sur la surface du liquide, et se transmet uniformément en tous les points de la masse fluide et contre les parois du vase.

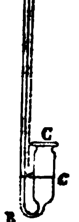
1702. La pression en un point quelconque d'une masse fluide et contre les parois du vase contenant le fluide se compose donc généralement de deux parties : 1° de la pression extérieure qui se transmet uniformément en tous les points du fluide et contre les parois; 2° de la pression due à l'action de la pesanteur sur le fluide. Cette dernière est constante pour tous les points placés sur une même section horizontale, et elle varie d'une section horizontale à une autre, proportionnellement à la profondeur de la section au-dessous du point le plus élevé du fluide supposé homogène; ainsi, ω étant le poids du mètre cube de fluide, la pression due à la pesanteur est ωh par mètre carré, sur une couche horizontale située à la profondeur h au-dessous du niveau supérieur du fluide, et contre la partie de paroi située à la même profondeur.

1703. Du principe de la transmission de pression des fluides, il résulte qu'un liquide placé dans un vase ouvert ne peut être en équilibre qu'autant que sa surface est horizontale.

MOYENS DE MESURER LA PRESSION DES FLUIDES.

1704. L'air qui enveloppe la terre exerce en tous ses points, et sur ceux de la surface de la terre, une pression analogue à celle qu'exerce un fluide placé dans un vase sur ses différents points et contre les parois du vase (1700).

Fig. 547.



Cette pression, appelée *pression atmosphérique*, se mesure à l'aide du *baromètre*, appareil qui se compose d'un tube AB en verre, fermé à son extrémité supérieure, et communiquant par sa partie inférieure avec une cuvette C, qui contient du mercure et qui communique avec l'air libre. Faisant le vide dans le tube AB, le mercure de la cuvette C s'y élève jusqu'à ce que la différence des niveaux a et c du mercure dans le tube et dans la cuvette fasse équilibre à la pression atmosphérique qui s'exerce sur la surface du mercure de la cuvette. Une échelle graduée placée à côté du

tube indique cette différence, appelée *hauteur barométrique*, pour chaque niveau que prend le mercure dans le tube.

1705. h étant la hauteur barométrique indiquée, et ω' le poids du mètre cube de mercure à la température actuelle, la pression atmosphérique par mètre carré est $p = h\omega'$.

Si la température est 0°, la valeur de ω' est 13596^k; si la température au moment de l'observation est t degrés centigrades, sachant que le coefficient de la dilatation cubique du mercure est $\frac{1}{5512}$, il en résulte qu'on a

$$\omega' = 13596^k \frac{1}{1 + \frac{1}{5512}t} = 13596^k \left(1 - \frac{t}{5512 + t}\right),$$

et par suite

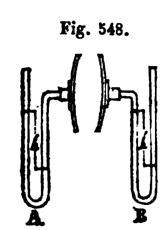
$$p = 13596^k \left(1 - \frac{t}{5512 + t}\right) h.$$

La quantité $\left(1 - \frac{t}{5512 + t}\right) h$ est la hauteur barométrique ramenée à la température zéro. Sa valeur moyenne au niveau de la mer est 0^m,76; celle de p y est par conséquent $13596 \times 0{,}76 = 10333$ kilogrammes. Ce sont ces valeurs qu'on emploie ordinairement dans les applications industrielles, en tous les points de la surface du globe. La pression atmosphérique 0^m,76 de mercure équivaut à une colonne d'eau de 10^m,333.

1706. Lorsqu'un fluide élastique est contenu dans un vase clos, on peut mesurer sa pression au moyen d'un baromètre dont la cuvette communique avec l'intérieur du vase au lieu d'être ouverte dans l'atmosphère. La valeur de la pression p du fluide a la même expression qu'au numéro précédent.

1707. Quand la pression d'un fluide qui occupe un espace clos diffère peu de celle de l'atmosphère, on mesure la différence à l'aide du *manomètre à siphon* ou par des dispositions analogues. La différence de niveau h, multipliée par le poids du mètre cube du liquide employé dans le siphon, donne la différence de pression cherchée par mètre carré. Cette différence ajoutée à la pression atmosphérique 10333^k, dans le cas A, ou retranchée de cette pression pour le cas B, donne la pression du fluide dans le vase par mètre carré. Dans l'établissement des machines à vapeur, ce manomètre à siphon, appelé manomètre à air libre, s'emploie pour des excès de la pression dans les chaudières sur la pression atmosphérique s'élevant jusqu'à 4 atmosphères; de sorte que la différence de niveau du mercure dans les deux branches est $0^m,76 \times 4 = 3^m,04$, et la pression absolue dans la chaudière, $0{,}76 \times 4 + 0{,}76 = 0{,}76 \times 5 = 3^m,80$. Comme la température du manomètre n'est pas 0°, on conçoit que la hauteur 0^m,76 ne correspond pas à une atmosphère; mais cette approximation suffit

Fig. 548.



dans la pratique. Du reste, si l'on voulait ramener la hauteur h indiquée par le manomètre à la température t, à la hauteur h' correspondant à la température 0°, il suffirait de poser (1705)

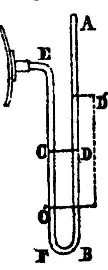
$$h' = \left(1 - \frac{t}{5512 + t}\right) h;$$

ce qui correspond, en kilogrammes par mètre carré de surface, à

$$p = 13596 \left(1 - \frac{t}{5512 + t}\right) h \text{ kilogrammes.}$$

1708. Pour de fortes pressions, on emploie le *manomètre à air comprimé*, qui diffère du baromètre en ce que la branche AB au lieu d'être vide renferme de l'air.

Fig. 549.



Lorsque la pression dans la chaudière est d'une atmosphère, le niveau CD du mercure est le même dans les deux branches du manomètre; mais à mesure que la pression augmente, le niveau du mercure baisse dans la branche EF, et s'élève dans celle AB de manière à comprimer l'air contenu dans la partie AD. Supposons que le niveau D se soit élevé de la quantité h et soit venu en D', et que celui C soit descendu de la même quantité h pour venir en C', ce qui suppose que les deux branches du manomètre ont même diamètre, et évaluons la pression dans la chaudière. Cette pression est égale à la pression de l'air AD' augmentée de la différence $2h$ du niveau du mercure dans les deux branches. Or désignant par H la hauteur AD occupée par l'air sous la pression atmosphérique $0^m,76$, la hauteur qu'il occupe étant devenue $AD' = H - h$, sa pression est, d'après la loi de Mariotte, qui consiste en ce que *les pressions d'une même quantité de gaz sont en raison inverse des volumes*,

$$0,76 \frac{H}{H - h}.$$

La pression dans la chaudière est donc, en hauteur de mercure,

$$h' = 2h + 0,76 \frac{H}{H - h}.$$

Nous avons, comme on le fait généralement dans la pratique, négligé l'effet de l'augmentation de température du manomètre.

1709. *Pression d'un liquide pesant homogène sur un plan.*

Nous avons déjà vu que la pression due au poids du liquide en un point quelconque est proportionnelle à la profondeur de ce point au-dessous du niveau du liquide (1702). Par conséquent, un plan horizontal étant en contact avec le fluide, la pression est la même sur chacun de ses points, et sur tout le plan elle est mesurée par le poids d'une colonne de fluide ayant pour base la surface A du plan, et pour

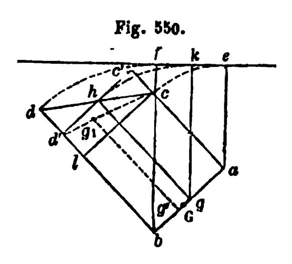
hauteur la profondeur H du plan au-dessous de la surface du fluide; de sorte que ω étant le poids du mètre cube de fluide, la pression en kilogrammes contre le plan est

$$\omega AH.$$

Si le fluide était en outre soumis à une pression étrangère de n kilogrammes par mètre carré, la pression totale contre le plan serait

$$nA + \omega AH \quad \text{ou} \quad A(n + \omega H).$$

Fig. 550.



Lorsque le plan ab, que nous supposerons perpendiculaire au plan du papier, est incliné, la pression sur chaque élément est normale à ab, et elle est égale au poids d'une colonne de liquide ayant pour base l'élément et pour hauteur la profondeur de l'élément au-dessous de la surface ef du liquide; d'où il résulte qu'elle est différente pour tous les points placés à des niveaux différents.

Menant en a et b des perpendiculaires à ab, prenant $ac = ae$ et $bd = bf$, et menant un plan cd perpendiculaire à celui du papier, le poids du prisme ou cylindre droit tronqué $abdc$ qui a le plan ab pour base et qui se termine au plan figuré par cd est la pression totale du liquide sur le plan ab.

g étant le centre de gravité du plan ab, menant gh perpendiculaire à ab, et par h le plan $c'd'$ perpendiculaire à gh et au plan du papier, le prisme droit $abd'c'$ est équivalent au prisme tronqué $abdc$, et son poids est encore la pression totale du liquide sur le plan ab. Comme $gh = gk$, cette pression totale est donc égale au poids d'une colonne de fluide ayant pour base la surface A du plan, et pour hauteur la profondeur $gk = H'$ du centre de gravité g du plan au-dessous du niveau ef du fluide. Ainsi ω étant toujours le poids du mètre cube de fluide, la pression en kilogrammes contre le plan est

$$\omega AH'.$$

Si le fluide était encore soumis à une pression étrangère de n kilogrammes par mètre carré, la pression contre le plan serait

$$nA + \omega AH' \quad \text{ou} \quad A(n + \omega H'). \qquad (a)$$

Le cas où le plan est horizontal n'est qu'un cas particulier de ce dernier.

Il est à remarquer que la pression totale sur une surface plane ne varie pas, quelle que soit l'inclinaison qu'on donne à cette surface sans changer la position de son centre de gravité g, pourvu toutefois que la surface reste complétement plongée dans toutes les positions.

Lorsque la paroi plane pressée d'un côté par un fluide a sa face

opposée en contact avec l'atmosphère, on n'a ordinairement pour but que de déterminer la différence des pressions sur les deux faces. Si le vase est ouvert de manière que le liquide soit en contact avec l'atmosphère par sa surface supérieure, et que l'on considère la pression atmosphérique comme étant la même sur les deux faces du plan, ce que l'on peut faire sans erreur sensible, il en résulte que la différence des pressions est $\omega AH'$.

Si le liquide, au lieu d'être soumis à la pression atmosphérique, était soumis à une pression étrangère quelconque, la différence des pressions s'obtiendrait en retranchant de la pression (a), qui agit sur l'une des faces du plan, la pression atmosphérique $13596 \times 0,76 \times A$ qui agit sur l'autre.

Enfin, il peut encore arriver que la pression atmosphérique ne soit pas la seule force qui agisse sur la seconde face du plan; c'est ce qui arrive, par exemple, quand cette face est aussi en contact avec un liquide, comme cela a lieu dans les écluses d'un canal. La petite vantelle qui sert à faire passer l'eau d'un côté sur l'autre de la porte se trouve pressée sur chacune de ses faces par l'atmosphère, et en outre par le liquide qui s'élève sur chacune de ses faces. On conçoit qu'alors la différence des pressions est la différence de deux expressions semblables à celle (a), et que dans le cas particulier de la vantelle d'écluse, comme la pression atmosphérique peut se négliger, comme étant sensiblement la même sur les deux faces, cette différence est égale à la différence des pressions dues aux liquides sur les deux faces. Si le liquide est le même sur les deux faces, il en résulte que la différence des pressions est évaluée par une hauteur de liquide égale à la différence des niveaux du liquide sur les deux faces.

1710. La résultante des pressions dues à un liquide sur les divers éléments d'un plan est appliquée en un point de ce plan, qu'on appelle *centre de pression*.

1711. Le centre de pression est la projection sur le plan ab du centre de gravité du prisme tronqué $abdc$ (*fig.* 550). Menant le plan cl parallèle à ab, le centre de gravité du prisme droit $ablc$ se projette au centre de gravité g de ab; déterminant le centre de gravité g_1 du volume cld, puis la projection g' de g_1 sur ab, et divisant gg' en parties réciproquement proportionnelles aux volumes $ablc$ et cld, on obtient la projection G du centre de gravité du prisme tronqué $abdc$ (1566), c'est-à-dire le centre de pression.

Il est à remarquer que quand le plan ab est horizontal, son centre de gravité est le centre de pression; mais que quand il est incliné, son centre de gravité se trouve toujours au-dessus du centre de pression.

Tout ce qui précède s'applique également au cas où le plan ab est vertical.

Lorsque le plan ab est rectangulaire et que son arête a est horizontale, le centre de gravité g_1 est celui du triangle cld, et l'on a

$bg' = \frac{1}{3} ba$ (1569); puis (1566)

$$g'G : Gg = \text{rectangle } ablc : \text{triangle } cld$$

ou $$g'G : g'g = ablc : abdc,$$

d'où $$g'G = g'g \frac{ablc}{abdc}; \quad \text{puis } bG = bg' + g'G.$$

Quand l'arête a de la paroi rectangulaire pressée est placée au point e dans la surface du fluide, la pression totale sur ab est représentée par le poids du volume triangulaire cld, et le centre de pression se trouve au point g' donnant $bg' = \frac{1}{3} ba$.

ÉQUILIBRE DES CORPS PLONGÉS ET FLOTTANTS.

1712. *Lorsqu'un corps est plongé en totalité ou en partie dans un fluide pesant, en repos, les pressions que celui-ci exerce normalement à la surface du corps ont une résultante unique égale et directement opposée au poids du fluide déplacé.* En effet, comme rien ne serait changé aux pressions si le corps plongé était remplacé par le fluide qu'il déplace, et qu'il est évident que ce fluide ne peut être en équilibre qu'autant que les diverses pressions qui le sollicitent ont pour résultante une force égale et directement opposée à son poids, cette résultante étant verticale, il en résulte que *tout corps plongé en totalité ou en partie dans un fluide en équilibre perd de son poids le poids du fluide déplacé.* Ainsi un corps suspendu à un fil exerce, dans le vide, sur ce fil, une traction égale à son poids; mais si on l'abaisse de manière qu'il vienne plonger dans un liquide, il perd de son poids une portion égale au poids du liquide déplacé, et la tension du fil diminue de la même quantité. Si le poids du corps est moins grand que celui d'un égal volume du liquide, il s'enfonce jusqu'à ce que le poids du liquide déplacé soit égal au sien, puis il reste flottant, et la tension du fil qui le suspendait devient nulle. Si le corps est plus dense que le fluide, il s'immerge complétement, et la tension du fil est égale à l'excès du poids du corps sur celui de l'égal volume de liquide. Supposant le fluide homogène en tous ses points, la perte de poids d'un corps entièrement submergé est la même, quelle que soit la profondeur à laquelle il se trouve dans le liquide; ainsi la tension du fil qui le suspend reste constante, et si l'on coupe le fil, le corps se précipite au fond du vase contenant le liquide, et s'y repose en exerçant une pression verticale égale à la tension du fil, c'est-à-dire égale à la différence entre son poids et celui du liquide déplacé.

Ce qui vient d'être dit s'applique à un fluide pesant quelconque; ainsi un corps pesé dans l'air accuse un poids trop faible d'une quantité égale au poids de l'air déplacé par le corps, moins celui de l'air déplacé par

les poids qui sont dans l'autre plateau de la balance. Cette perte est négligeable dans la pratique.

1713. De ce qui précède, il résulte qu'un corps libre entièrement plongé dans un fluide n'est en équilibre qu'autant : 1° que son poids est égal à celui d'un égal volume du fluide ; 2° que le centre de gravité du corps et celui de son volume sont situés sur une même verticale. L'équilibre est *stable* si le premier centre de gravité est au-dessous du second ; il est *instable* dans le cas contraire.

Pour l'équilibre d'un corps flottant, il faut : 1° que son poids soit égal à celui du liquide déplacé ; 2° que le centre de gravité du corps et celui du volume de la portion immergée soient situées sur une même verticale. L'équilibre est encore stable si le premier centre de gravité est au-dessous du second ; mais cette condition, toujours suffisante, n'est pas nécessaire.

1714. C'est parce qu'un corps plongé dans un fluide perd de son poids exactement celui du fluide déplacé, qu'un corps moins dense que le fluide dans lequel il est plongé s'élève ; un morceau de liége tenu sous l'eau devenant libre, il vient à la surface ; un aérostat s'élève dans l'air jusqu'à ce que son poids soit égal à celui de l'air qu'il déplace ; c'est aussi ce qui fait qu'un corps plus dense que le fluide descend au fond quand on l'abandonne à lui-même.

ÉCOULEMENT PERMANENT D'UN FLUIDE A PRESSION CONSTANTE, SORTANT D'UN VASE PAR UN PETIT ORIFICE.

1715. Le *mouvement* d'un fluide est dit *permanent* (le *régime* est *permanent*), lorsque les hauteurs des niveaux ou mieux les pressions, les aires des sections transversales et les vitesses du fluide en chacun des points de ces sections sont constantes.

De la nature propre des fluides, les molécules étant contiguës les unes aux autres sans interruption, ce qu'on exprime en disant qu'il y a *continuité du fluide*, il résulte que pour les liquides, que l'on peut considérer comme étant incompressibles, il passe dans chaque section le même volume de fluide à chaque instant quand le *régime* est *permanent*.

Pour les gaz, la permanence du mouvement exige bien, comme pour les liquides, que le même poids de fluide passe dans chaque tranche dans le même temps ; mais les pressions étant variables d'une section à une autre, il en résulte que les volumes écoulés sont variables pour chaque tranche.

1716. *Hypothèse du parallélisme des tranches.* Afin de pouvoir analyser les phénomènes de l'écoulement des fluides, on a été obligé de supposer le parallélisme des tranches, c'est-à-dire d'admettre que tout le volume fluide est composé de tranches très-minces, normales à la direction du mouvement du fluide, se mouvant en restant constamment parallèles à elles-mêmes, conservant toujours le même volume et ne

faisant que s'élargir ou se rétrécir, suivant que le vase dans lequel elles se meuvent s'élargit ou se rétrécit. La vitesse du fluide est la même en tous les points de chaque section.

On conçoit que ces hypothèses ne sont à peu près réalisées que dans le cas où le fluide se meut dans des vases, des canaux ou des tuyaux de conduite dont la forme continue et régulière ne varie que par degrés insensibles.

1717. *Théorie de l'écoulement permanent d'un liquide conservant un niveau constant dans le vase qui le contient.*

Supposons que les parois du vase sont continues et tellement raccordées avec l'orifice d'écoulement, que l'on puisse, si cela était entièrement possible, considérer le parallélisme des tranches comme réalisé; ainsi l'on peut supposer que les vitesses sont égales et parallèles entre elles en tous les points de l'orifice d'écoulement, ainsi qu'en tous ceux de chacune des autres sections normales à la direction du mouvement du fluide.

Fig. 551.

Représentons par :

- S la surface de la tranche supérieure AB du liquide;
- V la vitesse avec laquelle tous les filets traversent cette tranche;
- s l'aire de l'orifice d'écoulement ab;
- v la vitesse des filets fluides à cet orifice;
- ω le poids du mètre cube de liquide;
- h la différence de niveau de la section AB et du centre de gravité de l'orifice ab;
- P la pression par mètre carré sur la section AB;
- p la pression par mètre carré sur la face extérieure du plan ab;
- θ le temps très-court que met chaque tranche pour quitter sa position et prendre celle de la tranche équivalente consécutive;
- m la masse de chaque tranche, et q son poids;
- v_0 la vitesse initiale (qui peut être la même ou différente pour les divers points du fluide) des différents éléments matériels fluides au commencement du temps θ;
- v_1 la vitesse des divers points matériels fluides après le temps θ.

Appliquant au système matériel considéré l'équation de l'effet du travail, abstraction faite des frottements, on a (1614)

$$\Sigma \frac{1}{2} mv_1^2 - \Sigma \frac{1}{2} mv_0^2 = \mathrm{PSV}\theta - psv\theta + qh;$$

$\Sigma \frac{1}{2} mv_1^2$ somme des puissances vives que possèdent les divers éléments du fluide à la fin du temps θ;

$\Sigma \frac{1}{2} mv_0^2$ somme des puissances vives au commencement de ce temps;

PS pression totale sur la surface AB;

$V\theta$ espace parcouru par la pression PS pendant le temps θ;

$PSV\theta$ travail produit par PS pendant le temps θ;
$psv\theta$ travail négatif produit par la pression ps sur l'orifice ab pendant le temps θ;
qh est le travail produit par l'action de la pesanteur sur tout le liquide; car le fluide étant partout homogène, le travail dû à l'action de la pesanteur sur tout le liquide se réduit à celui qu'elle aurait produit en agissant seulement sur la tranche ABA'B', pendant que cette tranche passe dans la position $aba'b'$.

Remarquant qu'on a

$$SV\theta = sv\theta = \frac{q}{\omega},$$

puisque ces trois expressions représentent chacune le volume d'eau écoulé pendant le temps θ, l'équation de l'effet du travail peut être mise sous la forme

$$\Sigma \frac{1}{2} mv_1^2 - \Sigma \frac{1}{2} mv_0^2 = P\frac{q}{\omega} - p\frac{q}{\omega} + qh = \left(\frac{P-p}{\omega} + h\right)q. \quad (1)$$

De la permanence du régime, il résulte que l'accroissement de puissance vive du système est égal à la puissance vive de la masse $\frac{q}{g}$ comprise à la fin du temps θ dans la tranche $aba'b'$, moins celle d'une masse équivalente contenue au commencement de θ dans la tranche ABA'B'; ainsi

$$\Sigma \frac{1}{2} mv_1^2 - \Sigma \frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{qv^2}{2g} - \frac{qV^2}{2g}. \quad (2)$$

Égalant les deux seconds membres des équations (1) et (2), il vient, en supprimant le facteur q,

$$\frac{v^2}{2g} - \frac{V^2}{2g} = \frac{P-p}{\omega} + h.$$

Équation homogène; car $\frac{P}{\omega} = h_1$ et $\frac{p}{\omega} = h'_1$ sont les hauteurs de deux colonnes du liquide dont il s'agit, auxquelles seraient dues les pressions P et p par mètre de surface.

Multipliant les deux membres de l'équation précédente par $2g$, elle devient

$$v^2 - V^2 = 2gh + \frac{2g(P-p)}{\omega}. \quad (3)$$

On a $vs = VS$ ou $v^2s^2 = V^2S^2$, d'où $V^2 = v^2\frac{s^2}{S^2}$.

Substituant cette valeur de V^2 dans l'équation (3), on a

$$v^2\left(1 - \frac{s^2}{S^2}\right) = 2gh + \frac{2g(P-p)}{\omega},$$

d'où l'on tire

$$v = \sqrt{\frac{2gh + \frac{2g(P-p)}{\omega}}{1 - \frac{s^2}{S^2}}},$$

ou, en remplaçant $\frac{P}{\omega}$ par h_1 et $\frac{p}{\omega}$ par h'_1,

$$v = \sqrt{\frac{2g(h + h_1 - h'_1)}{1 - \frac{s^2}{S^2}}}.$$

Supposant, comme cela arrive ordinairement dans la pratique, que s est très-petit par rapport à S, on peut négliger $\frac{s^2}{S^2}$, et la vitesse d'écoulement du fluide devient

$$v = \sqrt{2gh + \frac{2g(P-p)}{\omega}} = \sqrt{2g(h + h_1 - h'_1)}. \qquad (4)$$

Lorsqu'il s'agit de l'écoulement d'un liquide placé dans un vase ouvert, les pressions P et p, ou les hauteurs h_1 et h'_1 qui les représentent, ne sont autre chose que les pressions atmosphériques sur la surface du liquide et sur la paroi de l'orifice d'écoulement, et comme on peut les supposer égales, la vitesse d'écoulement est alors

$$v = \sqrt{2gh}. \qquad (a)$$

Ce qui fait voir que *la vitesse d'écoulement du fluide est égale à celle que prendrait un corps en tombant de la hauteur* h *dans le vide* (1446).

La hauteur h, qui mesure la charge du fluide sur le centre de gravité de l'orifice d'écoulement, est appelée pour cette raison *hauteur génératrice*, et de la formule précédente on tire

$$h = \frac{v^2}{2g}. \qquad (b)$$

Cette formule, due à Torricelli, disciple de Galilée, se vérifie sensiblement dans la pratique par l'observation des jets d'eau verticaux ou horizontaux, pour tous les petits orifices et les grandes charges par rapport aux dimensions de ces orifices.

Dans le cas où l'orifice d'écoulement est noyé, la pression p est égale à la pression atmosphérique plus la pression du liquide sur la face extérieure de l'orifice. La pression atmosphérique étant détruite par la même pression qui agit sur la surface du liquide dans le vase, il en résulte que $P-p$ se réduit à $-p'$ et $h_1 - h'_1$ à $-h'$; ainsi l'on a

$$\frac{2g(P-p)}{\omega} = -\frac{2gp'}{\omega} = -2gh',$$

h' étant la hauteur du niveau du liquide au-dessus de la face extérieure de l'orifice d'écoulement.

La vitesse d'écoulement est alors

$$v = \sqrt{2gh - 2gh'} = \sqrt{2g(h - h')}. \qquad (c)$$

Ce qui fait voir que *la vitesse est égale à celle qui résulterait d'une charge sur l'orifice égale à la différence* h — h' *des niveaux.*

Les formules précédentes font voir que la vitesse d'écoulement est indépendante de la nature du liquide, et qu'elle dépend uniquement de la hauteur h ou $h - h'$.

Applications :

1° *Un liquide s'écoule d'un réservoir par un orifice dont le centre de gravité est à* 1m,50 *au-dessous du niveau du liquide dans le réservoir; quelle est la vitesse d'écoulement?*

Remplaçant les lettres par leurs valeurs dans la formule (*a*), on a

$$v = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 1{,}50} = 5^{m}{,}42.$$

2° *Quelle est la hauteur génératrice de la vitesse d'écoulement* 5m,42?

Pour cette vitesse, la formule (*b*) donne

$$h = \frac{5{,}42^2}{2 \times 9{,}81} = 1^{m}{,}50.$$

3° *Les hauteurs des niveaux d'un liquide sur le centre de gravité d'un orifice noyé sur les deux faces sont* 2m *et* 0m,50; *quelle est la vitesse d'écoulement?*

Avec ces données, la formule (*c*) donne

$$v = \sqrt{2 \times 9{,}81(2 - 0{,}5)} = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 1{,}50} = 5^{m}{,}42.$$

Nous donnons dans la partie pratique de notre *Aide-Mémoire* une table complète des hauteurs génératrices des vitesses les plus usitées.

1718. *Fluides élastiques.* La formule (4) du numéro précédent s'applique aux fluides élastiques comme aux liquides. Pour les fluides élastiques la hauteur h étant généralement négligeable près de $\frac{P}{\omega} = h_1$ et de $\frac{p}{\omega} = h'_1$, on peut écrire

$$v = \sqrt{\frac{2g(P - p)}{\omega}} = \sqrt{2g(h_1 - h'_1)}.$$

Ainsi, la vitesse d'écoulement d'un gaz est encore égale à celle que prendrait un corps tombant dans le vide d'une hauteur $(h_1 - h'_1) = H'$, *qui mesure, en gaz qui s'écoule, la différence des pressions sur les deux faces de l'orifice.*

La pression d'un gaz ou d'une vapeur se mesurant à l'aide du manomètre, $P - p$ se trouve évalué par une hauteur H_1 d'eau ou de mercure.

Il faut alors transformer H_1 en une hauteur H' de gaz qui s'écoule, qui produirait la même pression, en multipliant H_1 par le rapport de la densité du liquide du manomètre à la densité ω du gaz qui s'écoule; ainsi la hauteur H' sera, si H_1 est exprimée en mercure (1705),

$$H' = H_1 \frac{13596}{\omega}.$$

Le gaz ou la vapeur se dégageant dans l'atmosphère, comme le manomètre indique l'excès $P-p$ des pressions sur les deux faces de l'orifice, il en résulte qu'on a $H' = (h_1 - h'_1)$ et que la vitesse d'écoulement est

$$v = \sqrt{2gH'} = \sqrt{2gH_1 \frac{13596}{\omega}}.$$

Application. De l'air se dégage d'un récipient où il est à la pression de trois atmosphères, par un orifice qui communique à l'air libre; quelle est la vitesse d'écoulement?

On a

$$H_1 = 0{,}76 \times 2 = 1^m{,}52.$$

La densité de l'air à 0° et sous la pression atmosphérique étant le $\frac{1}{770}$ de celle de l'eau, le poids du mètre cube d'air est $\frac{1}{770} \times 1000 = 1^k{,}3$; et sous la pression de trois atmosphères, on a

$$\omega = 1{,}3 \times 3 = 3{,}9.$$

La hauteur génératrice H' est alors

$$H' = 1{,}52 \times \frac{13596}{3{,}9} = 5299^m,$$

et la vitesse d'écoulement,

$$v = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 5299} = 322^m.$$

1719. *Vitesse réelle d'écoulement d'un fluide.* Les vitesses précédentes d'écoulement d'un fluide sont appelées *vitesses théoriques.* Dans la pratique, on conçoit que le frottement du liquide contre les parois du vase et de l'orifice, et la résistance de l'air diminuent ces vitesses.

Lorsque l'*écoulement* a lieu *en mince paroi,* c'est-à-dire quand l'épaisseur de la paroi dans laquelle est pratiqué l'orifice d'écoulement est moindre que la plus petite dimension de l'orifice, et au maximum de $0^m{,}05$ à $0^m{,}06$, la *vitesse réelle* v' avec laquelle le liquide s'écoule, lorsque la vitesse est à peu près nulle dans le vase, est égale à la vitesse théorique diminuée de un à deux centièmes; ainsi, en moyenne, on a

$$v' = 0{,}985v = 0{,}985\sqrt{2gh}.$$

Quand l'*écoulement* a lieu *à gueule-bée,* c'est-à-dire lorsque les filets

fluides se rapprochent des parois de l'orifice, ce qui a lieu quand l'épaisseur de la paroi est égale au moins à une fois et demie sa plus petite dimension, ou que cet orifice est prolongé d'un ajutage dont la longueur est égale à trois ou quatre fois la plus petite dimension de l'orifice, on a dans les cas ordinaires d'écoulement de l'eau

$$v' = 0{,}82v = 0{,}82\sqrt{2gh}.$$

Pour l'établissement des jets d'eau à l'aide de courts ajutages légèrement convergents on peut supposer $v' = 0{,}87v$.

1720. *Contraction de la veine.* Lorsqu'un fluide s'écoule par un orifice, on remarque que la section de la veine fluide va en diminuant jusqu'à une certaine distance de l'orifice. Cet effet de diminution prend le nom de *contraction de la veine.* C'est au point où la contraction est la plus grande que les formules des numéros précédents donnent la vitesse d'écoulement. La vitesse est évidemment moindre en tous les autres points de la veine fluide.

1721. *Contraction complète ou incomplète de la veine.* La contraction étant principalement due à ce que les divers filets fluides n'arrivent pas parallèlement entre eux perpendiculairement à la section de l'orifice d'écoulement, on conçoit que la contraction sera d'autant plus faible que l'orifice se raccordera mieux d'une manière continue avec les parois du vase.

On dit que la *contraction* est *complète*, lorsqu'elle s'opère entièrement sur tout le contour de l'orifice; ce qui a lieu quand cet orifice est éloigné du fond et des parois du vase d'eau moins une fois et demie à deux fois sa plus petite dimension.

La *contraction* est dite *incomplète*, lorsqu'elle est supprimée sur un, deux ou trois côtés de l'orifice, c'est-à-dire quand un, deux ou trois des côtés de l'orifice font prolongement aux parois du vase.

1722. *Dépense théorique par un orifice d'écoulement.* En négligeant la diminution de la vitesse d'écoulement, et en supposant nulle la contraction de la veine, il est évident que la dépense, c'est-à-dire le volume Q' de fluide qui s'écoulerait par seconde, serait (1717)

$$Q' = sv = s\sqrt{2gh},$$

s étant la section de l'orifice et v la vitesse théorique.

1723. *Dépense effective.* Il est évident qu'à cause des diminutions de la vitesse et de la section de la veine fluide, la dépense effective, c'est-à-dire le volume Q de fluide écoulé par seconde, est moindre que la dépense théorique Q', et que l'on a

$$Q = kQ' = ksv = ks\sqrt{2gh},$$

k étant un nombre plus petit que l'unité.

Ce nombre k, qu'on appelle *coefficient de la dépense*, est le rapport de la dépense effective à la dépense théorique sv; il varie suivant la forme et les dimensions de l'orifice, et les valeurs de la charge h sur

l'orifice. Pour des orifices circulaires de $0^m,02$ à $0^m,08$ de diamètre, où le liquide affluait de toutes parts, on a trouvé que l'aire de la section contractée n'était que les 0,64 de celle de l'orifice. Pour les vannes d'écluses, dont le seuil est en général très-rapproché du fond du radier d'amont, le coefficient k de la dépense est moyennement 0,625, que la vanne soit ou ne soit pas noyée sur les deux faces.

Nous renvoyons à la partie pratique de notre *Aide-Mémoire* pour les valeurs de k à employer dans les différents cas de la pratique.

Application. Quel est le volume d'eau écoulé en 25' par un orifice de $0^{mq},005$ de section, la hauteur constante du niveau de l'eau au-dessus du centre de gravité de l'orifice étant $1^m,50$, et le coefficient de la dépense 0,64?

Remplaçant les lettres par leurs valeurs dans la formule précédente, la dépense par seconde est

$$Q = 0,64 \times 0,005 \sqrt{2 \times 9,81 \times 1,5} = 0^{mc},017344.$$

Le volume écoulé en 25' est alors

$$0,017344 \times 60 \times 25 = 26^{mc},016.$$

COURS D'EAU, ET TUYAUX DE CONDUITE DES EAUX.

1724. *Cours d'eau à section constante et à pente uniforme.* Lorsque le régime des eaux est établi, c'est-à-dire quand le mouvement de l'eau est uniforme, on a

$$Q = Sv, \quad \text{d'où} \quad v = \frac{Q}{S}.$$

Q dépense ou volume d'eau écoulé par seconde;
S section transversale du cours d'eau;
v vitesse moyenne d'écoulement de l'eau.

On a aussi, d'après de Prony,

$$I = \frac{P}{S}(av + bv^2).$$

I pente par mètre; elle est égale à la différence de niveau de deux points de la surface de l'eau, divisée par la distance de ces deux points mesurée suivant l'axe du cours d'eau;
S section transversale du cours d'eau;
v vitesse moyenne du cours d'eau;
P périmètre mouillé; c'est le contour de la section S, diminué de la largeur du canal à la surface de l'eau;
$a = 0,000\,0444$ coefficient constant;
$b = 0,000\,309$ *id.*

De Prony, qui a le premier donné la formule précédente, a déterminé les valeurs de a et b, en discutant les résultats de trente et une

expériences faites par Dubuat, sur des canaux factices et des rivières dont la section a varié de $0^{mq},011$ à $29^{mq},00$, et la vitesse moyenne de $0^m,12$ à $0^m,88$.

Eytelwein, en suivant la même marche que de Prony, mais en ajoutant aux résultats de Dubuat ceux obtenus depuis par MM. Brünings, Woltmann et Funke, pour des canaux et des rivières dont la section fluide a varié de $0^{mq},014$ à $2604^{mq},00$, et la vitesse de $0^m,124$ à $2^m,42$, a conclu de 91 résultats, qu'on devait faire dans la formule de Prony $a = 0,000\,024$ et $b = 0,000\,365$.

La formule de Prony, modifiée par les nouvelles valeurs de a et b d'Eytelwein, convient mieux au cas des grandes rivières; mais elle ne s'applique pas également bien aux 91 expériences discutées par Eytelwein. Les résultats de Dubuat, notamment, sont beaucoup mieux représentés par la formule de Prony.

On appelle *rayon moyen*, le quotient de la section transversale S d'un cours d'eau par le périmètre mouillé P; ainsi, en le représentant par R, on a

$$R = \frac{S}{P};$$

et la formule de Prony donne, en remplaçant a et b par leurs valeurs,

$$RI = 0,000\,0444v + 0,000\,309v^2,$$

d'où l'on tire (526)

$$v = \sqrt{0,005\,163 + 3233,428RI} - 0,071\,85,$$

ou à peu près

$$v = 56,86\,\sqrt{RI} - 0,072.$$

De ces formules on tirera la valeur de v, connaissant I et Q, ou celle de la pente I pour obtenir une vitesse $v = \frac{Q}{S}$.

Voir la partie pratique de notre *Aide-mémoire* pour les valeurs de RI correspondant aux diverses valeurs de v, d'après les coefficients a et b de Prony et d'Eytelwein.

1725. *Relations entre la vitesse moyenne, la vitesse maxima à la surface, et la vitesse au fond d'un cours d'eau.* Des expériences de Dubuat, de Prony a conclu la formule

$$\frac{v}{V} = \frac{V + 2,37}{V + 3,15}. \qquad (a)$$

v vitesse moyenne (1724);

V vitesse à la surface, prise au point où se trouve le *fil de l'eau*, c'est-à-dire au point où elle est la plus grande; cette vitesse maxima correspond généralement à la plus grande profondeur de l'eau. Dans la pratique, pour des vitesses à la surface comprise entre $0^m,20$ et $1^m,50$, on peut supposer



$$v = \frac{4}{5} V = 0{,}8V, \quad \text{ou} \quad V = 1{,}25v.$$

La formule (a) donne pour v des valeurs trop grandes lorsqu'il s'agit de grands cours d'eau; ainsi des expériences directes faites sur la Seine ont donné $v = 0{,}62V$, et d'autres faites par M. Raucourt sur la Newa ont fourni $v = 0{,}75V$.

Dubuat a conclu de ses expériences qu'on avait, en représentant par U la vitesse au fond d'un canal,

$$U = 2v - V;$$

d'où l'on tire, en faisant $V = 1{,}25v$,

$$U = 0{,}75v, \quad \text{ou} \quad v = 1{,}33U.$$

1726. *Tuyaux de conduite des eaux.*

Outre la formule relative à l'établissement des canaux à ciel découvert (1724), de Prony a encore donné une formule analogue pour le cas d'une conduite cylindrique régulière dans laquelle le régime des eaux est établi; cette formule est

$$\frac{DJ}{4} = av + bv^2 = 0{,}000\,0173v + 0{,}000\,348v^2;$$

de laquelle on tire (526)

$$v = \sqrt{0{,}0062 + 2871{,}44\,\frac{DJ}{4}} - 0{,}025,$$

ou à peu près

$$v = 53{,}58\sqrt{\frac{DJ}{4}} - 0{,}025.$$

v vitesse moyenne de régime;
D diamètre intérieur de la conduite;
J pente par mètre, ou différence de niveau de l'eau aux deux extrémités de la conduite divisée par la longueur totale de la conduite;
a coefficient égal à 0,000 0173 d'après de Prony, et à 0,000 0224 d'après Eytelwein;
b coefficient égal à 0,000 348 d'après de Prony, et à 0,000 280 d'après Eytelwein.

Ayant v, on a la dépense

$$Q = Sv = \frac{\pi D^2}{4} v,$$

$S = \frac{\pi D^2}{4}$ section de la conduite (728).

Application. Quelle est la dépense par seconde d'une conduite de $0^m{,}25$ de diamètre, de 1500 mètres de longueur et de 9 mètres de charge totale?

On a d'abord

$$J = \frac{9}{1500} = 0^m,006;$$

puis

$$v = 53,50 \sqrt{\frac{0,25 \times 0,006}{4}} - 0,025 = 1^m,013,$$

e

$$Q = \frac{3,14 \times 0,25 \times 0,25}{4} \times 1,013 = 0^{mc},0496.$$

Afin d'abréger les calculs relatifs à la conduite des eaux, de Prony a donné un tableau des valeurs de $\frac{DI}{4}$ correspondant aux diverses valeurs de v. (Voir, pour ce tableau, la partie pratique de notre *Aide-mémoire*, où nous donnons aussi une table très-étendue des vitesses et des dépenses correspondant aux diverses charges usitées, très-commode pour l'établissement des tuyaux de conduite des eaux.

HUITIÈME PARTIE.

NOTIONS DE CALCUL INFINITÉSIMAL.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1727. *Variable. Constante. Fonction. Fonction explicite. Fonction implicite.* On appelle *variable*, une quantité qui prend successivement différentes valeurs, et *constante* celle qui conserve la même valeur dans tout le cours d'un même calcul. La nature de la question dont on s'occupe indique quelles sont les variables et les constantes.

Connaissant la loi mathématique suivant laquelle varie une quantité, on peut faire passer cette quantité par ses divers états de grandeur, et par suite en déduire ses valeurs particulières. Soit l'équation

$$y = ax, \qquad (1)$$

d'une droite passant par l'origine des axes supposés rectangulaires (1160). On voit de suite que y et x sont des variables, et que a est une constante. On peut faire varier x de $-\infty$ à $+\infty$, et y varie de la même manière de $-\infty$ à $+\infty$, et donnant à x une valeur déterminée, l'équation précédente fournit la valeur correspondante de y. Donnant de même à y une valeur déterminée, l'équation précédente fournit la valeur correspondante de x.

Soit encore l'équation

$$(2) \qquad y^2 + x^2 = r^2, \quad \text{d'où} \quad y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}, \qquad (3)$$

d'une circonférence dont le centre est l'origine des axes supposés rectangulaires. On voit encore de suite que y et x sont des variables et r une constante. On peut donner à x toutes les valeurs depuis $-r$ jusqu'à $+r$ (495). Pour $x=0$ on a $y=\pm r$, et pour $x=\pm r$ on a $y=0$; ainsi y varie aussi de $-r$ à $+r$.

D'une équation entre deux variables y et x, telles que les précédentes (1) et (2), en donnant à l'une quelconque de ces variables une valeur, on peut déduire une valeur correspondante pour l'autre; c'est ce qu'on exprime en disant que chacune des variables est *fonction* de

l'autre. Cependant, si l'équation est résolue par rapport à y par exemple, équation (3), on donne plus particulièrement le nom de *fonction* à y, et celui de *variable indépendante* à la variable x, à laquelle on donne des valeurs arbitraires.

En général, lorsqu'une relation algébrique contient un nombre quelconque de variables x, y, z, résolvant l'équation par rapport à l'une de ces variables, x par exemple, on obtient une expression algébrique qu'on peut représenter par

$$x=f(y, z),$$

que l'on énonce x *égale fonction de* y, z, et qui signifie que x est égale à une expression algébrique contenant y et z. On dit que x est la fonction et y, z les variables, ou que x est fonction de y et de z.

Appelant V le volume d'un parallélipipède rectangle et x, y, z ses dimensions, on a (903)

$$V=xyz \quad \text{ou} \quad V=f(x, y, z);$$

le volume du parallélipipède est fonction de ses trois dimensions x, y, z.

Lorsqu'une équation entre plusieurs variables est résolue par rapport à l'une de ces variables, cette variable prend le nom de *fonction explicite;* si l'équation n'est pas résolue, chaque variable est une *fonction implicite* des autres. y est une fonction explicite de x dans l'équation (3), et une fonction implicite de x dans l'équation (2). Par la résolution de l'équation, la fonction implicite devient une fonction explicite.

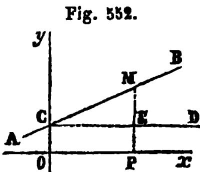
1728. *Représentation graphique des fonctions.* Quelle que soit la nature des quantites variables qui entrent dans une expression algébrique, on peut toujours, lorsque cette expression ne contient que deux variables, construire une courbe dont les coordonnées représentent ces deux variables à une échelle donnée (1156).

1er *exemple.* Soit l'équation

$$y=ax+b,$$

dans laquelle y et x sont des variables et a, b des constantes. Nous avons déjà vu (1160) que cette équation est celle d'une ligne droite AB dont b est l'ordonnée OC à l'origine et a le coefficient angulaire. Pour $x=0$, on a $y=b$, et prenant OC $=b$, le point C appartient à la droite; faisant x=OP et prenant $y=ax+b$, le point M appartient aussi à la droite, qui est alors CM prolongée indéfiniment.

Fig. 552.



Il convient d'attacher un sens plus général à la représentation graphique de l'équation du premier degré entre deux variables :

2e *exemple.* S étant l'aire d'un rectangle dont b et h sont les deux dimensions, on a (690)

$$S=bh.$$

Supposant la base b constante et la hauteur h variable, cette équation sera celle d'une ligne droite passant par l'origine. Prenant une abscisse égale à une valeur de h, et élevant une ordonnée égale à bh, on aura un second point de la droite, qu'on pourra alors tracer. Une ordonnée quelconque de cette droite représentera l'aire S du rectangle qui a l'abscisse correspondante pour hauteur, c'est-à-dire que l'aire S contiendra autant de fois l'unité de surface que cette ordonnée contiendra de fois l'unité de longueur.

3° *exemple.* Soit l'équation

$$y = ax^2.$$

y et x étant des variables et a une constante, cette équation est celle d'une parabole (1240), que l'on construira par points en donnant à x différentes valeurs et en calculant les valeurs correspondantes de y. Remarquant que cette équation revient à celle $y^2 = 2px$, en changeant x en y et y en x, et en faisant le paramètre $2p = \frac{1}{a}$, on pourra encore construire la courbe par le procédé du n° 1249.

A l'équation précédente se rattachent celles bien connues

$$E = \frac{1}{2}jt^2, \quad \text{et} \quad h = \frac{1}{2}gt^2. \qquad (1437,\ 1446)$$

4° *exemple.* La fonction

$$y = ax^3,$$

dans laquelle a est une constante, est l'équation d'une courbe parabolique du 3° degré, que l'on peut construire par points en donnant successivement à x différentes valeurs, et en tirant de l'équation les valeurs correspondantes de y.

On construirait de même la courbe représentant la fonction

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

qui exprime le volume de la sphère (947). Une ordonnée quelconque de la courbe exprimerait le volume de la sphère qui aurait l'abscisse correspondante R pour rayon, c'est-à-dire que la sphère contiendrait autant d'unités de volume que cette ordonnée contiendrait d'unités de longueur.

Les fonctions

$$y = x^3 - ax^2 + bx - c, \quad \text{et} \quad y = x^5 + ax^4 + x^3 - bx^2 - cx - d,$$

qui contiennent la variable indépendante à différentes puissances, sont également représentées par des courbes que l'on construirait par points comme les précédentes; c'est ce qui a été fait au n° 534.

5° *exemple.* Une quantité variable peut être fonction de plusieurs au-

tres variables, telle est, a étant seule constante,

$$V = axyz.$$

Une telle fonction peut être représentée graphiquement dès que l'on connaît les variations de y et de z correspondant à la variation de x, c'est-à-dire les valeurs de y et de z correspondant à une valeur quelconque de x. Si l'on peut poser, par exemple,

$$xyz = x',$$

on a

$$V = ax',$$

et les valeurs de V sont représentées par les ordonnées d'une droite passant par l'origine, et dont les abscisses sont les valeurs de x'.

On pourrait poser aussi

$$xyz = x'^2, \quad \text{d'où} \quad V = ax'^2.$$

Alors les valeurs de V seraient représentées par les ordonnées d'une parabole dont les valeurs de x' seraient les abscisses.

Si l'on avait

$$y = axz^2,$$

selon qu'on poserait

$$xz^2 = x', \quad \text{ou} \quad xz^2 = x'^2,$$

on aurait

$$y = ax', \quad \text{ou} \quad y = ax'^2,$$

c'est-à-dire, comme ci-dessus, l'équation d'une droite ou d'une parabole.

De ces divers exemples, on peut conclure que la valeur d'une fonction quelconque peut toujours être représentée par les ordonnées d'une courbe, dont les abscisses sont les valeurs de la variable indépendante ou même les valeurs d'une fonction de plusieurs variables. Réciproquement, on peut admettre aussi qu'une courbe quelconque rapportée à deux axes représente la loi de variation simultanée de deux variables x et y.

1729. *Variation des fonctions. Fonction croissante ou décroissante.*

1er *exemple.* Soit l'équation du premier degré à deux variables, c'est-à-dire l'équation d'une droite (1728),

$$y = ax + b. \qquad (1)$$

Fig. 553.

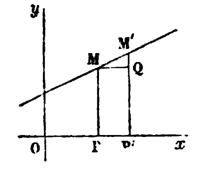
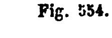
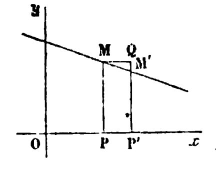


Fig. 554.





Si la variable indépendante $x = \text{OP}$ augmente d'une quantité $\text{PP}' = \alpha$, la fonction $y = \text{MP}$ deviendra $y' = \text{M'P'}$, et l'on aura

$$y' = a(x + \alpha) + b; \qquad (2)$$

d'où, en retranchant (1) de (2),

$$y' - y = a\alpha \quad \text{ou} \quad \text{M'Q} = a \times \text{PP}'.$$

Divisant les deux membres de cette égalité par α, on a

$$\frac{y'-y}{\alpha}=a \quad \text{ou} \quad \frac{\text{M'Q}}{\text{PP'}}=a.$$

Ce qui montre que le rapport de l'accroissement $y'-y$ de la fonction y à celui α de la variable x, est indépendant de l'accroissement $\alpha=\text{PP'}$ attribué à x, aussi bien que de l'accroissement correspondant qui en est résulté pour y.

2e *exemple*. Soit la fonction

$$y=ax^2. \qquad \text{(1728, 3e exemple.)}$$

x devenant $x+\alpha$, et désignant par y' la nouvelle valeur de la fonction, on a

$$y'=a(x+\alpha)^2=ax^2+2a\alpha x+a\alpha^2.$$

L'accroissement de la fonction est alors

$$y'-y=2a\alpha x+a\alpha^2, \quad \text{d'où} \quad \frac{y'-y}{\alpha}=2ax+a\alpha.$$

Le rapport $\frac{y'-y}{\alpha}$ n'est pas, comme dans l'exemple précédent, indépendant de α; mais comme à mesure que α diminue le terme $a\alpha$ devient de plus en plus petit, l'on conçoit que α peut décroître assez pour qu'on puisse négliger $a\alpha$ par rapport à $2ax$, et poser à la limite

$$\frac{y'-y}{\alpha}=2ax.$$

Ainsi le rapport $\frac{y'-y}{\alpha}$ a une limite $2ax$ parfaitement déterminée. Il sera établi que cette propriété est générale pour toute relation algébrique entre deux variables.

Une *fonction* $y=f(x)$ est *croissante* ou décroissante, suivant que y augmente ou diminue quand x augmente. Ainsi la *fig.* 553 représente une fonction croissante, et celle 554 une fonction décroissante. Une même fonction peut être alternativement croissante et décroissante.

1730. *Quantité différentielle. Coefficient différentiel. Dérivée. Objet du calcul différentiel.*

Lorsque l'accroissement α de l'abscisse ou variable x est petit, on le désigne par Δx, que l'on énonce *delta x*, et que l'on peut considérer comme une fonction de x; de même un petit accroissement $y'-y$ se désigne par Δy. D'après ces notations, on a

$$\frac{y'-y}{\alpha}=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Lorsque Δy et Δx décroissent et deviennent aussi petits que l'on veut, sans cependant devenir nuls, on les représente à la limite par dy et dx.

Dans le 2e exemple du numéro précédent, on a ainsi pour la limite du rapport des accroissements de y et de x,

$$\frac{dy}{dx} = 2ax, \quad \text{d'où} \quad dy = 2ax\,dx.$$

Ce qui montre que l'accroissement infiniment petit dy de la fonction ou ordonnée y a pour expression algébrique le produit de l'accroissement infiniment petit dx de la variable ou abscisse x par le coefficient *variable* $2ax$.

Les quantités dy et dx considérées comme des infiniment petits sont appelées les *différentielles* de y et de x. Le coefficient $2ax$, par lequel il faut multiplier la différentielle dx pour avoir la différentielle dy, prend le nom de *coefficient différentiel*. Le rapport $\frac{dy}{dx}$ est appelé la *dérivée* de y par rapport à x ou la dérivée de la fonction y par rapport à la variable x; il est égal au coefficient différentiel.

Dans l'exemple précédent, le rapport inverse

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2ax}$$

est la dérivée de x par rapport à y; x est alors la fonction et y la variable.

Ordinairement la dérivée $\frac{dy}{dx}$ se désigne par y' ou par $f'(x)$; ainsi l'on écrit

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x);$$

notations qui rappellent que la dérivée de la fonction y est prise par rapport à la variable x. Si l'on prenait la dérivée de x par rapport à y, on écrirait

$$\frac{dx}{dy} = x' = f'(y).$$

Il ne faut pas confondre la différence de deux quantités avec la différentielle d'une quantité. Ainsi, dans le dernier exemple, ayant la différence

$$y' - y = 2a\alpha x + a\alpha^2,$$

tandis que la différentielle

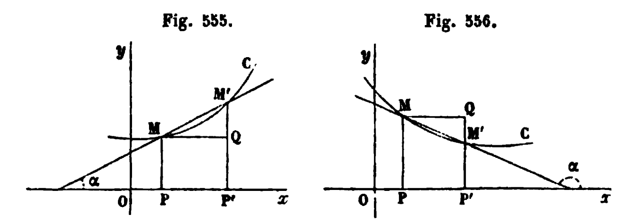
$$dy = 2ax dx,$$

on voit que la différence $y' - y$ de deux quantités, telle petite qu'elle soit, est évaluable en nombre, tandis que la différentielle dy ne l'est pas.

La différentielle d'une quantité ne peut être considérée que comme une expression ou symbole algébrique résultant du calcul; mais il n'en est pas de même du rapport $\frac{dy}{dx}$, qui a une valeur parfaitement déterminée, et que l'on peut évaluer en nombre.

L'objet principal du calcul différentiel est de *déterminer la loi qui lie* les accroissements d'une fonction à ceux de la *variable dont elle dépend*, c'est-à-dire la valeur du rapport $\frac{dy}{dx}$.

1731. *Interprétation géométrique de la dérivée d'une fonction.* Soit C



une courbe quelconque, laquelle rapportée à deux axes coordonnés rectangulaires a pour équation

$$y = f(x),$$

$f(x)$ représentant l'ensemble des calculs à effectuer pour construire la courbe par points, en donnant à x différentes valeurs et en calculant les valeurs correspondantes de y. Considérons sur la courbe C deux points M, M' dont les coordonnées sont respectivement y, x et y', x'. On voit que pour passer de M en M' il faut augmenter l'ordonnée y d'une quantité M'Q, qui est positive ou négative selon que la fonction est croissante (*fig.* 555) ou décroissante (*fig.* 556), et le rapport des accroissements simultanés de l'ordonnée et de l'abcisse est

$$\frac{M'Q}{PP'} = \frac{y'-y}{x'-x}.$$

Menant la sécante MM', le rapport $\frac{y'-y}{x'-x}$ est la tangente trigonométrique de l'angle α que forme MM' avec l'axe des x, et si le point M' se rapproche progressivement de M, ce qui revient à faire décroître les accroissements des coordonnées du point M, la sécante MM' atteindra une position limite dans laquelle elle sera tangente à la courbe, et qui correspondra à la limite

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{du rapport} \quad \frac{y'-y}{x'-x}.$$

Ainsi l'on arrive à cette conséquence importante : *la limite du rapport des accroissements simultanés d'une fonction* y *et de la variable* x *est égale à la tangente de l'inclinaison sur l'axe des* x *de la courbe* C *qui représente la fonction*, ou autrement, *cette limite est égale au coefficient d'inclinaison de la tangente à la courbe.*

La détermination de cette limite de rapport résout le problème général des tangentes, qui est une application importante du calcul différentiel.



DIFFÉRENTIELLES ET DÉRIVÉES DES FONCTIONS FONDAMENTALES :

$$y = x^m, \quad y = \log x, \quad y = \sin x.$$

1732. *Soit à déterminer la dérivée et la différentielle de*

$$y = x^m. \tag{1}$$

1° *Supposons d'abord que* m *est entier et positif.* Donnant à x un accroissement Δx, il en résulte pour y un accroissement correspondant Δy, et l'équation (1) devient (518)

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^m = x^m + mx^{m-1}\,\Delta x + \frac{m(m-1)}{1.2}\,x^{m-2}(\Delta x)^2 + \ldots. \tag{2}$$

Retranchant (1) de (2), on a

$$\Delta y = mx^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1.2}\,x^{m-2}(\Delta x)^2 + \ldots.$$

Divisant les deux membres de cette nouvelle équation par Δx, elle devient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}\,x^{m-2}\Delta x + \ldots.$$

Ce qui montre que la valeur du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ contient un terme mx^{m-1} indépendant de l'accroissement Δx, mais que tous les autres ont Δx en facteur. Or comme Δx peut être aussi petit que l'on veut, et par suite aussi les termes qui le contiennent comme facteur, on conçoit qu'à la limite, c'est-à-dire quand Δy et Δx sont des quantités infiniment petites ou des différentielles, on peut négliger ces termes, et poser

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \tag{3}$$

ou encore (1730)

$$y' = f'(x) = mx^{m-1}.$$

Ce qui montre que *pour avoir la dérivée* y' *de la fonction* $y = x^m$, *il suffit de donner à la variable* x *pour coefficient l'exposant* m *de la fonction, et pour exposant ce même exposant* m *diminué d'une unité.*

Ainsi pour

$$y = x^5, \quad \text{on a} \quad \frac{dy}{dx} \text{ ou } y' = 5x^4,$$

et pour

$$y = x, \quad \text{on a} \quad y' = x^0 = 1. \qquad (506)$$

De la relation (3) on tire

$$dy = mx^{m-1}\,dx.$$

Ce qui montre que la différentielle dy de la fonction y est égale à la

dérivée de y par rapport à x, multipliée par la différentielle dx de la variable x.

2° *Cas où l'exposant de* x *est fractionnaire.* Soit la fonction

$$y = x^{\frac{p}{q}},$$

dans laquelle p et q sont des nombres entiers positifs. Élevant les deux membres à la puissance q, on a (508)

$$y^q = x^p;$$

d'où, en prenant la différentielle de chaque membre (1°),

$$qy^{q-1}\mathrm{d}y = px^{p-1}\mathrm{d}x,$$

et par suite

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}.$$

Ayant

$$x^{p-1} = \frac{x^p}{x} \quad \text{et} \quad y^{q-1} = \frac{y^q}{y}, \qquad (508)$$

on a donc

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{p}{q}\frac{x^p}{x}\frac{y}{y^q},$$

ou, puisque $y^q = x^p$,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{p}{q}\frac{y}{x}.$$

Remplaçant dans cette dernière égalité y par sa valeur $x^{\frac{p}{q}}$, on a en définitive

$$y' = f'(x) \text{ ou } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}.$$

Ainsi la règle du 1° pour avoir la dérivée est encore applicable à ce cas.

De l'équation précédente, on tire l'équation différentielle, c'est-à-dire la relation algébrique entre les différentielles dy et dx,

$$\mathrm{d}y = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}\mathrm{d}x.$$

Application. Pour

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}},$$

on a

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad (507)$$

et

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}.$$

3° *Exposant négatif.* Soit la fonction

$$y = x^{-m},$$

dans laquelle m est un nombre entier. Cette relation revient à (506)

$$y = \frac{1}{x^m}, \tag{1}$$

ou, en renversant les rapports,

$$\frac{1}{y} = x^m. \tag{2}$$

Faisant croître x de Δx, cette dernière relation donne

$$\frac{1}{y+\Delta y} = (x+\Delta x)^m. \tag{3}$$

Retranchant (3) de (2), on a successivement :

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{y+\Delta y} = x^m - (x+\Delta x)^m,$$

$$\frac{y+\Delta y - y}{y^2+y\Delta y} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta y}{y^2+y\Delta y} = -[(x+\Delta x)^m - x^m],$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\,\frac{1}{y^2+y\Delta y} = \frac{-[(x+\Delta x)^m - x^m]}{\Delta x}.$$

Passant à la limite, $y\Delta y$ est négligeable, et il vient (1°)

$$\frac{dy}{dx}\,\frac{1}{y^2} = -mx^{m-1};$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = -y^2 mx^{m-1}. \tag{4}$$

Comme la relation (1) donne $y^2 = \frac{1}{x^{2m}}$, on a donc en définitive, en remplaçant dans l'équation (4) y^2 par cette valeur,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^{2m}}mx^{m-1} = -mx^{m-1-2m} = -mx^{-m-1}. \tag{5}$$

Ainsi la règle donnée au 1° pour obtenir la dérivée est encore applicable quand l'exposant de x est négatif.

La relation (5) montre que la dérivée est négative. Ce qui doit être, car d'après l'équation (1) à un accroissement Δx de la variable x répond une diminution, c'est-à-dire un accroissement négatif, de la fonction.

De l'équation (5) on déduit la différentielle

$$dy \text{ ou } dx^{-m} = -mx^{-m-1}dx.$$

1733. *Dérivée et différentielle de*

$$y = \log x. \tag{1}$$

x croissant de Δx, y croît d'une quantité correspondante Δy, et l'on a

$$y + \Delta y = \log(x+\Delta x). \tag{2}$$

Retranchant (1) de (2), il vient

$$\Delta y = \log(x+\Delta x) - \log x = \log\frac{x+\Delta x}{x} = \log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right), \quad (393)$$

d'où

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}. \quad (3)$$

Posant

$$\Delta x = \frac{x}{m} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{m},$$

l'expression (3) devient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log\left(1+\frac{1}{m}\right)}{\frac{x}{m}} = \frac{m}{x}\log\left(1+\frac{1}{m}\right) = \frac{\log\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}{x}.$$

Passant à la limite dx de Δx, limite qui correspond à $m=\infty$, on a, en représentant par e la valeur limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{x}.$$

Pour avoir la valeur de e, développant $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ d'après la formule du binôme de Newton, on a (518)

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + m\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{m^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{1}{m^3} + \ldots +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}\frac{1}{m^n} + \ldots + \frac{1}{m^m},$$

ou, en supprimant les facteurs communs dans chaque terme et en effectuant la division par m,

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + 1 + \frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right) + \frac{1}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n+1}{m}\right) + \ldots + \frac{1}{m^m},$$

et si l'on fait $m=\infty$, il vient, attendu que les termes $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}$, ... sont nuls,

$$e = \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots n} + \frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)} +$$
$$+ \frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)(n+2)} + \ldots$$

Les termes affectés de n ayant pour facteur commun $\frac{1}{1.2.3...n}$, la limite de leur somme, moins le premier terme, peut s'écrire

$$\frac{1}{1.2.3...n}\lim\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\ldots\right]. \quad (4)$$

La somme des fractions placées entre parenthèses étant plus petite que la somme des termes de la progresssion géométrique décroissante

$$\div \frac{1}{n+1} : \frac{1}{(n+1)^2} : \frac{1}{(n+1)^3} \ldots,$$

dont le premier terme et la raison sont $\frac{1}{n+1}$, cette somme ayant pour limite $\frac{1}{n}$, la somme des termes entre parenthèses de l'expression (4) est plus petite que $\frac{1}{n}$. On peut donc calculer la valeur de e avec le degré d'approximation que l'on veut. On trouve

$$e = 2,718\,2818 \quad \text{et} \quad \log e = 0,434\,2945. \quad (404)$$

La dérivée de $y = \log x$ est donc

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{\log e}{x} = \frac{0,434\,2945}{x},$$

et la différentielle est

$$dy = \log e \frac{dx}{x}.$$

1734. *Dérivée et différentielle de*

$$y = \sin x. \quad (1)$$

En donnant à l'arc x l'accroissement Δx, la fonction y ou le sinus y prend l'accroissement correspondant Δy, et la relation (1) devient

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x). \quad (2)$$

Retranchant (1) de (2), on a

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x. \quad (3)$$

Comme on a (1118)

$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{1}{2}(p+q)\sin\frac{1}{2}(p-q), \quad (4)$$

posant

$$p = x + \Delta x \quad \text{et} \quad q = x,$$

d'où

$$p + q = 2x + \Delta x, \quad p - q = \Delta x, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}(p+q) = x + \frac{\Delta x}{2}, \quad \frac{1}{2}(p-q) = \frac{\Delta x}{2},$$

la relation (4) appliquée à la différence (8) donne

$$\Delta y = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Divisant les deux membres par Δx, il vient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x},$$

ou, en divisant par 2 les deux termes de la fraction formant le second membre,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Le rapport de $\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$ à $\frac{\Delta x}{2}$ ayant pour limite l'unité (1119), passant à la limite on a donc pour la dérivée cherchée

$$\frac{dy}{dx} = \cos\left(x + \frac{dx}{2}\right),$$

ou simplement, en remarquant que $\frac{dx}{2}$ est négligeable,

$$\frac{dy}{dx} = \cos x.$$

Par suite, on a la différentielle

$$dy = \cos x dx.$$

THÉORÈMES SUR LA DIFFÉRENTIATION.

1738. *La dérivée et la différentielle d'une quantité constante sont nulles.*

Soient les fonctions

$$y = F(x), \qquad (1)$$
$$y = F(x) + C, \qquad (2)$$

qui ne diffèrent que par la constante ou quantité invariable C. De la fonction (1) on déduit

$$y + \Delta y = F(x + \Delta x),$$

de celle (2),

$$y + \Delta y = F(x + \Delta x) + C,$$

et toutes les deux donnent pour l'accroissement Δy de la fonction la même valeur

$$\Delta y = F(x + \Delta x) - F(x).$$

Par suite, l'une et l'autre donnent

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x},$$

et

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x).$$

Ainsi les dérivées des fonctions (1) et (2) sont les mêmes. Il en est de même de leurs différentielles; car on déduit de l'une et de l'autre

$$dy = F'(x)\,dx.$$

La constante C disparaît toujours dans la différentiation.

1736. *La dérivée et la différentielle d'une somme de plusieurs fonctions sont respectivement la somme des dérivées et des différentielles de ces fonctions.*

Soit la somme

$$y = F(x) + F_1(x) + F_2(x) + \dots \qquad (1)$$

dans laquelle $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$... désignent diverses quantités algébriques exprimées en fonction de x; on a, par exemple,

$$F(x) = \log x, \quad F_1(x) = \sin x, \quad F_2(x) = x^m \dots$$

Si l'on donne à x un accroissement quelconque Δx, la variable y croît d'une quantité correspondante Δy, et la relation (1) devient

$$y + \Delta y = F(x+\Delta x) + F_1(x+\Delta x) + F_2(x+\Delta x) + \dots \qquad (2)$$

Retranchant (1) de (2), on a

$$\Delta y = [F(x+\Delta x) - F(x)] + [F_1(x+\Delta x) - F_1(x)] + [F_2(x+\Delta x) - F_2(x)] + \dots$$

Divisant les deux membres par Δx et passant à la limite, il vient

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} + \lim \frac{F_1(x+\Delta x) - F_1(x)}{\Delta x} + \dots$$

ou

$$y' = F'(x) + F'_1(x) + F'_2(x) + \dots = \frac{\log e}{x} + \cos x + mx^{m-1} + \dots$$

Ce qu'il fallait démontrer. On a de même pour la différentielle,

$$dy = F'(x)\,dx + F'_1(x)\,dx + F'_2(x)\,dx \dots = \frac{\log e}{x}\,dx + \cos x\,dx + mx^{m-1}\,dx + \dots$$

1737. *La dérivée du produit de plusieurs fonctions ou variables est égale à la somme des produits qu'on obtient en multipliant la dérivée de chaque fonction par le produit des autres variables.*

1° Soit

$$y = uv \qquad (1)$$

le produit de deux variables u et v, ces variables *étant deux fonctions* de x telles que, par exemple,

$$u = \log x, \quad v = \sin x.$$

Si l'on donne à x l'accroissement Δx, u, v et y prennent les accroissements correspondants Δu, Δv et Δy, et la relation (1) devient

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v. \qquad (2)$$

Retranchant (1) de (2), on a

$$\Delta y = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v,$$

ou, en divisant par Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v,$$

dont la limite est

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} = vu' + uv', \qquad (3)$$

attendu que la limite $\frac{du}{dx}dv$ de $\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v$ est négligeable puisque le facteur dv est infiniment petit.

u' et v' désignent les dérivées de u et v par rapport à x, et la relation (3) vérifie l'énoncé. Pour $u = \log x$ et $v = \sin x$ on a donc (1733 et 1734)

$$\frac{dy}{dx} = \sin x\frac{\log e}{x} + \log x\cos x.$$

De la relation (3) on déduit pour la différentielle dy,

$$dy = vu'dx + uv'dx = vdu + udv;$$

ce qui donne pour l'exemple proposé

$$dy = \sin x\frac{\log e}{x}dx + \log x\cos x\,dx. \qquad (4)$$

Ainsi *la différentielle du produit de deux variables est égale à la somme des produits obtenus en multipliant chaque variable par la différentielle de l'autre variable.*

2° Soit le produit

$$y = stv \qquad (5)$$

de trois variables s, t, v qui sont des fonctions de x; on a, par exemple,

$$s = x^m, \quad t = \log x, \quad v = \sin x.$$

Posant $st = u$, d'où $du = sdt + tds$, la relation (5) devient

$$y = uv,$$

et, d'après le 1°, on a pour la dérivée

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx},$$

ou, en remplaçant u et du par leurs valeurs,

$$\frac{dy}{dx} = st\frac{dv}{dx} + \frac{v}{dx}(sdt + tds) = st\frac{dv}{dx} + sv\frac{dt}{dx} + tv\frac{ds}{dx},$$

ou enfin, en désignant par v', t' et s' les dérivées $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dt}{dx}$ et $\frac{ds}{dx}$,

$$\frac{dy}{dx} = y' = stv' + svt' + tvs'. \qquad (6)$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. En appliquant la formule (6) à l'exemple proposé on a

$$\frac{dy}{dx} = x^m \log x \cos x + x^m \sin x \frac{\log e}{x} + \log x \sin x m x^{m-1}.$$

De la relation (6) on déduit pour la différentielle de y

$$dy = stv'dx + svt'dx + tvs'dx,$$

et pour l'exemple proposé on a

$$dy = x^m \log x \cos x dx + x^m \sin x \frac{\log e}{x} dx + \log x \sin x m x^{m-1} dx.$$

Par la marche du 2° on ferait voir que l'énoncé s'applique à 4 et en général à un nombre quelconque de facteurs.

3° *Cas particulier où l'un des facteurs est constant.* Soit le produit

$$y = ax^m,$$

dans lequel le facteur a est constant. L'application de la règle générale de la différentiation pour deux facteurs donne (1°)

$$\frac{dy}{dx} = amx^{m-1} + 0 = amx^{m-1};$$

d'où l'on déduit la différentielle

$$dy = amx^{m-1}dx.$$

Ainsi dans la différentiation d'un produit, tout facteur constant entre comme coefficient soit dans la dérivée, soit dans la différentielle.

1738. *Dérivée et différentielle d'un quotient ou d'une fraction.* Soit la fonction

$$y = \frac{u}{v}, \qquad (1)$$

dans laquelle u et v sont des fonctions d'une même variable x; on a par exemple

$$u = x^m, \qquad v = \log x.$$

De la relation (1) on déduit (148)

$$y = uv^{-1}.$$

Prenant les différentielles des deux membres, on a, en appliquant la règle de la différentiation du produit de deux facteurs (1°, 1737),

$$dy = v^{-1}du - uv^{-2}dv = \frac{vdu}{v^2} - \frac{udv}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}. \qquad (2)$$

Pour avoir la dérivée, de la relation (1) on déduit

$$u = yv,$$

et prenant la dérivée des deux membres par rapport à x, on a (1°, 1737)

$$\frac{du}{dx} = y\frac{dv}{dx} + v\frac{dy}{dx},$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{vdx} - \frac{y}{v}\frac{dv}{dx}. \qquad (3)$$

Remplaçant dans cette égalité y par sa valeur $\frac{u}{v}$ on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{vdx} - \frac{u}{v^2}\frac{dv}{dx},$$

ou, en désignant par y', u' et v' les dérivées de y, u et v par rapport à x,

$$y' = \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{vu' - uv'}{v^2}. \qquad (4)$$

Ce qui montre que *la dérivée d'un quotient est égale au produit du dénominateur par la dérivée du numérateur, moins le produit du numérateur par la dérivée du dénominateur, le tout divisé par le carré du dénominateur.*

En comparant les relations (2) et (4), on voit qu'en remplaçant dans ce dernier énoncé le mot *dérivée* par celui *différentielle* on a l'énoncé de la différentielle d'un quotient.

1739. *Dérivée des fonctions de fonctions.* Lorsqu'une fonction n'est pas exprimée immédiatement à l'aide de la variable indépendante x, comme dans les exemples

$$y = \log(\sin x), \quad y = \log(x^m), \quad y = \sin(mx + C),$$

on dit que y est une fonction de fonction. De telles relations s'écrivent sous la forme

$$y = Ff(x),$$

et s'énoncent *y égale fonction de fonction de x.*

Dans ces exemples la quantité entre parenthèses est elle-même une fonction de x; en la représentant par u, les expressions précédentes peuvent s'écrire :

$$y = \log u, \quad \text{où} \quad u = \sin x;$$
$$y = \log u, \quad \text{où} \quad u = x^m;$$
$$y = \sin u, \quad \text{où} \quad u = mx + C.$$

La quantité y prend le nom de *fonction principale;* la quantité u celui de *fonction subordonnée*, et x celui de *variable indépendante*.

Il est facile de trouver une relation algébrique entre ces diverses quantités. En effet, écrivant

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

comme cette identité subsiste quels que soient les accroissements simultanés Δx, Δu et Δy des variables x, u et y, passant à la limite on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}. \qquad (a)$$

$\frac{dy}{du}$ étant la dérivée de y par rapport à u, et $\frac{du}{dx}$ celle de u par rapport à x, on voit que *la dérivée d'une fonction de fonction est égale au produit des dérivées de ces fonctions.*

1re *application.* Soit à trouver la dérivée de

$$y = \log(\sin x). \qquad (1)$$

Posant

$$u = \sin x, \qquad (2)$$

la relation (1) devient

$$y = \log u;$$

d'où (1733)

$$\frac{dy}{du} = \frac{\log e}{u}.$$

La relation (2) donne, en prenant la dérivée de u par rapport à x (1734),

$$\frac{du}{dx} = \cos x.$$

Remplaçant $\frac{dy}{du}$ et $\frac{du}{dx}$ par leurs valeurs dans la relation (a), on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{u} \cos x,$$

et en remplaçant u par sa valeur $\sin x$, on obtient définitivement pour la dérivée cherchée

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log e \cos x}{\sin x} = \frac{\log e}{\tang x}. \qquad (1107)$$

On en déduit pour la différentielle

$$dy = \frac{\log e}{\operatorname{tang} x} dx.$$

2° *application.* Soit à trouver la dérivée de

$$y = \cos x, \quad (3)$$

égalité qui revient à (1091)

$$y = \sin(90° - x). \quad (4)$$

Posons

$$u = 90° - x, \quad (5)$$

ce qui transforme la relation proposée (3) en

$$y = \sin u;$$

d'où, en prenant la dérivée de y par rapport à la fonction subordonnée u (1734)

$$\frac{dy}{du} = \cos u = \cos(90° - x) = \sin x.$$

De la relation (5) on déduit, en prenant la dérivée de u par rapport à x (1732, 1735, 1736),

$$\frac{du}{dx} = -1.$$

Remplaçant $\frac{dy}{du}$ et $\frac{du}{dx}$ par leurs valeurs dans la relation (a), on a pour la dérivée cherchée

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x.$$

On en déduit pour la différentielle de $y = \cos x$

$$dy = -\sin x\, dx.$$

3° *application.* Soit à trouver la dérivée de

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (6)$$

Élevant au carré, on a

$$y^2 = a^2 - x^2.$$

Différentiant les deux membres, il vient (1732, 1735, 1736)

$$2y\,dy = -2x\,dx;$$

d'où

$$dy = \frac{-x\,dx}{y} = -\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

et

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

On peut traiter la même question en s'appuyant sur le théorème des fonctions de fonctions. Posant

$$u = a^2 - x^2, \quad \text{d'où} \quad du = -2x dx \quad \text{et} \quad \frac{du}{dx} = -2x,$$

la relation (6) peut s'écrire

$$y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}};$$

d'où (1732)

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2u^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}}. \qquad (506)$$

Remplaçant $\frac{dy}{du}$ et $\frac{du}{dx}$ par leurs valeurs dans la relation (a) on a, comme ci-dessus,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \times -2x = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

puis encore

$$dy = -\frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

1740. *Généralisation du théorème des fonctions de fonctions.* Ayant

$$y = F(u), \quad u = F(v), \quad v = F(z), \quad z = F(x),$$

pour déterminer la dérivée $\frac{dy}{dx}$ de y par rapport à x, on raisonne comme il suit : à un accroissement Δx correspondent les accroissements Δz, Δv, Δu, Δy, et on a l'identité

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta v} \times \frac{\Delta v}{\Delta z} \times \frac{\Delta z}{\Delta x},$$

qui subsiste quels que soient les accroissements simultanés des variables x, z, v, u, y, et qui devient, en passant à la limite,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dv} \times \frac{dv}{dz} \times \frac{dz}{dx}. \qquad (a)$$

Ce qui démontre que *la dérivée d'une fonction d'autant de fonctions que l'on veut d'une même variable* x *est bien égale au produit des dérivées des diverses fonctions.*

Application. Soit à trouver la dérivée de

$$y = [\log \sin (x + a)]^3. \qquad (1)$$

On pose successivement :

$$x + a = z, \qquad (2)$$
$$\sin z = v \quad \text{où} \quad v = \sin(x + a), \qquad (3)$$
$$\log v = u \quad \text{où} \quad u = \log \sin(x + a), \qquad (4)$$
$$u^3 = y \quad \text{où} \quad y = [\log \sin(x + a)]^3. \qquad (5)$$

Prenant les dérivées des fonctions successives (5), (4), (3) et (2), on a:

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 = 3[\log \sin(x+a)]^2, \qquad (1732)$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{\log e}{v} = \frac{\log e}{\sin z} = \frac{\log e}{\sin(x+a)}, \qquad (1733)$$

$$\frac{dv}{dz} = \cos z = \cos(x+a), \qquad (1734)$$

$$\frac{dz}{dx} = 1. \qquad (1735,\ 1736)$$

Remplaçant ces dérivées par leurs valeurs dans la relation (a), on a

$$\frac{dy}{dx} = 3[\log \sin(x+a)]^2 \frac{\log e}{\sin(x+a)} \cos(x+a).$$

Multipliant les deux membres de cette égalité par dx, on aura la différentielle dy.

1741. *Dérivées et différentielles des fonctions exponentielles*, c'est-à-dire des fonctions de la forme

$$y = A^x, \qquad (1)$$

dans lesquelles y et x sont des variables et A une quantité constante.

Prenant les logarithmes des deux membres de l'équation (1), il vient

$$\log y = x \log A, \qquad (509)$$

relation dans laquelle log A est une quantité constante. Prenant les différentielles des deux membres, on a

$$\frac{(\log e)\,dy}{y} = (\log A)\,dx; \qquad (1733,\ 3^\circ\ 1737).$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\log A)y}{\log e} = \frac{(\log A)A^x}{\log e}.$$

De cette équation on déduit pour la différentielle

$$dy = \frac{(\log A)\,A^x}{\log e}\,dx.$$

Dans le système népérien on a (404)

$$\frac{dy}{dx} = (L.A)A^x \quad \text{et} \quad dy = (L.A)A^x dx.$$

Cas particuliers. 1° Si la constante A est égale à la base du système de logarithmes népériens, c'est-à-dire si l'on a

$$y = e^x,$$

la dérivée devient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\log e)e^x}{\log e} = e^x;$$

2° Si la fonction proposée était

$$y = e^{-x},$$

on aurait successivement :

$$\log y = -x \log e,$$

$$\frac{(\log e)\,dy}{y} = -(\log e)\,dx,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\log e}{\log e}\,y = -e^{-x}.$$

1742. *Dérivées et différentielles des fonctions circulaires*, c'est-à-dire des fonctions dans lesquelles entrent les expressions ou rapports trigonométriques des angles ou des arcs (1090). Telles sont les fonctions :

1° $y = \sin x$,
2° $y = \cos x$,
3° $y = \operatorname{tang} x$,
4° $y = \cot x$,
5° $y = \operatorname{arc}(\sin x)$,
6° $y = \operatorname{arc}(\cos x)$,
7° $y = \operatorname{arc}(\operatorname{tang} x)$.

1° Pour $y = \sin x$, on a (1734)

$$\frac{dy}{dx} \text{ ou } f'(x) = \cos x \quad \text{et} \quad dy = \cos x\,dx.$$

2° Pour $y = \cos x$, on a (1739, 2° application)

$$\frac{dy}{dx} \text{ ou } f'(x) = -\sin x \quad \text{et} \quad dy = -\sin x\,dx.$$

3° Soit la fonction

$$y = \operatorname{tang} x.$$

Cette fonction revenant à

$$y = \frac{\sin x}{\cos x},$$

on a (1738)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \cos x - (\sin x \times -\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

Ayant

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{et} \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tang}^2 x}, \qquad (1107)$$

on a donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tang}^2 x,$$

et, par suite,

$$dy = (1 + \operatorname{tang}^2 x)\,dx.$$

4° Pour

$$y = \cot x,$$

on écrit (1107)

$$y = \frac{\cos x}{\sin x},$$

et l'on a (1738)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(\sin x\times -\sin x)-\cos x\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{-1}{\sin^2 x}=-(1+\cot^2 x).$$

Par suite la différentielle est

$$dy=-\frac{dx}{\sin^2 x}=-(1+\cot^2 x)dx.$$

Dérivées et différentielles des fonctions circulaires inverses.

5° Soit la fonction

$$y=\text{arc}(\sin x),$$

qui exprime que y est l'arc dont le sinus est égal à x, et que l'on peut écrire inversement

$$x=\sin y,$$

relation qui donne (1734)

$$\frac{dx}{dy}=\cos y;$$

d'où

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Par suite on a

$$dy=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

6° Pour la fonction circulaire inverse

$$y=\text{arc}(\cos x),$$

qui revient à

$$x=\cos y,$$

on a (1739, 2° application)

$$\frac{dx}{dy}=-\sin y;$$

d'où

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

et, par suite,

$$dy=\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

7° Pour

$$y=\text{arc}(\text{tang}\, x),$$

on écrit

$$x=\text{tang}\, y,$$

et l'on a (3°)

$$\frac{dx}{dy}=1+\text{tang}^2 y;$$

d'où

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+\text{tang}^2 y}=\frac{1}{1+x^2},$$

et, par suite,

$$dy = \frac{dx}{1+x^2}.$$

1743. *Dérivées et différentielles des fonctions implicites.* Pour appliquer les règles qui précèdent à la détermination de la dérivée $\frac{dy}{dx}$, il faut commencer par résoudre les équations par rapport à y, c'est-à-dire les ramener à la forme

$$y = f(x).$$

Mais souvent cette marche est pénible, et il peut être plus simple de recourir à un théorème général qui dispense de résoudre l'équation par rapport à l'une des variables.

Admettons qu'on ait fait passer dans le premier membre tous les termes d'une équation, et qu'elle soit ainsi ramenée à la forme

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

qui exprime entre les variables x et y une relation telle que pour deux valeurs simultanées de x et y le premier membre donne une valeur nulle.

Si l'on fait croître x de Δx, y croîtra de Δy, et la relation (1) deviendra

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0. \tag{2}$$

Retranchant (1) de (2), on a

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = 0.$$

Retranchant et ajoutant la fonction

$$f(x + \Delta x, y),$$

dans laquelle y est considérée comme une quantité constante et x comme une quantité variable, il vient

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) + f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = 0.$$

Divisant tous les termes par Δx, on a

$$\frac{f(x + \Delta x, x + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)}{\Delta x} + \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = 0.$$

Multipliant et divisant le premier terme par Δy, on obtient la relation

$$\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)}{\Delta y}\,\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = 0, \tag{3}$$

qui subsiste quels que soient les accroissements simultanés Δx et Δy.

Pour passer à la limite, on remarque :

1° Que

$$\lim \frac{f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)}{\Delta y}=f'_y(x+\Delta x,\ y),$$

en représentant par $f'_y(x+\Delta x, y)$ la dérivée par rapport à y de la fonction $f(x+\Delta x, y)$, dans laquelle $x+\Delta x$ étant considérée comme une constante, y serait seule variable (1730);

2° Que

$$\lim \frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}=f'_x(x, y),$$

c'est-à-dire la dérivée par rapport à x de la fonction proposé $f(x, y)$, dans laquelle y étant considérée comme une constante, x serait seule variable.

A la limite la relation (3) devient donc

$$f'_y(x+\Delta x, y)\frac{dy}{dx}+f'_x(x, y)=0;$$

et comme il est inutile de tenir compte de Δx dans le premier terme de cette dernière relation, puisque Δx converge vers 0, ou autrement $f'_y(x+dx, y)=f'_y(x, y)$, on a donc en définitive

$$f'_y(x, y)\frac{dy}{dx}+f'_x(x, y)=0;$$

d'où l'on déduit pour la dérivée

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}. \qquad (4)$$

Ainsi *la dérivée d'une fonction implicite à deux variables est égale à moins la dérivée de la fonction proposée, prise par rapport à* x *en considérant* x *comme variable et* y *comme constante, divisée par la dérivée par rapport à* y *de la même fonction, en considérant* x *comme constante.*

1re *application.* Soit à déterminer la dérivée de la fonction implicite (1174)

$$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0. \qquad (5)$$

On en déduit (1732, 1735, 1736)

$$-f'_x(x, y)=-2b^2x \quad \text{et} \quad f'_y(x, y)=2a^2y;$$

donc

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2b^2x}{2a^2y}=\frac{-b^2x}{a^2y}.$$

Remarque. On arrive au même résultat en prenant les différentielles des divers termes de la relation (5). En effet, on a

$$2a^2y\,dy+2b^2x\,dx=0,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-b^2x}{a^2y}.$$

2° *application.* Soit la fonction (1240)

$$y^2 = 2px.$$

On écrira

$$f(x, y) = y^2 - 2px = 0;$$

d'où

$$-f'_x(x, y) = 2p, \quad f'_y(x, y) = 2y,$$

et, par suite,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2p}{2y} = \frac{p}{y}.$$

3° *application.* Soit l'équation d'une circonférence (1166)

$$(y-q)^2 + (x-p)^2 = r^2.$$

Ayant

$$f(x, y) = (y-q)^2 + (x-p)^2 - r^2 = 0,$$

on a

$$f'_x(x, y) = f'_x(x-p)^2 = f'_x(x^2 - 2px + p^2) = 2x - 2p = 2(x-p),$$
$$f'_y(x, y) = f'_y(y-q)^2 = 2(y-q),$$

et, par suite,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} = \frac{-2(x-p)}{2(y-q)} = \frac{-(x-p)}{y-q}.$$

TANGENTES AUX COURBES. DÉRIVÉES SUCCESSIVES. CONCAVITÉ ET CONVEXITÉ. SENS DE COURBURE. POINT D'INFLEXION.

1744. Nous avons vu au n° 1731 que la limite $\frac{dy}{dx}$ du rapport de l'accroissement d'une fonction y à celui de la variable x était égale au coefficient d'inclinaison de la tangente à la courbe représentative de la fonction. Il est facile de déduire de cette propriété le moyen de mener les tangentes aux courbes dont les équations sont données, et de déterminer les équations de ces tangentes.

y' et x' étant les coordonnées du point de contact de la tangente à une courbe quelconque, une droite qui passe par ce point ayant pour équation (1161)

$$y - y' = a(x - x'),$$

comme pour que cette droite soit tangente à la courbe, il suffit que le coefficient d'inclinaison a soit égal à la dérivée $\frac{dy}{dx}$, de l'équation représentative de la courbe, prise pour le point de contact, il en résulte

que l'équation générale de la tangente à une courbe quelconque est

$$y - y' = \frac{dy}{dx}(x - x'). \qquad (a)$$

Nous allons appliquer cette équation à quelques exemples.

1745. *Tangente à la circonférence.* L'équation de la circonférence rapportée à son centre étant (1166)

$$y^2 + x^2 = r^2,$$

on a, en appliquant la règle des fonctions implicites (1743),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}.$$

Pour le point de contact, qui est donné et dont les coordonnées sont y' et x', cette dérivée est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x'}{y'}.$$

Par suite, l'équation (a) du numéro précédent devient, pour la tangente à la circonférence,

$$y - y' = \frac{-x'}{y'}(x - x').$$

Chassant le dénominateur et effectuant les calculs, il vient

$$yy' - y'^2 = -xx' + x'^2,$$

ou

$$yy' + xx' = y'^2 + x'^2 = r^2.$$

Ainsi la somme

$$yy' + xx' = \text{constante } r^2.$$

1746. *Tangente à l'ellipse.* L'équation de l'ellipse rapportée à ses axes principaux étant (1174)

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

on a (1743)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-b^2x}{a^2y},$$

ou, pour le point de contact,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-b^2x'}{a^2y'};$$

donc l'équation de la tangente est (équation (a) du n° 1744)

$$y - y' = -\frac{b^2x'}{a^2y'}(x - x').$$

1747. *Tangente à l'hyperbole.* L'équation de l'hyperbole est (1215)

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2;$$

on a donc (1743)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y},$$

et, par suite, l'équation de la tangente est (1744, 1745)

$$y - y' = \frac{b^2x'}{a^2y'}(x - x').$$

1748. *Tangente à la parabole.* La parabole étant rapportée à son sommet et à des axes rectangulaires, son équation est (1240)

$$y^2 = 2px;$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}.$$

Par suite, l'équation de la tangente est (1744, 1745)

$$y - y' = \frac{p}{y'}(x - x').$$

Pour le sommet, on a $x' = 0$, $y' = 0$, et, par suite,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{0} = \infty.$$

Ce qui indique qu'au sommet la tangente est perpendiculaire à l'axe des x.

1749. *Tangente à la logarithmique.* L'équation de cette courbe étant

$$y = \log x,$$

on a (1733)

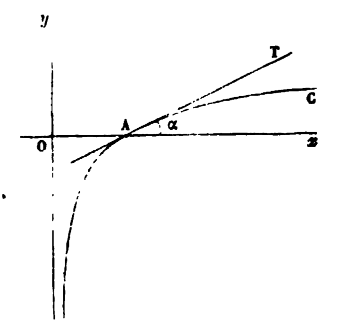
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{x} = \frac{0,4342945}{x}.$$

Par conséquent la tangente à la courbe au point dont les coordonnées sont y' et x' a pour équation (1744, 1745)

$$y - y' = \frac{0,4342945}{x'}(x - x').$$

Cas particuliers : 1° Pour $x' = 0$, on a

Fig. 557.



$$y' = \log x' = -\infty,$$

et

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{x'} = \infty.$$

Ce qui indique que l'axe des y est asymptote à la courbe du côté des y négatifs.

2° Pour $x' = 1$, on a

$$y' = \log x' = 0,$$

et

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{x'} = \log e.$$

Ainsi au point A, où la courbe rencontre l'axe des x, on a

$$\tang \alpha = 0{,}4342945.$$

3° Pour $x' = \infty$, on a,

$$y' = \log x' = \infty, \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{x'} = 0.$$

Ainsi la courbe va constamment en s'éloignant de l'axe des x, et à l'infini sa tangente est parallèle à cet axe.

1730. *Tangente à la sinusoïde.* L'équation de la sinusoïde est

$$y = \sin x,$$

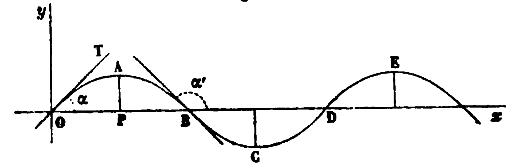
et l'on a (1734)

$$\frac{dy}{dx} = \cos x.$$

Par conséquent l'équation de la tangente au point de la courbe qui a y' et x' pour coordonnées est (1744, 1745)

$$y - y' = \cos x'(x - x').$$

Fig. 558.



Cas particuliers : 1° Pour $x' = 0$, on a (1094)

$$y' = \sin x' = 0, \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = \cos x' = \cos 0° = 1.$$

Ainsi la courbe passe à l'origine, et en ce point on a $\tang \alpha = 1$ et par conséquent $\alpha = 45°$. On obtient les mêmes valeurs pour le point D qui donne $x' = 2\pi$, ainsi que pour les valeurs successives 4π, 6π... de x'.

2° Pour $x' = \pi = 180°$, on a

$$y' = \sin x' = 0, \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = \cos x' = \cos \pi = -1.$$

Ainsi au point B, qui donne $x' = \pi$, on a $\tang \alpha' = -1$, et par conséquent $\alpha' = 135°$. On obtient les mêmes valeurs pour $x' = 3\pi$, $x' = 5\pi$...

3° Pour $x' = \frac{1}{2}\pi$, $x' = \frac{3}{2}\pi$, $x' = \frac{5}{2}\pi$..., on a $\cos x' = 0$ et $\tang \alpha = 0$; ce qui indique qu'aux points A, C, E... la tangente à la courbe est parallèle à l'axe des x.

1751, *Dérivées successives.* Nous avons vu (1731, 1744) que la relation

$$y = f(x)$$

est l'équation d'une courbe dont la tangente fait avec l'axe des x un angle dont la tangente trigonométrique est la dérivée de y par rapport à x. Cette dérivée, qu'on représente par les notations équivalentes $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$ ou y', est appelée *dérivée du premier ordre.*

La relation

$$y' = f'(x)$$

étant une nouvelle fonction de x, on peut chercher la dérivée de y' par rapport à x, de même qu'on a cherché la dérivée de y par rapport à x; et si l'on désigne par $f''(x)$ ou y'' le résultat de cette recherche, on a

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{df'(x)}{dx} = f''(x).$$

Cette nouvelle dérivée y'' prend le nom de *dérivée du second ordre*, et on la représente aussi par la notation

$$\frac{d^2y}{dx^2},$$

qu'on énonce d *deux* y *sur* dx *deux*, et dans laquelle le chiffre 2 de d^2y n'est qu'un indice indiquant l'ordre de la dérivée.

La relation

$$y'' = f''(x)$$

étant à son tour une nouvelle fonction de x, on peut chercher la dérivée de y'' par rapport à x, ce qui donne la dérivée du *troisième ordre*, que l'on représente par les notations équivalentes

$$y''' = f'''(x) = \frac{dy''}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3}.$$

Continuant ainsi de suite, on obtient les dérivées du quatrième ordre, du cinquième ordre, etc., et les diverses relations ci-dessus se résument dans le tableau suivant :

$y = f(x)$	fonction primitive,
$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$	dérivée du 1er ordre,
$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$	*id.* 2e *id.*
$y''' = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}$	*id.* 3e *id.*
$y^{\text{iv}} = f^{\text{iv}}(x) = \frac{d^4y}{dx^4}$	*id.* 4e *id.*
. . . .	

Exemple. De la fonction

$$y = x^m,$$

on déduit successivement (1732) :

$y' = mx^{m-1}$	dérivée du 1er	ordre.	
$y'' = m(m-1)x^{m-2}$	*id.*	2e	*id.*
$y''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$	*id.*	3e	*id.*
$y^{\text{IV}} = m(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4}$	*id.*	4e	*id.*

. . . .

1752. *Interprétation géométrique des dérivées successives.* Soit la fonction

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3. \qquad (1)$$

On en déduit (1751) les fonctions successives :

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{ou} \quad y' = B + 2Cx + 3Dx^2, \qquad (2)$$

$$\frac{dy'}{dx} \quad \text{ou} \quad y'' = 2C + 6Dx, \qquad (3)$$

$$\frac{dy''}{dx} \quad \text{ou} \quad y''' = 6D. \qquad (4)$$

Ce qui montre que la fonction proposée (1) étant du 3e *degré*, la dérivée du 3e *ordre* est égale à une *constante*. On verrait de même que pour une fonction du me *degré* et de la forme

$$y = x^m,$$

la dérivée du me *ordre* est une *constante*.

Cherchons à interpréter géométriquement les équations (1), (2), (3) et (4). Rapportons les équations (1), (2), (3), etc. aux systèmes respectifs d'axes rectangulaires Ox et Oy, O_1x_1 et O_1y, O_2x_2 et O_2y, etc., dans lesquels nous prenons, pour faciliter les lectures et comparaisons, les axes Ox, O_1x_1, O_2x_2, ... parallèles entre eux et les axes des y coïncidant avec une même droite. On construit ainsi par points les courbes C, C_1, C_2 et C_3 représentatives des fonctions y, y', y'' et y'''. Ainsi faisant $x = OP$, la relation (1) donne $y = MP$; la relation (2) donne le coefficient d'inclinaison $\frac{dy}{dx}$ de la tangente en M à la courbe C, ce qui permet de mener la tangente MT (1744), et comme ce coefficient angulaire n'est autre chose que l'ordonnée $M_1P_1 = y'$, de la courbe C_1, on obtient le point M_1 de la courbe C_1, point dont l'abscisse est aussi égale à x. La relation (3) donne de même $\frac{dy'}{dx}$ ou y'', c'est-à-dire la tangente

Fig. 559.

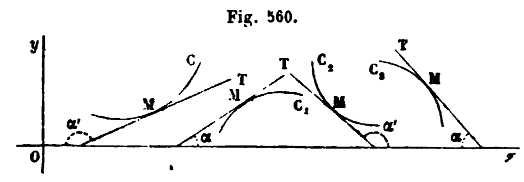
en M_1 à la courbe C_1 et le point M_2 de la courbe C_2, et ainsi de suite. Donnant à x différentes valeurs, on déterminera ainsi autant de points que l'on voudra des courbes C, C_1, C_2 ..., ce qui permettra de tracer ces courbes, auxquelles on mènera les tangentes à l'aide des dérivées successives $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy'}{dx}$.....

Dans l'exemple choisi (1), les courbes C et C_1 sont paraboliques, celle C_2 est une droite dont le coefficient d'inclinaison est $\frac{dy''}{dx} = 6D$, et celle C_3 est une droite parallèle à l'axe des x, puisque son coefficient d'inclinaison est $\frac{dy'''}{dx} = 0$, elle est la ligne représentative de la fonction constante $y''' = 6D$.

Des dérivées successives d'une fonction et de leur interprétation géométrique nous déduirons bientôt des conséquences importantes.

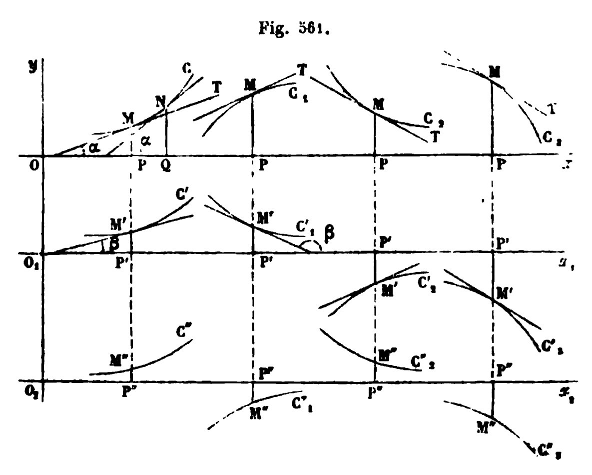
1753. *Concavité et convexité. Sens de courbure d'une courbe.* Une courbe est concave ou convexe en un de ses points **M** par rapport à une droite Ox, par exemple, selon que ses éléments voisins du point **M** sont situés dans l'angle aigu α ou dans l'angle obtus α', formé avec Ox par la tangente MT à la courbe au même point **M**. Ainsi les courbes C_1 et C_3 sont concaves en **M** par rapport à Ox, et au contraire celles C et C_2 sont convexes.

Fig. 560.



La concavité et la convexité constituent le sens de courbure d'une courbe. Cherchons le caractère distinctif du sens de courbure par rapport à l'axe des x.

Fig. 561.



Pour les courbes C et C_1, la fonction

$$y = f(x)$$

étant croissante (1729), leurs tangentes font des angles aigus avec l'axe des x et ont des coefficients d'inclinaison positifs. Par conséquent construisant les courbes représentatives C' et C'_1 des dérivéees du premier ordre

$$y' = \frac{dx}{dy} = f'(x),$$

les ordonnées seront positives pour l'une et l'autre de ces courbes, qui auront cependant entre elles une différence bien caractéristique, due au sens de courbure des courbes C et C_1 dont elles dérivent; ainsi les ordonnées de la courbe C' seront croissantes, de même que la fonction correspondante, tandis que les ordonnées de C'_1 seront décroissantes. On voit, en effet, que x croissant, la tangente à la courbe C fait des angles aigus de plus en plus grands avec l'axe des x, les coefficients d'inclinaison augmentent, et la fonction $\frac{dy}{dx} = f'(x) = y'$, dont la courbe représentative est C', est bien croissante. On voit de même que x croissant, la tangente à la courbe C_1 fait avec l'axe des x des angles aigus de plus en plus petits; par suite, les coefficients d'inclinaison vont en diminuant, et la fonction $\frac{dy}{dx} = f'(x) = y'$ représentée par la courbe C'_1 est bien décroissante.

Construisant maintenant les courbes C'' et C''_1 représentatives des fonctions dérivées du 2e ordre de la fonction primitive $y = f(x)$, courbes dont les équations sont de la forme

$$y'' = f''(x) = \frac{dy'}{dx},$$

c'est-à-dire dont les ordonnées y'' sont égales aux coefficients d'inclinaison des tangentes aux courbes C' et C'_1, on voit facilement que $f''(x)$ est positive et croissante dans le cas de la courbe C, et qu'elle est négative et décroissante dans le cas de la courbe C_1.

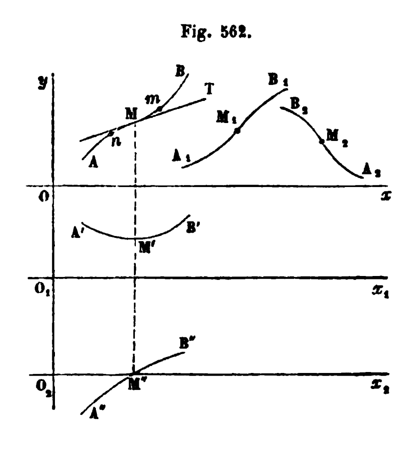
Ainsi à la courbe C, qui a sa convexité vers l'axe des x, répond la courbe C'' dont les ordonnées sont positives, et à la courbe C_1, qui a sa convexité vers l'axe des x, répond la courbe C''_1 dont les ordonnées sont négatives. Comme le montre la figure 561, cette propriété s'applique également aux courbes C_2 et C_3, et l'on peut dire, d'une manière générale, qu'une *courbe quelconque*, *dont l'équation est de la forme*

$$y = f(x),$$

tourne sa convexité ou sa concavité vers l'axe des x *suivant que* $y'' = f''(x)$ *est positif ou négatif.*

1754. *Point d'inflexion.* Lorsqu'une courbe AMB présente, à partir d'un de ses points M, une portion MA concave et une portion MB convexe par rapport à une droite Ox, on appelle *point d'inflexion* le point M à partir duquel la courbure change de sens. En menant au point d'inflexion M la tangente MT à la courbe, les deux éléments Mm, Mn de la courbe qui aboutissent en M sont situés de côtés différents de cette tangente.

Fig. 562.



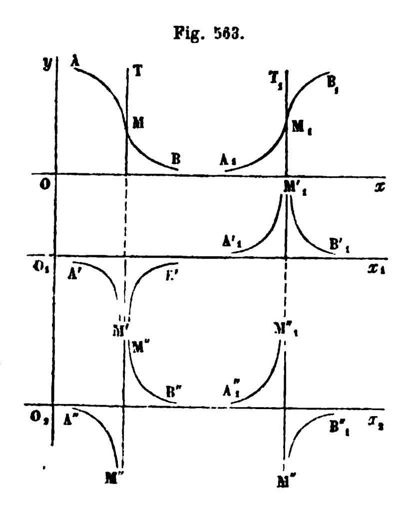
$$y = f(x), \quad y' = f'(x) = \frac{dy}{dx},$$
$$y'' = f''(x) = \frac{dy'}{dx}$$

étant respectivement les équations de la courbe proposée AMB et des courbes dérivées du 1er et du 2e ordre, s'il y a un point d'inflexion M, on obtient pour ce point

$$y'' = f''(x) = 0;$$

ce qui indique que le point M″ de la courbe dérivée du deuxième ordre est sur l'axe des x. C'est ce qui se conçoit *à priori*, car la portion AM étant concave vers Ox, la courbe dérivée correspondante A″M″ du deuxième ordre a ses ordonnées négatives (1753), et la portion MB étant convexe, la courbe dérivée correspondante M″B″ du deuxième ordre a ses ordonnées positives; d'où il résulte nécessairement que la courbe continue A″M″B″ coupe l'axe des x au point M″, ou autrement que pour la valeur de x qui répond au point d'inflexion M la fonction du second ordre donne $y'' = 0$. On arriverait aux mêmes conclusions si la courbe proposée présentait l'aspect $A_1M_1B_1$ ou celui $A_2M_2B_2$.

Fig. 563.



Cas particulier. Soient deux courbes AMB, $A_1M_1B_1$ dont les points d'inflexion M, M_1 répondent à des tangentes MT, M_1T_1 parallèles à l'axe des y. Construisant les courbes dérivées du premier et du deuxième ordre, on reconnaît facilement qu'aux points d'inflexion M et M_1 correspondent les points M″ et M''_1 situés à l'infini, ou autrement que pour les points M et M_1 les dérivées du second ordre ont

pour valeurs

$$y'' = f''(x) = \pm\infty.$$

Ainsi, en résumant, aux points d'inflexion d'une courbe dont l'équation est

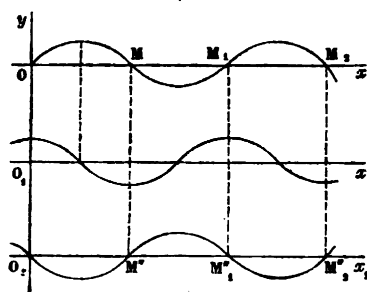
$$y = f(x),$$

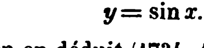
répond

$$y'' = f''(x) = 0, \quad \text{ou} \quad y'' = f''(x) = \pm\infty.$$

Exemple. Soit la sinusoïde dont l'équation est

Fig. 564.





$$y = \sin x.$$

On en déduit (1734, 1739) :

$$y' = f'(x) = \cos x,$$
$$y'' = f''(x) = -\sin x.$$

La valeur

$$y'' = f''(x) = 0$$

répondant à $x = 0$, π, 2π, 3π, ... $n\pi$, comme pour ces valeurs de x on a $y = 0$, il en résulte que tous les points d'inflexion O, M, M_1, M_2... sont situés sur l'axe des x, et que de plus les ordonnées sont aussi nulles pour les points correspondants O_2, M'', M''_1, M''_2... de la courbe représentative de la fonction $y'' = f''(x)$.

Remarque. Il peut cependant arriver qu'une courbe dont l'équation est

$$y = f(x)$$

donne

$$y'' = f''(x) = \pm\infty,$$

sans pour cela que la courbe présente un point d'inflexion. Soit en effet une circonférence dont l'équation est (1166)

Fig. 565.

$$(y-q)^2 + (x-p)^2 - r^2 = 0 \quad \text{ou} \quad f(x, y) = 0.$$

On a (1743, 3ᵉ application)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p-x}{y-q},$$

et, par suite (1738, 751),

$$y'' \quad \text{ou} \quad f''(x) = \frac{-(y-q)-(p-x)}{(y-q)^2}.$$

Ce qui indique que pour $x = \text{OP} = p - r$ et $y = q$, c'est-à-dire pour le point M, on a

$$y'' = \frac{-r}{0} = -\infty,$$

et que pour $x = p + r$ et $y = q$, c'est-à-dire pour le point M', on a

$$y'' = \frac{r}{0} = +\infty.$$

Ainsi M répond à $-\infty$ et M' à $+\infty$, et cependant il n'y a pas d'inflexion en ces points; mais il y a un changement de sens de courbure par rapport à l'axe des x.

SÉRIE DE TAYLOR.

1733. *Théorème préliminaire.* Si dans une fonction

$$y = f(x), \tag{1}$$

on remplace x par $x + h$, d'où il résulte que y prend la valeur y' et que la relation (1) devient

$$y' = f(x + h), \tag{2}$$

la dérivée du premier ordre $\frac{dy'}{dx}$, de y' par rapport à x, calculée en considérant x comme variable et h comme constante, est égale à la dérivée du premier ordre $\frac{dy'}{dh}$, de y' par rapport à h, calculée en considérant h comme variable et x comme constante. Ainsi l'on a

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dh}.$$

En effet, posant $x + h = x'$, la relation (2) devient

$$y' = f(x');$$

d'où

$$\frac{dy'}{dx'} = f'(x'),$$

ou

$$\frac{dy'}{d(x+h)} = f'(x + h). \tag{3}$$

Supposant h constante et x variable, on a

$$d(x + h) = dx,$$

et l'expression (3) peut s'écrire

$$\frac{dy'}{dx} = f'(x + h). \tag{4}$$

Supposant, au contraire, x constante et h variable, on a

$$d(x + h) = dh,$$

et la relation (3) peut s'écrire

$$\frac{dy'}{dh} = f'(x+h). \tag{5}$$

Les équations (4) et (5) ayant le même second membre, les premiers membres donnent bien

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dh}.$$

1756. *Série de Taylor.* Supposons que le développement de la fonction

$$y' = f(x+h), \tag{1}$$

par rapport aux puissances successives de h, ait donné

$$y' = y + Ah + Bh^2 + Ch^3 + Dh^4 + \text{etc.} \tag{2}$$

On admet ainsi que le polynome qui exprime la valeur de y' contient un nombre infini de termes, dans lesquels l'exposant de h va en croissant indéfiniment depuis le premier terme où il est zéro.

Quant aux coefficients A, B, C, D...., ce sont des fonctions inconnues de la variable x, qu'il s'agit de déterminer.

Prenant la dérivée de y' par rapport à h dans la relation (2), on a (1732)

$$\frac{dy'}{dh} = A + 2Bh + 3Ch^2 + 4Dh^3 + \ldots.. \tag{3}$$

Dans la même relation (2), la dérivée de y' par rapport à x est, en considérant h comme une constante,

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{dA}{dx}h + \frac{dB}{dx}h^2 + \frac{dC}{dx}h^3 + \ldots.. \tag{4}$$

Les premiers membres des relations (3) et (4) étant égaux (1755) les seconds donnent

$$A + 2Bh + 3Ch^2 + 4Dh^3 + \ldots = \frac{dy}{dx} + \frac{dA}{dx}h + \frac{dB}{dx}h^2 + \frac{dC}{dx}h^3 + \ldots \tag{5}$$

Égalant deux à deux les termes de même ordre dans cette dernière relation, on a une suite d'égalités, desquelles on déduit :

$$A = \frac{dy}{dx}, \quad B = \frac{dA}{2dx}, \quad C = \frac{dB}{3dx}, \quad D = \frac{dC}{4dx} \ldots..$$

Remplaçant A par sa valeur dans l'expression de B, puis B par sa nouvelle valeur dans C, puis C dans D, et ainsi de suite, il vient :

$$A = \frac{dy}{dx},$$

$$B = \frac{d\frac{dy}{dx}}{2dx} = \frac{d^2y}{dx^2}\frac{1}{1.2},$$

$$C = \frac{d\frac{d^2y}{dx^2}}{3dx}\frac{1}{1.2} = \frac{d^3y}{dx^3}\frac{1}{1.2.3},$$

$$D = \frac{d\frac{d^3y}{dx^3}}{4dx}\frac{1}{1.2.3} = \frac{d^4y}{dx^4}\frac{1}{1.2.3.4}.$$

. . . .

Remplaçant A, B, C, D... par ces valeurs dans le développement (2), on a

$$y' = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \frac{d^4y}{dx^4}\frac{h^4}{1.2.3.4}\cdots$$

Équation que l'on peut écrire sous la forme

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{1.2} + f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3} + f^{\text{iv}}(x)\frac{h^4}{1.2.3.4} + \dots \quad (6)$$

Telle est la formule de Taylor, qui donne le développement d'une fonction à l'aide de ses dérivées successives.

1757. *Formule de Maclaurin, ou cas particulier de la formule de Taylor.*

Si dans la fonction

$$y' = f(x+h)$$

et dans son développement (1756)

$$y' = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{1.2} + f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3} + \dots \quad (1)$$

on remplace x par 0 et h par x, la fonction devient

$$y = f(x),$$

et son développement prend la forme

$$y = f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{1.2} + f'''(0)\frac{x^3}{1.2.3} + \dots \quad (2)$$

qui est connue sous le nom de formule de Maclaurin, et dans laquelle $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$... sont les valeurs de la fonction y et de ses dérivées successives lorsqu'on y fait $x = 0$.

1758. *Applications des formules de Taylor et de Maclaurin* (1756, 1757).

1° Soit à développer

$$y' = (x+a)^m.$$

De cette relation on déduit successivement (1732, 1756) :

$$\begin{aligned}
f(x) &= y = x^m,\\
f'(x) &= mx^{m-1},\\
f''(x) &= m(m-1)x^{m-2},\\
f'''(x) &= m(m-1)(m-2)x^{m-3},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Substituant ces valeurs de $f(x), f'(x), f''(x)$... dans la formule (6) du n° 1756, de Taylor, cette formule donne, en remarquant que h est remplacé par a,

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3} + \ldots$$

Ce qui n'est autre chose que la formule du binome de Newton (518).

2° *Développement de* sin x *en fonction de l'*arc x. De la fonction

$$y = \sin x$$

on déduit successivement (1734, 1739) :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x, & f^{\text{IV}}(x) &= \sin x,\\
f'(x) &= \cos x, & f^{\text{V}}(x) &= \cos x,\\
f''(x) &= -\sin x, & f^{\text{VI}}(x) &= -\sin x,\\
f'''(x) &= -\cos x, & f^{\text{VII}}(x) &= -\cos x,\\
& & &\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Faisant l'arc $x = 0°$ dans ces expressions on aura, d'après les notations de la formule de Maclaurin (1757) :

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) = \sin x = \sin 0° = 0,\\
f'(x) &= f'(0) = \cos x = \cos 0° = 1,\\
f''(x) &= f''(0) = -\sin x = -\sin 0° = -0,\\
f'''(x) &= f'''(0) = -\cos x = -\cos 0° = -1,\\
f^{\text{IV}}(x) &= f^{\text{IV}}(0) = \sin x = \sin 0° = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Substituant ces valeurs de $f(x), f'(x), f''(x)$... dans la formule (2) du n° 1757, de Maclaurin, on a, en observant que les termes de rangs impairs se réduisent à zéro,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}\ldots$$

3° *Développement de* cos x *en fonction de l'arc* x. En raisonnant comme au 2°, la fonction

$$y = \cos x$$

donne successivement :

$$f(x) = \cos x, \quad f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x, \quad f'''(x) = \sin x,$$

$$f^{\text{IV}}(x) = \cos x, \quad f^{\text{V}}(x) = -\sin x, \quad f^{\text{VI}}(x) = -\cos x, \quad f^{\text{VII}}(x) = \sin x, \quad \ldots$$

Faisant l'arc $x = 0°$, ces expressions deviennent, en adoptant les notations de la formule de Maclaurin (1757) :

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) = \cos x = \cos 0° = 1,\\
f'(x) &= f'(0) = -\sin x = -\sin 0° = -0,\\
f''(x) &= f''(0) = -\cos x = -\cos 0° = -1,\\
f'''(x) &= f'''(0) = \sin x = \sin 0° = 0,\\
f^{\text{IV}}(x) &= f^{\text{IV}}(0) = \cos x = \cos 0° = 1.\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Substituant ces valeurs de $f(x), f'(x), f''(x)\ldots$ dans la formule de Maclaurin (1757), on a, en observant que les termes de rangs pairs se réduisent à zéro,

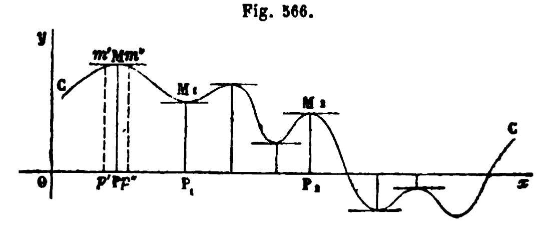
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{x^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} \cdots$$

MAXIMA ET MINIMA (536)

1759. *Des maximums et des minimums des fonctions.* Soit C la courbe représentative de la fonction

$$y = f(x).$$

Fig. 566.



Si pour une valeur $OP = x$ de l'abscisse, l'ordonnée correspondante $MP = y$ est plus grande que les ordonnées voisines $m'p'$ et $m''p''$ correspondant aux abscisses Op' et Op'', dont l'une est immédiatement inférieure et l'autre immédiatement supérieure à OP, on dit que la fonction ou ordonnée $y = MP$ est un maximum. De même, l'ordonnée M_1P_1 étant plus petite que celles infiniment voisines, on dit que cette ordonnée ou la fonction y qu'elle représente est un minimum. Ainsi, d'une manière générale, une fonction présente un maximum ou un minimum, selon qu'une valeur particulière de la fonction est plus grande ou plus petite que l'*état de* grandeur qui précède et que l'état de grandeur qui suit immédiatement celui que l'on considère.

Comme le montre la figure 566, une fonction peut présenter plu-

sieurs maximums et plusieurs minimums; qu'un minimum M_1P_1 peut être plus grand qu'un maximum M_2P_2; enfin qu'un maximum ou un minimum peut être positif ou négatif.

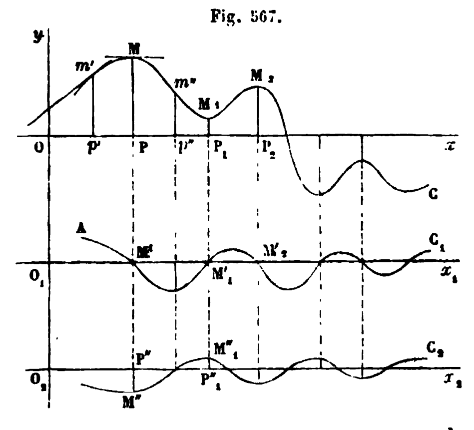
Afin de rendre plus sensibles les particularités d'une fonction lorsqu'elle passe par une valeur maxima ou par une valeur minima, construisons les courbes C, C_1 et C_2, représentatives de la fonction proposée

$$y = f(x),$$

et de ses dérivées du premier et du second ordre (1754)

$$y' = f'(x), \quad y'' = f''(x).$$

Fig. 567.



On voit d'abord que la fonction

$$y = f(x)$$

est croissante, c'est-à-dire que l'abscisse Op' augmentant, l'ordonnée $m'p'$ augmente aussi, et que cela a lieu jusqu'au point M, où la fonction prend une valeur maxima $y =$ MP. Jusqu'à ce même point, la tangente d'inclinaison

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

reste positive, mais elle va constamment en diminuant, pour devenir nulle au point M. La tangente en M à la courbe C est en effet parallèle à l'axe des x.

A partir de M, la fonction y devient décroissante, c'est-à-dire que l'abscisse Op'', par exemple, augmentant, l'ordonnée $m''p''$ diminue; cela a lieu jusqu'au point M_1, où la fonction présente un minimum. De M en M_1, la tangente d'inclinaison est négative; elle va d'abord en augmentant depuis M jusqu'au point d'inflexion situé entre M et M_1, et à partir de ce point d'inflexion elle va en diminuant jusqu'au point M_1, où elle redevient nulle, puisque la tangente en M_1 à la courbe C est parallèle à l'axe des x.

De même, entre M_1 et M_2, la fonction est croissante, et la tangente d'inclinaison, nulle en M_1, devient positive, et elle va d'abord en augmentant, pour diminuer ensuite et redevenir nulle au point M_2, où la fonction présente un autre maximum.

Ainsi tout maximum et tout minimum de la fonction

$$y = f(x)$$

répond à une dérivée du premier ordre nulle, on a

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = 0;$$

c'est-à-dire que les points M', M'_1, M'_2... de la courbe C_1, qui correspondent aux points M, M_1, M_2 sont situés sur l'axe O_1x_1.

Pour distinguer un maximum d'un minimum, on a recours à la courbe C_2 ou à la dérivée du second ordre qu'elle représente, et l'on voit qu'à un maximum MP répond une ordonnée de la courbe C_2 ou une dérivée du second ordre négative, tandis qu'à un minimum M_1P_1 répond une ordonnée de la courbe C_2 ou une dérivée du second ordre positive.

On peut d'ailleurs démontrer qu'il en est nécessairement toujours ainsi. En effet, lorsque la fonction

$$y = f(x)$$

est croissante, la tangente d'inclinaison en m', par exemple, à la courbe C est positive, et au sommet M, répondant au maximum, cette tangente d'inclinaison devient zéro. Or, comme une quantité positive qui tend vers zéro est nécessairement décroissante, ce qu'indique la portion AM' de la courbe C_1, il en résulte que

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

est une fonction décroissante. Cela établi, comme nous venons de voir (*fig.* 567) que lorsqu'une fonction est décroissante, la dérivée de cette fonction ou la tangente d'inclinaison correspondante est négative, il en résulte donc bien que la dérivée $M''P''$ du second ordre de la fonction proposée est négative lorsque cette fonction primitive atteint son maximum. On établirait de la même manière qu'à un minimum M_1P_1 d'une fonction répond nécessairement une dérivée $M''_1P''_1$ du second ordre positive.

Comme c'est le signe seul de la dérivée du second ordre qui distingue le maximum du minimum d'une fonction proposée, s'il arrivait que cette dérivée fût nulle, elle serait alors privée de signe, et n'indiquerait plus s'il y a maximum ou minimum. Dans ce cas, il est nécessaire de recourir aux dérivées suivantes du 3e et du 4e ordre, ainsi qu'il va être indiqué.

Nous avons vu (1756) qu'une fonction

$$y = f(x + h)$$

peut s'écrire sous la forme

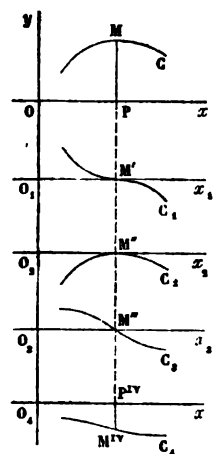
$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{1.2} + f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3} + f^{\text{IV}}(x)\frac{h^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

L'accroissement de la fonction peut donc s'écrire

$$f(x+h)-f(x)=f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{1.2}+f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3}+f^{\text{IV}}(x)\frac{h^4}{1.2.3.4}+\dots$$

Si, pour une certaine valeur de x, les fonctions $f'(x)$ et $f''(x)$ sont nulles en même temps (*fig.* 568), cette dernière relation se réduit à

Fig. 568.



$$f(x+h)-f(x)=f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3}+f^{\text{IV}}(x)\frac{h^4}{1.2.3.4}+\dots$$

et comme, lorsque l'accroissement h de la variable x est très-petit, les termes du second membre qui suivent le premier sont négligeables par rapport à celui-ci, on a alors approximativement

$$f(x+h)-f(x)=f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3}, \qquad (1)$$

et si l'accroissement $f(x+h)-f(x)$ de la fonction est nul, ce qui répond au maximum ou au minimum, on a

$$f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3}=0;$$

ce qui exige que

$$f'''(x)=0,$$

puisque l'accroissement h de l'abscisse, quoique très-petit, n'est pas nul.

Ainsi l'on voit déjà que le maximum ou le minimum de la fonction répond à

$$f'''(x)=0.$$

Il reste à déterminer dans quel cas il y aura maximum, et dans quel cas il y aura minimum.

Remarquant qu'avant un maximum l'accroissement $f(x+h)-f(x)$ est positif et qu'avant un minimum il est négatif, d'après la relation (1) $f'''(x)$ étant de même signe que cet accroissement puisque h et par suite h^3 est toujours positif, comme une fonction positive $f'''(x)$ qui tend vers 0 est décroissante, et que la dérivée d'une fonction décroissante est négative, il en résulte donc que $f^{\text{IV}}(x)$ est négative lorsqu'il y a maximum; c'est ce que montre la *fig.* 568.

Par la même raison, si l'accroissement $f(x+h)-f(x)$ est négatif, $f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3}$ sera négative, et par suite, aussi $f'''(x)$; or une fonction négative qui tend vers 0 étant nécessairement croissante, comme une fonction croissante a une dérivée positive, $f^{\text{IV}}(x)$ est donc positive dans le cas du minimum.

En résumé, *il y a maximum ou minimum lorsque la dérivée du troisième ordre* $f'''(x)$ *est nulle, et c'est un maximum ou un minimum, selon que de plus la dérivée du quatrième ordre* $f^{\text{iv}}(x)$ *est négative ou positive.*

En général, *quand plusieurs dérivées successives s'annulent en même temps, il n'y a ni maximum ni minimum si la première dérivée suivante qui ne s'annule pas est d'ordre impair; mais si elle est d'ordre pair, il y a maximum ou minimum selon qu'elle est négative ou positive.*

1760. Ainsi l'on peut poser cette *règle générale* : Une fonction y d'une seule variable x étant donnée sous la forme

$$y = f(x), \tag{1}$$

pour trouver le maximum ou le minimum de cette fonction, on prend la dérivée première de y par rapport à x, et l'on égale cette dérivée à zéro, ce qui donne une relation de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0. \tag{2}$$

Cette équation résolue par rapport à x donne la valeur de x correspondant au maximum ou au minimum. On cherche la dérivée du second ordre

$$y'' = f''(x), \tag{3}$$

et suivant que cette dérivée est négative ou positive, il y a maximum ou minimum. La valeur de x déduite de l'équation (2) est substituée dans l'équation (1), qui donne la valeur de y *maxima* ou *minima*.

Si la dérivée du second ordre y'' est nulle, on détermine les dérivées du 3e et du 4e ordre

$$y''' = f'''(x), \quad (4) \qquad y^{\text{iv}} = f^{\text{iv}}(x); \quad (5)$$

on égale $f'''(x)$ à 0, et l'on en déduit la valeur de x, laquelle substituée dans l'équation (1) donne une valeur de y qui est un maximum ou un minimum, selon que la dérivée y^{iv} est négative ou positive.

On opère de même quand il est nécessaire de recourir aux dérivées du 5e et du 6e ordre, et ainsi de suite.

1761. *Applications de la règle précédente.*

1er EXEMPLE. *Le produit* y *de deux facteurs variables* x *et* z, *dont la somme* c *est constante, est maximum quand ses deux facteurs sont égaux* (537).

D'après l'énoncé, on a :

$$x + z = c, \quad (a) \qquad y = xz. \quad (b)$$

De (a) on tire

$$z = c - x.$$

Remplaçant z par cette valeur dans (b), il vient

$$y = cx - x^2; \tag{1}$$

c'est la relation (1) du numéro précédent. Prenant la dérivée du premier ordre et l'égalant à 0, on a (1732, 1736)

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = c - 2x = 0; \qquad (2)$$

d'où l'on tire pour la valeur de x correspondant au maximum ou au minimum,

$$x = \frac{c}{2}.$$

Prenant la dérivée du second ordre, on a (1735)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = -2,$$

et cette dérivée étant négative, $x = \frac{c}{2}$ répond à un maximum et non à un minimum. Remplaçant x par cette valeur dans (a), on en conclut aussi

$$z = \frac{c}{2}.$$

Ainsi il y a maximum lorsque les deux facteurs sont égaux, c'est-à-dire quand on a

$$x = z = \frac{c}{2}.$$

2[e] Exemple. *Déterminer parmi tous les cylindres de même volume V celui dont la surface totale s est un minimum.*

r étant le rayon de la base et h la hauteur du cylindre, on a

$$s = 2\pi r^2 + 2\pi r h, \qquad (a)$$

et

$$V = \pi r^2 h, \quad \text{d'où} \quad h = \frac{V}{\pi r^2}. \qquad (b)$$

Remplaçant h par cette valeur dans la relation (a), cette relation ne contiendra plus que les deux variables s et r, en même temps qu'elle satisfera à la condition que le volume V du cylindre soit constant, et elle deviendra

$$s = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} = 2\pi r^2 + 2Vr^{-1}. \qquad (1)$$

C'est la relation (1) du numéro précédent, dans laquelle y est représentée par s et x par r. Prenant la dérivée du premier ordre et l'égalant à 0, on a

$$\frac{ds}{dr} = f'(r) = 4\pi r - 2Vr^{-2} = 0; \qquad (2)$$

d'où l'on tire pour la valeur de r qui correspond au maximum ou au

minimum, comme

$$4\pi r = \frac{2V}{r^2}, \quad r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}. \qquad (3)$$

Prenant la dérivée du second ordre, on a

$$\frac{d^2 s}{dr^2} = f''(r) = 4\pi + 4Vr^{-3} = 4\pi + \frac{4V}{r^3},$$

et cette dérivée étant positive, $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ répond à un minimum et non à un maximum. Remplaçant r par cette valeur dans (1), on obtiendrait la valeur minima de s en fonction de V; mais ce qu'il importe le plus d'avoir, c'est l'autre dimension h du cylindre. Or remplaçant V par sa valeur (b) dans (3), on a

$$r = \sqrt[3]{\frac{\pi r^2 h}{2\pi}} \quad \text{ou} \quad r^3 = \frac{r^2 h}{2}, \quad \text{d'où} \quad h = 2r = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Ainsi s est minimum lorsque la hauteur du cylindre est le double du rayon, et de plus on a

$$V = 2\pi r^3 = \frac{\pi h^3}{4}.$$

3ᵉ Exemple. *Température moyenne de l'air dans une cheminée correspondant au maximum de tirage* (*Aide-Mémoire*, deuxième partie). On a

$$Q_1 = 1^k{,}3 D^2 \sqrt{\frac{Ha}{M} \times \frac{t'-t}{(1+at')^2}}.$$

Q_1 poids d'air écoulé par la cheminée dans une seconde;
$1^k{,}3$ poids d'un mètre cube d'air à 0° et sous la pression atmosphérique $0^m{,}76$;
D côté de la section minimum intérieure de la cheminée, supposée carrée;
H hauteur de la cheminée en mètres;
$a = 0{,}00367$ coefficient de dilatation de l'air;
M nombre constant pour une même nature de cheminée;
t' température moyenne de l'air dans la cheminée;
t température de l'air extérieur.

$$1^k{,}3\, D^2 \sqrt{\frac{Ha}{M}}$$

étant une quantité constante pour une même cheminée, Q_1 sera maximum lorsque $1^k{,}3\, D^2 \sqrt{\frac{t'-t}{(1+at')^2}}$ ou même $\sqrt{\frac{t'-t}{(1+at')^2}}$ sera maximum. Représentant ce radical par y et la variable t' par x, on a pour l'équivalente de la relation (1) du numéro précédent

$$y^2 = \frac{x-t}{(1+ax)^2}, \qquad (1)$$

ou

$$y^2 + 2axy^2 + a^2x^2y^2 - x + t = 0;$$

d'où, en prenant la dérivée (1743) et en l'égalant à 0,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2ay^2 - 2a^2y^2x + 1}{2y + 4axy + 2a^2x^2y} = 0.$$

Cette relation ne pouvant exister qu'autant que le numérateur est nul, on a donc, lorsqu'il y a maximum,

$$-2ay^2 - 2a^2y^2x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad -2ay^2(1 + ax) + 1 = 0,$$

et en remplaçant y^2 par sa valeur (1)

$$-2a\frac{x-t}{(1+ax)^2}(1 + ax) + 1 = 0;$$

d'où l'on déduit successivement :

$$2a\frac{x-t}{1+ax} = 1,$$

$$2ax - 2at = 1 + ax,$$

$$ax = 1 + 2at,$$

$$x = \frac{1}{a} + 2t.$$

Si l'on suppose la température extérieure $t = 0$, on a

$$x \text{ ou } t' = \frac{1}{a} = \frac{1}{0,00367} = 272°,47.$$

1762. *Cas particuliers des maximums et des minimums.*

1° Lorsqu'une fonction présente une valeur infinie ou nulle, on ne considère pas cette valeur comme un maximum ou comme un minimum proprement dit. Ainsi la parabole dont l'équation est (1240)

$$y^2 = 2px,$$

donnant $y = 0$ pour $x = 0$ et $y = \pm\infty$ pour $x = \infty$, la fonction y passe par tous les états de grandeur compris entre $+\infty$ et $-\infty$, et elle ne présente ni maximum ni minimum proprement dit.

La dérivée de la fonction précédente étant

$$\frac{dy}{dx} \text{ ou } f'(x) = \frac{p}{y},$$

si l'on égale cette dérivée à 0, ce qui donne

$$f'(x) = \frac{p}{y} = 0,$$

on en déduit $y = \pm\infty$, valeurs qui répondent à $x = \infty$. Ainsi les points

de la courbe en lesquels les tangentes sont parallèles à l'axe des x sont situés à l'infini.

Pour $x=0$, on a $y=0$, et, par suite,

$$f'(x)=\frac{p}{y}=\infty.$$

Ainsi l'axe des y est tangent à la courbe.

Soit encore la logarithmique dont l'équation est

$$y=\log x.$$

La dérivée est (1733)

$$\frac{dy}{dx} \text{ ou } f'(x)=\frac{\log e}{x}=\frac{0,4342945}{x},$$

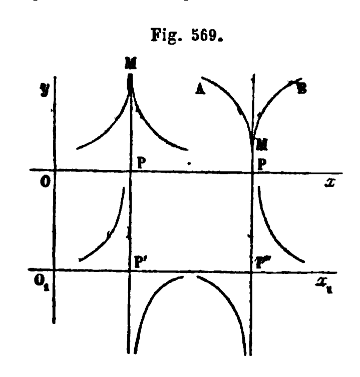
et si l'on égale cette dérivée à 0, on a

$$f'(x)=\frac{0,4342945}{x}=0;$$

d'où $x=\infty$, et, par suite, $y=\log x=\infty$; comme de plus pour $x=0$ on a $y=\log 0=-\infty$, la fonction y passe donc par tous les états de grandeur entre $+\infty$ et $-\infty$, et cependant elle ne présente ni maximum ni minimum proprement dit.

2° *Autre particularité des maximums et des minimums. Point de rebroussement.* Lorsqu'une courbe présente deux branches AM, MB (*fig.* 569) ayant une tangente commune parallèle à l'axe des y, le point M répond nécessairement à un maximum ou à un minimum. Pour ce point M, la tangente d'inclinaison a alors pour valeur

Fig. 569.

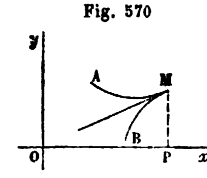


$$\frac{dy}{dx} \text{ ou } f'(x)=\pm\infty.$$

Le point M est appelé *point de rebroussement*.

Un point de rebroussement M (*fig.* 570) peut répondre à une tangente qui n'est pas parallèle à l'axe des y, c'est-à-dire à une valeur de $\frac{dy}{dx}$ qui ne soit pas nulle.

Fig. 570



3° Une courbe peut donner une valeur nulle pour la dérivée du premier ordre, et cependant ne présenter ni maximum ni minimum. C'est ce qui arrive lorsqu'une courbe (*fig* 571) présente un point d'inflexion M et qu'en ce point

la tangente à la courbe est parallèle à l'axe des x; car alors pour ce point on a

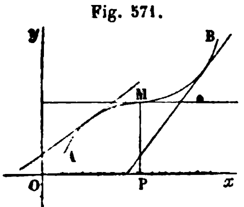


Fig. 571.

$$f'(x) = 0.$$

On sera averti de cette circonstance, puisqu'alors la courbe, à partir du point M, tournera sa convexité ou sa concavité vers l'axe des x selon que la fonction du second ordre $f''(x)$ sera positive ou négative (1753). Il est aussi à remarquer que dans le cas où M est un point d'inflexion, la dérivée du premier ordre ne change pas de signe, puisque la tangente à la courbe en deçà et au delà du point M est inclinée dans le même sens sur l'axe des x; seulement au point M le coefficient d'inclinaison est nul.

Exemple de courbes présentant un maximum, un minimum et un point d'inflexion. Soit

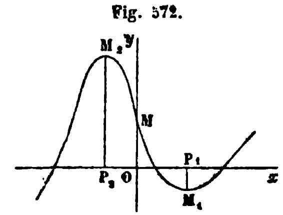


Fig. 572.

$$y = x^3 - 3x + 1 \qquad (1)$$

l'équation d'une courbe rapportée au système d'axes coordonnés Ox et Oy. En prenant la dérivée du premier ordre et celle du second ordre on obtient:

$$y' = 3x^2 - 3,$$
$$y'' = 6x.$$

Pour le point d'inflexion M, la dérivée du second ordre étant nulle (1754), posant

$$y'' = 6x = 0, \quad \text{d'où} \quad x = 0,$$

on voit que le point d'inflexion est situé sur l'axe des y. Pour en déterminer l'ordonnée, on fait $x = 0$ dans l'équation (1), qui donne $y = 1$.

Pour obtenir les coordonnées des points M_1 et M_2 répondant au minimum et au maximum, on égale à zéro la dérivée première, ce qui donne

$$3x^2 - 3 = 0,$$

d'où

$$x = \pm 1.$$

Par suite, l'équation (1) donne:

$$y = 1 - 3 + 1 = -1,$$
$$y = -1 + 3 + 1 = +3.$$

Ainsi les points M_1 et M_2 ont pour coordonnées:

$$M_1 \begin{cases} y = -1 \\ x = +1 \end{cases} \qquad M_2 \begin{cases} y = +3 \\ x = -1 \end{cases}$$

RAYONS DE COURBURE.

1763. Étant donnée l'équation d'une courbe MM'D sous la forme

$$y = f(x),$$

proposons-nous de trouver la valeur du rayon de courbure (1275).

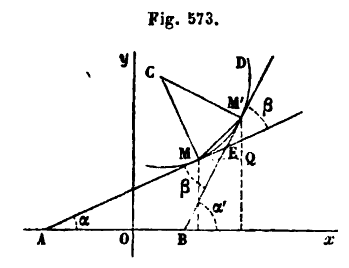


Fig. 573.

Soient M et M' deux points voisins sur la courbe, MA et M'B les tangentes à la courbe en ces points, et MC, M'C les normales aux mêmes points. L'arc MM' devenant de plus en plus petit, à la limite la corde MM' se confond avec la tangente à la courbe en M, et le triangle MCM', dont le sommet C est le centre de courbure en M, est rectangle en M et donne

$$\operatorname{tang} C = \frac{MM'}{MC}, \quad \text{d'où} \quad MC = \frac{MM'}{\operatorname{tang} C}.$$

L'angle C des deux normales et celui β des deux tangentes étant égaux entre eux comme ayant les côtés perpendiculaires, on a $\operatorname{tang} C = \operatorname{tang}\beta$, et, par suite,

$$MC = \frac{MM'}{\operatorname{tang}\beta}. \qquad (1)$$

L'angle α' étant extérieur au triangle AEB, on a $\beta = \alpha' - \alpha$, et (1112)

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\operatorname{tang}\alpha' - \operatorname{tang}\alpha}{1 + \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha'} = \frac{i' - i}{1 + ii'}, \qquad (2)$$

en désignant, pour abréger, par i et i' les tangentes d'inclinaison $\operatorname{tang}\alpha$ et $\operatorname{tang}\alpha'$ aux points M et M'. Comme à la limite de rapprochement des points M et M', i' ne diffère de i que d'une différentielle di, on peut poser

$$i' = i + \mathrm{d}i,$$

et cette valeur de i' substituée dans l'équation (2) donne

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{i + \mathrm{d}i - i}{1 + i(i + \mathrm{d}i)} = \frac{\mathrm{d}i}{1 + i^2 + i\,\mathrm{d}i}. \qquad (3)$$

D'autre part, le triangle rectangle MM'Q donne

$$MM' = \sqrt{\overline{MQ}^2 + \overline{M'Q}^2} = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \mathrm{d}x\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}. \qquad (4)$$

Remplaçant $\operatorname{tang}\beta$ et MM' par leurs valeurs (3) et (4) dans (1), il

vient

$$MC = \frac{dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}(1+i^2+idi)}{di}.$$

Remarquant qu'au numérateur on peut négliger idi par rapport à $1+i^2$, on a, en divisant les deux termes par dx et en représentant par ρ le rayon de courbure MC,

$$\rho = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}(1+i^2)}{\frac{di}{dx}}.$$

Ayant

$$i = \tang\alpha = \frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \text{et} \quad \frac{di}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x),$$

la relation précédente peut s'écrire

$$\rho = \frac{\left(1+[f'(x)]^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+[f'(x)]^2\right)}{f''(x)} = \frac{\left(1+[f'(x)]^2\right)^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}. \qquad (5)$$

Si l'on adopte toujours le signe + pour le numérateur, ρ prendra le signe de $f''(x)$, et sera par conséquent positif ou négatif selon que la courbe aura sa concavité tournée vers le sens positif ou négatif des ordonnées y (1753).

Application à la parabole. L'équation de la courbe étant (1240)

$$y^2 = 2px,$$

on a successivement :

$$i = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{p}{y},$$

$$i^2 = [f'(x)]^2 = \frac{p^2}{y^2},$$

$$y\frac{dy}{dx} \quad \text{ou} \quad yi = p.$$

Cette dernière relation différentiée donne (1737)

$$y\frac{di}{dx} + i\frac{dy}{dx} = 0,$$

ou

$$y\frac{di}{dx} + i^2 = 0:$$

d'où

$$\frac{di}{dx} \quad \text{ou} \quad f''(x) = \frac{-i^2}{y} = \frac{-p^2}{y^3}.$$

Ces valeurs substituées dans la formule (5) du rayon de courbure

donnent

$$\rho = \frac{\left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{p^2}{y^3}} = \frac{-y^3 (y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2 (y^2)^{\frac{3}{2}}} = \mp \frac{(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2};$$

$\mp$ indique que ρ a un signe contraire à celui de y.

Pour $y = 0$, on a

$$\rho = \frac{(p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} = \frac{p^{\frac{6}{2}}}{p^2} = p.$$

Ainsi au sommet de la parabole le rayon de courbure est le double de la distance du foyer au sommet (1238).

Application à la circonférence. De l'équation de la circonférence (1166)

$$y^2 + x^2 = r^2,$$

on déduit successivement (1743) :

$$\begin{aligned}
i &= \frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{-x}{y},\\
i^2 &= \frac{x^2}{y^2},\\
-x &= yi,\\
-dx &= i\,dy + y\,di,\\
\frac{di}{dx} &= \frac{1}{y}\left(-1 - i\frac{dy}{dx}\right) = \frac{-(1+i^2)}{y},
\end{aligned}$$

ou

$$f''(x) = \frac{-\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)}{y} = \frac{-(y^2+x^2)}{y^3}.$$

Remplaçant $f'(x)$ et $f''(x)$ par leurs valeurs dans la formule générale (5), il vient

$$\rho = \frac{\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}} y^3}{-(y^2+x^2)} = \frac{(y^2+x^2)^{\frac{3}{2}} y^3}{-(y^2+x^2)(y^2)^{\frac{3}{2}}} = \mp (y^2+x^2)^{\frac{1}{2}} = \mp \sqrt{y^2+x^2} = \mp r.$$

Ainsi le rayon de courbure est une constante égale au rayon du cercle.

CALCUL INTÉGRAL.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1764. *Objet du calcul intégral. Intégration. Intégrale.* Le calcul intégral a pour objet, étant donnée la dérivée y' d'une fonction y sous la forme

$$y' = f'(x),$$

de trouver la fonction elle-même

$$y = f(x);$$

ou bien encore, étant donnée la loi des accroissements simultanés de la fonction y et de la variable x sous la forme

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x,$$

de trouver la relation qui lie la fonction y à la variable x, c'est-à-dire de trouver

$$y = f(x).$$

Comme on le voit, l'objet du calcul intégral est l'inverse de celui du calcul différentiel.

Le calcul intégral résout dans toute sa généralité la question : étant donnée l'équation d'une tangente à une courbe sous la forme

$$y' = f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

trouver l'équation de la courbe sous la forme

$$y = f(x).$$

Ainsi les fonctions simples ou fondamentales (1732, 1733, 1734, 1739)

$$y = x^m, \qquad y = \log x, \qquad y = \sin x, \qquad y = \cos x,$$

ayant respectivement pour dérivées et pour différentielles :

$$y' = mx^{m-1}, \qquad y' = \frac{\log e}{x}, \qquad y' = \cos x, \qquad y' = -\sin x;$$

$$\mathrm{d}y = mx^{m-1}\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}y = \frac{\log e}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}y = \cos x\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}y = -\sin x\mathrm{d}x,$$

si l'on donnait une de ces dérivées ou une de ces différentielles, le tableau qui vient d'être formé fournirait immédiatement la relation fondamentale dont elle dérive.

Cependant, comme une même dérivée, par exemple celle

$$y' = mx^{m-1},$$

ou une même différentielle

$$dy = mx^{m-1}dx,$$

répond non-seulement à la fonction

$$y = f(x) = x^m,$$

mais aussi à la fonction

$$y = f(x) + C, \qquad (1)$$

C étant une constante tout à fait quelconque; ce qui résulte de ce que deux fonctions

$$y = f(x) \quad \text{et} \quad y = f(x) + C,$$

qui ne diffèrent que par une constante C, donnent la même dérivée ou la même différentielle (1735)

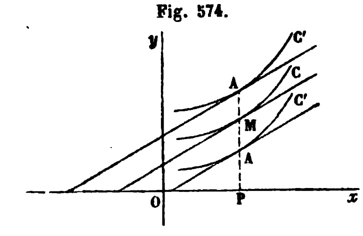
$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x), \quad dy = f'(x)dx;$$

il s'ensuit que si l'on donne la dérivée ou la différentielle, on doit en conclure que la fonction primitive est de la forme

$$y = f(x) + C.$$

Cela signifie que si la courbe C (*fig.* 574), dont l'équation est

Fig. 574.



$$y = f(x),$$

satisfait à la question, il en sera de même de toute autre courbe C′, dont l'ordonnée d'un point quelconque A donne

$$AP = MP \pm MA.$$

La longueur MA est ici la constante arbitraire C de la relation (1).

Il est à remarquer qu'en A, M et A les trois courbes ont le même coefficient d'inclinaison, puisqu'il est pour chacune $f'(x)$; autrement les tangentes aux courbes en ces points sont parallèles entre elles.

Dans les applications, la constante C cesse d'être arbitraire dès qu'on connaît un point de la courbe C, ou, ce qui est la même chose, dès qu'on connaît un système de valeurs de y et x pouvant vérifier l'équation (1); car en remplaçant dans cette équation y et x par leurs valeurs, on peut la résoudre par rapport à C.

L'opération par laquelle on passe de l'équation différentielle

$$dy = f'(x)dx$$

à la fonction

$$y = f(x) + C$$

se nomme *intégration*, et cette fonction résultat est l'*intégrale* de la différentielle dy.

1768. *Interprétation géométrique d'une quantité intégrale. Notation d'une intégrale. Limites d'une intégrale. Intégrale définie. Intégrale indéfinie.*

Soit donnée la fonction dérivée du premier ordre

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

d'où

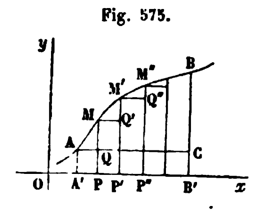
$$dy = f'(x)dx,$$

et proposons-nous de retrouver sa fonction primitive

$$y = f(x) + C.$$

Supposons le problème résolu, et soit AMM'B la courbe représentative de cette fonction primitive.

Fig. 575.



Considérant deux points infiniment voisins M et M' de cette courbe, à la limite, l'accroissement M'Q' de l'ordonnée MP est la différentielle dy de cette ordonnée $MP = y$, et l'accroissement PP' de l'abscisse OP est la différentielle dx de cette abscisse $OP = x$; et l'on voit que pour passer de l'ordonnée d'un point A à l'ordonnée d'un autre point B de la courbe, il faut ajouter à l'ordonnée du point A la somme d'un certain nombre d'accroissements tels que M'Q', M''Q''..., qui peuvent être inégaux entre eux, mais que l'on suppose très-petits.

Comme à la limite l'arc MM' se confond avec sa corde ou même avec la tangente à la courbe en M, la figure MM'Q' est un triangle rectiligne rectangle, qui donne

$$M'Q' = MQ' \operatorname{tang}(M'MQ'),$$

ou

$$dy = dx\,\frac{dy}{dx} = dx f'(x) = y'dx,$$

en désignant par y' la tangente d'inclinaison en M.

L'élément M'M'' donne aussi

$$M''Q'' \text{ ou } dy_1 = dx_1\,\frac{dy_1}{dx_1};$$

et comme il en est de même pour tous les éléments de la courbe AB, on voit que la quantité BC qu'il faut ajouter à l'ordonnée du point A pour avoir celle du point B est la somme des différentielles dy, dy_1,..., c'est-à-dire

$$\Sigma dy = \Sigma y'dx,$$

en représentant, pour abréger, par Σdy la somme de toutes les quantités analogues à dy et par $\Sigma y'dx$ la somme de tous les produits analogues à $y'dx$.

Cette somme est l'intégrale cherchée de dy, et on l'écrit

$$\int dy = \int y'dx,$$

qu'on lit *intégrale de* dy *égale intégrale de* y'dx.

Cette somme ou intégrale devant être calculée depuis le point A jusqu'au point B, désignant, par exemple, par a l'abscisse de A et par b celle de B, l'égalité précédente s'écrit

$$\int_a^b dy = \int_a^b y'dx,$$

que l'on énonce l'*intégrale entre les limites* a *et* b *de* dy *égale l'intégrale entre les limites* a *et* b *de* y'dx, et qui signifie que l'intégrale d'une quantité différentielle de la forme

$$dy = f'(x)dx$$

est la somme des accroissements dy de la fonction y, faite entre deux *limites* a et b répondant à deux ordonnées ou valeurs particulières finies de la fonction y.

Une de ces limites peut être nulle ou négative; c'est ce qui arrive selon que le point A se trouve sur l'axe des y ou à gauche de cet axe; dans l'un ou l'autre cas l'intégrale s'écrit

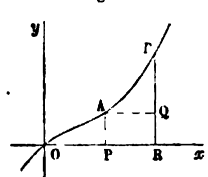
$$\int_0^b dy = \int_0^b y'dx, \quad \text{ou} \quad \int_{-a}^b dy = \int_{-a}^b y'dx.$$

La limite a étant négative, celle b peut aussi être nulle ou négative.

L'intégrale prise entre deux limites prend le nom d'*intégrale définie*, et l'intégrale sous la forme générale $\int dy$ prend celui d'*intégrale indéfinie*.

1766. *Exemple du calcul d'une intégrale définie dont les limites sont données.* Soit

Fig. 576.



$$y = \int x^2 dx, \qquad (1)$$

ce qui donne (1732, 1764)

$$y = \frac{x^3}{3} + C, \qquad (2)$$

et proposons-nous de calculer cette intégrale entre les limites correspondant aux points A et B, dont les coordonnées sont :

$$\text{pour A} \begin{cases} x = a = \text{OP} \\ y = a' = \text{AP}, \end{cases} \qquad \text{pour B} \begin{cases} x = b = \text{OR} \\ y = b' = \text{BR}. \end{cases}$$

Calculer l'intégrale $\int x^2 dx$ entre les limites correspondant aux points

A et B revenant géométriquement à trouver la longueur BQ qu'il faut ajouter à AP pour obtenir BR, la relation (2) donnant

$$AP = y = \frac{a^3}{3} + C, \quad \text{et} \quad BR = y = \frac{b^3}{3} + C,$$

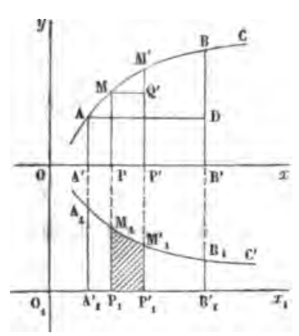
on a

$$BR - AP = BQ = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} = \int_a^b x^2 dx.$$

Ainsi *le résultat demandé s'obtient en remplaçant successivement dans l'intégrale indéfinie* (1) *la variable* x *par ses deux valeurs correspondant aux limites de l'intégrale*, *et en prenant la différence algébrique des deux résultats trouvés.*

1767. *Une intégrale définie peut être représentée géométriquement par l'aire d'une courbe.* En effet, si l'on construit les courbes C et C′ représentatives de la fonction primitive et de la fonction dérivée du premier ordre

Fig. 577.



$$y = f(x), \tag{1}$$

et

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x),$$

d'où

$$dy = f'(x)\, dx = y' dx,$$

comme en intégrant cette dernière expression on retrouve la fonction primitive (1), on a

$$\int dy = \int y' dx, \quad \text{ou} \quad y = \int y' dx. \tag{2}$$

L'accroissement infiniment petit dx de la variable x étant représenté géométriquement par $PP' = P_1P'_1$, et y' par l'ordonnée M_1P_1, le produit $y'dx$ l'est par le trapèze $M_1P_1M'_1P'_1$, puisque à la limite on peut supposer $M_1P_1 = M'_1P'_1$, et il en résulte que l'accroissement $dy = M'Q'$ de l'ordonnée y=MP de la courbe C est représenté par l'aire $M_1P_1M'_1P'_1$. Comme un autre accroissement quelconque de l'ordonnée est de même représenté par l'aire correspondante, il en résulte que pour passer de l'ordonnée du point A à l'ordonnée du point B, la somme totale BD des accroissements infiniment petits de y sera représentée par la somme des aires infiniment petites correspondantes, c'est-à-dire par l'aire $A_1A'_1B_1B'_1$. Ainsi l'on peut poser

$$\int_a^b dy = \int_a^b y' dx = \text{surf. } A_1A'_1B_1B'_1,$$

a et b étant les limites de l'intégrale, c'est-à-dire fixant les ordonnées entre lesquelles cette aire est calculée.

En résumé, on voit que le calcul d'une intégrale définie peut toujours

se réduire à déterminer l'aire d'une courbe comprise entre deux ordonnées, ces ordonnées correspondant aux limites de l'intégrale, et cette courbe représentant géométriquement la fonction dérivée du premier ordre de la fonction cherchée, donnée sous la forme

$$y = f(x) = \int y' dx.$$

RÈGLES D'INTÉGRATION.

1768. *Intégrales des fonctions simples.* Il n'y a pas de méthode de recherche pour remonter des fonctions dérivées ou des fonctions différentielles aux fonctions simples qui les ont données. La fonction

$$y = x^m \qquad (1)$$

ayant pour dérivée (1732)

$$\frac{dy}{dx} = y' = mx^{m-1}, \qquad (2)$$

et pour différentielle

$$dy = mx^{m-1}dx, \qquad (3)$$

si l'on donne l'une des expressions (2) ou (3), et qu'on demande la fonction primitive, la réponse sera

$$y = f(x) + C,$$

et l'on écrira

$$\int dy = \int mx^{m-1}dx = x^m + C;$$

c'est-à-dire que pratiquement on fera les opérations inverses de celles qui fournissent la différentielle. Ainsi, dans l'exemple choisi, on augmentera l'exposant $(m-1)$ d'une unité et l'on divisera par le nouvel exposant et par dx, ce qui donnera

$$\int dy = \int mx^{m-1}dx \quad \text{ou} \quad y = \frac{mx^{m-1+1}}{m} = x^m;$$

puis on ajoutera une constante arbitraire C, afin d'avoir l'expression générale dont la dérivée est mx^{m-1}.

Cet exemple montre que la *formule générale de l'intégration d'une expression différentielle dans laquelle la variable* x *est élevée à une puissance quelconque* est

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Cette règle n'est cependant pas applicable dans le cas où $n = -1$. En

effet, elle donne alors

$$\int x^{-1}dx = \int \frac{dx}{x} = \frac{x^{-1+1}}{-1+1} + C = \frac{x^0}{0} + C = \frac{1}{0} + C = \infty + C,$$

qui est le symbole de l'impossibilité (486). Mais la fonction

$$y = \log x$$

donne (1733)

$$dy = \log e \frac{dx}{x},$$

et si les logarithmes sont pris dans le système népérien (405),

$$dy = \frac{dx}{x};$$

expression différentielle qui a alors pour fonction primitive

$$\int dy = \int \frac{dx}{x} = L.x + C,$$

et non

$$\infty + C.$$

Tableau de quelques intégrales et de leurs différentielles correspondantes.

$dx^{n+1} = (n+1)x^n dx,$	(1732)	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$	1
$d \log x = \frac{\log e}{x} dx,$	(1733)	$\int \frac{\log e}{x} dx = \log x + C.$	2
$da^x = \frac{\log a}{\log e} a^x dx,$	(1741)	$\int a^x dx = \frac{\log e}{\log a} a^x + C.$	3
$d \sin x = \cos x dx,$	(1734)	$\int \cos x dx = \sin x + C.$	4
$d \cos x = -\sin x dx,$	(1739)	$\int \sin x dx = -\cos x + C.$	5
$d \tang x = \frac{dx}{\cos^2 x},$	(1742)	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tang x + C.$	6
$d \cot x = \frac{-dx}{\sin^2 x},$	(1742)	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$	7

Pour $x < \frac{\pi}{2}$:

$d \arc \sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$	(1742)	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arc \sin x + C.$	8
$d \arc \cos x = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}},$	(1742)	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arc \cos x + C.$	9
$d \arc \tang x = \frac{dx}{1+x^2},$	(1742)	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arc \tang x + C.$	10
$d \arc \cot x = \frac{-dx}{1+x^2},$		$\int \frac{dx}{1+x^2} = -\arc \tang x + C.$	11

1769. *L'intégrale d'une somme de différentielles d'une même variable x est la somme des intégrales des différentielles qui composent cette somme.* En effet, la somme algébrique

$$y = u + v - z, \qquad (1)$$

dans laquelle u, v et z sont des fonctions quelconques d'une même variable x, donnant (1736)

$$\mathrm{d}(u + v - z) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v - \mathrm{d}z,$$

on a bien, en intégrant les deux membres,

$$\int \mathrm{d}(u + v - z) = \int \mathrm{d}u + \int \mathrm{d}v - \int \mathrm{d}z + C,$$

ou

$$y = u + v - z + C,$$

C étant la somme des constantes qu'il faut ajouter aux intégrales particulières.

1er *Exemple.* En intégrant l'expression différentielle

$$\mathrm{d}y = x^m \mathrm{d}x + x^n \mathrm{d}x - x^p \mathrm{d}x,$$

on obtient ainsi (1768)

$$y = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{p+1}}{p+1} + C.$$

2e *Exemple.* De même en intégrant

$$\mathrm{d}y = \frac{\log e}{x} \mathrm{d}x + \cos x \mathrm{d}x,$$

on obtient (1768)

$$y = \int \frac{\log e}{x} \mathrm{d}x + \int \cos x \mathrm{d}x = \log x + \sin x + C.$$

1770. *Tout facteur constant d'une expression différentielle est conservé comme coefficient dans l'intégrale de cette expression.* En effet, la fonction

$$y = af(x),$$

dans laquelle a est une constante, donnant (1737, 3°)

$$\mathrm{d}y = af'(x)\mathrm{d}x,$$

réciproquement, en intégrant cette dernière fonction on a bien

$$\int af'(x)\mathrm{d}x = af(x) + C.$$

Comme application on a (1768)

$$y = \int 5x^2 \mathrm{d}x = \frac{5x^3}{3} + C.$$

1771. *La considération du coefficient constant permet de déduire directement les intégrales de certaines fonctions de celles du n° 1768.*

1er *Exemple.* Les fonctions différentielles

$$dy = \frac{dx}{x} \quad \text{et} \quad dy = \frac{\log e}{x}\,dx$$

ne différant que par le coefficient constant $\log e$, leurs intégrales ne diffèrent que par ce même coefficient, et comme on a (1768)

$$\int \frac{\log e}{x}\,dx = \log x + C,$$

on a donc

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{\log x}{\log e} + C.$$

Si les logarithmes sont pris dans le système népérien (405), comme alors $L.e = 1$, on a

$$\int \frac{dx}{x} = L.x + C.$$

2e *Exemple.* a et b étant des coefficients constants, on a (439, 1768, 1769)

$$\int (ax + bx^2)^2 dx = \int a^2x^2\,dx + \int 2abx^3\,dx + \int b^2x^4\,dx$$
$$= \frac{a^2x^3}{3} + \frac{2abx^4}{4} + \frac{b^2x^5}{5} + C.$$

1772. *Intégration par changement de variable ou par substitution.* Une fonction différentielle qui n'est pas immédiatement intégrable le devient quelquefois par un changement de variable.

1er *Exemple.* Soit à intégrer

$$dy = (ax + bx)^m dx. \qquad (1)$$

On peut développer le second membre d'après la formule du binome de Newton (518), puis intégrer séparément chaque terme ; mais il est plus simple d'opérer de la manière suivante. On pose

$$ax + bx = z \quad \text{ou} \quad (a + b)x = z,$$

d'où

$$x = \frac{z}{a + b} \quad \text{et} \quad dx = \frac{1}{a + b}\,dz\,;$$

on substitue ces valeurs de $ax + bx$ et de dx dans la relation (1), qui devient

$$dy = \frac{1}{a + b} z^m dz\,;$$

on intègre les deux membres, ce qui donne (1768, 1770)

$$y = \frac{1}{a+b}\,\frac{z^{m+1}}{m+1} + C,$$

ou, en remplaçant z par sa valeur $ax+bx$,

$$y = \frac{1}{a+b}\,\frac{(ax+bx)^{m+1}}{m+1} + C.$$

2° *Exemple.* Soit à trouver l'intégrale

$$y = \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \int \frac{a^2}{a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\,dx = \int \frac{a}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,dx. \qquad (1')$$

On pose

$$\frac{x}{a} = z, \quad \text{d'où} \quad dx = adz \quad \text{et} \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 = z^2;$$

ce qui donne, en substituant dans (1'),

$$y = \int \frac{a^2}{\sqrt{1-z^2}}\,dz = a^2\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = a^2 \arcsin z + C = a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C. \quad (1768)$$

3° *Exemple.* Soit

$$y = \int \operatorname{tang} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx. \qquad (1'')$$

On pose

$$\cos x = z, \quad \text{d'où} \quad dz = -\sin x dx \quad \text{ou} \quad \sin x dx = -dz,$$

et remplaçant dans (1'') $\sin x dx$ et $\cos x$ par ces valeurs, on obtient

$$y = \int \frac{-dz}{z} = \frac{-\log z}{\log e} + C = \frac{-\log \cos x}{\log e} + C.$$

En prenant les logarithmes dans le système népérien (405), $L.e = 1$, et par suite on a

$$y = -L.\cos x + C.$$

4° *Exemple.* Soit à intégrer, A étant une constante,

$$dy = \frac{Ax^2dx}{(ax+b)^3}. \qquad (1''')$$

Posons

$$ax+b = z, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{z-b}{a} \quad \text{et} \quad dx = \frac{dz}{a}.$$

Substituant ces valeurs dans la relation (1'''), elle devient

$$dy = \frac{A(z-b)^2dz}{a^3z^3} = \frac{A}{a^3}\left(\frac{z^2dz}{z^3} - \frac{2bzdz}{z^3} + \frac{b^2dz}{z^3}\right)$$

ou

$$dy = \frac{A}{a^3}\left(\frac{dz}{z} - 2bz^{-2}dz + b^2z^{-3}dz\right);$$

d'où, en intégrant les deux membres (1768, 1769, 1771),

$$y = \frac{A}{a^3}\left(\frac{\log z}{\log e} - \frac{2bz^{-1}}{-1} + \frac{b^2z^{-2}}{-2}\right) + C = \frac{A}{a^3}\left(\frac{\log z}{\log e} + \frac{2b}{z} - \frac{b^2}{2z^2}\right) + C,$$

ou, en remplaçant z par sa valeur $ax + b$,

$$y = \frac{A}{a^3}\left(\frac{\log(ax+b)}{\log e} + \frac{2b}{ax+b} - \frac{b^2}{2(ax+b)^2}\right) + C.$$

3ᵉ *Exemple*. Soit

$$y = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx. \qquad (a)$$

On pose, z étant une première variable auxiliaire,

$$x = a \sin z, \qquad (a')$$

d'où (1734)

$$dx = a \cos z dz \quad \text{et} \quad x^2 = a^2 \sin^2 z,$$

et, par suite,

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 z} = a\sqrt{1 - \sin^2 z} = a \cos z. \qquad (1107)$$

Remplaçant dx et $\sqrt{a^2 - x^2}$ par ces valeurs dans (a), il vient

$$y = \int a^2 \cos^2 z dz = a^2 \int \cos^2 z dz. \qquad (b)$$

Ayant (1113)

$$\cos 2z = 2\cos^2 z - 1, \quad \text{d'où} \quad \cos^2 z = \frac{1 + \cos 2z}{2},$$

la relation (b) peut s'écrire

$$y = a^2 \int \frac{1 + \cos 2z}{2} dz = a^2 \int \frac{dz}{2} + a^2 \int \frac{\cos 2z}{2} dz,$$

ou

$$y = \frac{a^2 z}{2} + a^2 \int \frac{\cos 2z}{2} dz. \qquad (c)$$

Pour intégrer le second terme de cette dernière relation, posons

$$2z = u, \quad \text{d'où} \quad z = \frac{u}{2}, \quad \text{et} \quad dz = \frac{du}{2}.$$

On a alors

$$y = \frac{a^2 z}{2} + a^2 \int \frac{\cos u}{2} \frac{du}{2} = \frac{a^2 z}{2} + \frac{a^2}{4} \sin u = \frac{a^2 z}{2} + \frac{a^2}{4} \sin 2z.$$

Comme la relation (a') donne

$$\sin z = \frac{x}{a} \quad \text{et} \quad z = \arcsin \frac{x}{a},$$

et que de plus on a (1107, 1113)

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z,$$

et

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a},$$

substituant ces valeurs dans la dernière expression de y, il vient

$$y = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{4} 2 \frac{x}{a} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a},$$

ou, en simplifiant et ajoutant la constante C,

$$y = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Cette formule trouve son application au n° 1777 pour la détermination des aires du cercle et de l'ellipse.

6° *Exemple*. Soit encore

$$y = \int \sqrt{p^2 + x^2}\, dx, \qquad (a)$$

p étant une constante.

Posant, z étant une variable auxiliaire,

$$\sqrt{p^2 + x^2} = z - x, \qquad (b)$$

la relation (a) devient

$$y = \int (z - x)\, dx = \int z dx - \int x dx = \int z dx - \frac{x^2}{2}. \qquad (a')$$

De la relation (b) on déduit successivement :

$$p^2 + x^2 = z^2 - 2zx + x^2,$$
$$p^2 = z^2 - 2zx, \qquad (c)$$
$$x = \frac{z^2 - p^2}{2z},$$
$$z = x + \sqrt{p^2 + x^2}, \qquad (526)$$
$$z^2 = 2x^2 + p^2 + 2x \sqrt{p^2 + x^2}.$$

L'équation (c) différentiée donne (1732, 1735, 1736, 1737)

$$0 = 2z dz - 2z dx - 2x dz,$$

d'où

$$dx = \frac{(z-x)\,dz}{z} = \frac{\left(z - \frac{z^2-p^2}{2z}\right)dz}{z} = \frac{(z^2+p^2)\,dz}{2z^2}.$$

Remplaçant dx par sa valeur dans $\int z\,dx$ de la relation (a'), on a

$$\int z\,dx = \int \frac{(z^2+p^2)\,dz}{2z} = \int \frac{z\,dz}{2} + \int \frac{p^2}{2}\frac{dz}{z} = \frac{z^2}{4} + \frac{p^2}{2}\frac{\log z}{\log e}, \quad (1771)$$

ou, en remplaçant z et z^2 par leurs valeurs,

$$\int z\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{p^2}{4} + \frac{x}{2}\sqrt{p^2+x^2} + \frac{p^2}{2}\frac{\log\left(x+\sqrt{p^2+x^2}\right)}{\log e}.$$

Cette valeur de $\int z dx$ substituée dans la relation (a') donne pour l'intégrale cherchée, en ajoutant une constante C,

$$y = \int\sqrt{p^2+x^2}\,dx = \frac{p^2}{4} + \frac{x}{2}\sqrt{p^2+x^2} + \frac{p^2}{2}\frac{\log\left(x+\sqrt{p^2+x^2}\right)}{\log e} + C. \quad (d)$$

Cette formule trouvera son application au n° 1785 pour la rectification de la parabole.

1773. *Intégration par parties.* En intégrant l'expression

$$dy = u\,dv,$$

dans laquelle u et v sont des fonctions de x, on obtient

$$y \text{ ou } \int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

En effet, différentiant l'expression

$$y = uv,$$

on a (1737)

$$dy \quad \text{ou} \quad d(uv) = v du + u dv,$$

d'où

$$u dv = d(uv) - v du,$$

et en intégrant les deux membres on a bien

$$y \quad \text{ou} \quad \int u dv = uv - \int v du. \quad (A)$$

Ainsi l'intégrale du produit udv se transforme en une différence algébrique dont l'un des termes est le produit uv des variables (fonctions de x), et dont l'autre $\int v du$, quoique de même forme que l'intégrale proposée, peut être plus simple.

1er *Exemple.* Soit à calculer

$$y = \int \log x dx.$$

On pose

$$\log x = u, \quad \text{d'où} \quad du = \frac{\log e dx}{x}, \qquad (1733)$$

et

$$dx = dv, \quad \text{d'où} \quad x = v.$$

La formule (A) donne alors

$$y \text{ ou } \int \log x dx = x \log x - \int x \frac{\log e dx}{x} = x \log x - \int \log e dx,$$

ou

$$\int \log x dx = x(\log x - \log e) + C = x \log \frac{x}{e} + C. \qquad (393)$$

2e *Exemple.* Soit à trouver

$$y = \int x \sin x dx.$$

Posant

$$x = u, \quad \text{d'où} \quad dx = du,$$

et

$$\sin x dx = dv, \quad \text{d'où} \quad v = \int \sin x dx = -\cos x, \qquad (1768)$$

la formule (A) donne

$$\int x \sin x dx = -x \cos x - \int -\cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

3e *Exemple.* Soit

$$y = \int x^2 a^x dx.$$

Posant

$$x^2 = u, \quad \text{d'où} \quad 2x dx = du,$$

et

$$a^x = v, \quad \text{d'où} \quad \frac{\log a}{\log e} a^x dx = dv, \qquad (1741)$$

la formule (A) donne

$$y = \int x^2 a^x dx = x^2 a^x - \int a^x 2x dx. \qquad (B)$$

Pour calculer

$$\int a^x 2x dx,$$

posant

$$2x = u, \quad \text{d'où} \quad 2dx = du,$$

et

$$a^x dx = dv, \quad \text{d'où} \quad \frac{\log e}{\log a} a^x = v, \qquad (1768)$$

la formule (A) donne

$$\int a^x 2x dx = 2x \frac{\log e}{\log a} a^x - \int 2 \frac{\log e}{\log a} a^x dx =$$
$$= 2x \frac{\log e}{\log a} a^x - 2 \frac{\log e}{\log a} \frac{\log e}{\log a} a^x = 2 \frac{\log e}{\log a} a^x \left(x - \frac{\log e}{\log a}\right).$$

Substituant cette intégrale dans la relation (B), on a en définitive

$$y = \int x^2 a^x dx = x^2 a^x - 2 \frac{\log e}{\log a} a^x \left(x - \frac{\log e}{\log a}\right) + C.$$

4° *Exemple.* Soit à trouver l'intégrale déjà déterminée au n° 1772,

$$y = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Posant

$$u = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad \text{et} \quad x = v,$$

ces relations différentiées donnent (1739)

$$du = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx, \quad \text{et} \quad dx = dv.$$

Par suite, la formule (A) donne

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int -\frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx. \qquad (a)$$

Multipliant et divisant le premier membre de cette équation par $\sqrt{a^2 - x^2}$, il vient

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx,$$

ou, puisque (1772, 2° exemple)

$$\int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a^2 \arcsin \frac{x}{a},$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \arcsin \frac{x}{a} - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx. \qquad (b)$$

Ajoutant membre à membre les équations (*a*) et (*b*), on a

$$2\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2},$$

et l'intégrale cherchée est, comme au n° 1772,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

APPLICATION DU CALCUL INTÉGRAL.

Quadrature des courbes.

1774. *Solution générale de la quadrature des courbes.* Soit

Fig. 578.

$$y = f(x)$$

l'équation d'une courbe C dont il s'agit de déterminer l'aire comprise entre les ordonnées AA' et BB', et soient Y, X les coordonnées du point A, et Y', X' celles du point B.

Considérant de cette aire un élément MPP'M' compris entre les ordonnées voisines MP et M'P', y et x étant les coordonnées du point M, à la limite du rapprochement de MP et M'P', celles du point M' seront $y + dy$ et $x + dx$, et l'élément MPP'M' sera un trapèze dont l'aire, que nous désignerons par dS, sera (697)

$$dS = \frac{y + (y + dy)}{2} dx. \qquad (1)$$

Cela établi, comme l'on peut concevoir l'aire totale AA'BB' divisée en petits trapèzes élémentaires, cette aire totale S sera la somme ΣdS ou $\int dS$ des aires de tous les trapèzes élémentaires, et l'on aura

$$S = \int dS = \int \frac{y + (y + dy)}{2} dx. \qquad (2)$$

dy pouvant être négligé à la limite dans les expressions (1) et (2), la première devient

$$dS = y dx,$$

et la seconde,

$$S = \int dS = \int y dx.$$

Calculant cette intégrale en fonction de x, et intégrant entre les limites $x = X$ et $x = X'$, on a (1765 et 1766)

$$S = \int_X^{X'} y dx = \int_X^{X'} f(x) dx.$$

La même intégrale calculée en fonction de y entre les limites Y et Y' s'indiquerait

$$S = \int_Y^{Y'} y dx. \qquad (3)$$

De l'équation de la courbe

$$y = f(x),$$

on déduit

$$\frac{dy}{dx} = f'(x), \quad \text{d'où} \quad dx = \frac{dy}{f'(x)}.$$

Remplaçant dx par cette valeur dans (3), il vient

$$S = \int_{Y}^{Y'} \frac{y}{f'(x)}\,dy.$$

1775. 1re *application. Surface du triangle rectangle.* Soit une droite OB dont l'équation est (1160)

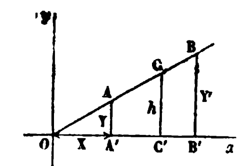


Fig. 579.

$$y = ax, \qquad (1)$$

et calculons l'aire COC' comprise entre l'origine O et l'ordonnée CC'. Soient

$$OC' = b, \quad \text{et} \quad CC' = h.$$

La formule générale des aires (1774)

$$S = \int y\,dx$$

donne, en y remplaçant y par sa valeur déduite de (1) et en intégrant (1768, 1770),

$$S = \int ax\,dx = \frac{ax^2}{2} + C. \qquad (2)$$

Pour avoir l'aire demandée COC', prenons cette intégrale entre les limites $x = 0$ et $x = b$. Or, comme pour $x = 0$ et $x = b$, on a respectivement

$$S = 0 + C \quad \text{et} \quad S = \frac{ab^2}{2} + C,$$

l'aire COC' est donc (1766)

$$S = \int_0^b ax\,dx = \frac{ab^2}{2} + C - (0 + C) = \frac{ab^2}{2}. \qquad (3)$$

Comme l'on reconnaît immédiatement que pour $x = 0$ on a $S = 0$, la relation (2) donne, pour $x = 0$,

$$0 = 0 + C, \quad \text{d'où} \quad C = 0.$$

La constante étant nulle, on peut la supprimer dans la relation (2), qui devient

$$S = \int ax\,dx = \frac{ax^2}{2},$$

et cela établi, on peut poser de suite pour l'aire cherchée

$$S = \int_0^b ax\,dx = \frac{ab^2}{2}.$$

En général, lorsque pour une valeur déterminée de la variable l'intégrale indéfinie s'annule, de l'équation qui en résulte, on déduit la constante C, qui est égale au résultat qu'on obtient en changeant de signe les autres termes de la valeur de l'intégrale qui ne s'annulent pas, et l'intégrale définie ayant pour limite 0 et une valeur quelconque de la variable, s'obtient en remplaçant dans l'intégrale indéfinie la variable par sa valeur-limite, et la constante par sa valeur trouvée.

La dernière marche suivie pour avoir $S = \frac{ab^2}{2}$ est une application de cette règle, qui sera mieux mise en évidence par quelques-unes des applications que nous ferons. Cette règle n'est du reste qu'une simplification de la règle générale, dans laquelle C disparaît du résultat définitif sans qu'on se soit préoccupé de sa valeur.

Le point C étant sur la droite OB, la relation (1) est vérifiée par le système de valeurs $y = h$ et $x = b$; ainsi l'on a

$$h = ab, \quad \text{d'où} \quad a = \frac{h}{b}.$$

Substituant cette valeur de a dans la relation (3), on a en définitive pour l'aire cherchée

$$S = \frac{hb^2}{2b} = \frac{bh}{2},$$

qui est bien l'expression de la surface du triangle rectangle COC' (692).

On arrive au même résultat en intégrant

$$S = \int y \, dx$$

après avoir remplacé dx en fonction de y. De la relation (1) on déduit

$$dy = a dx, \quad \text{d'où} \quad dx = \frac{dy}{a},$$

et, par suite,

$$S = \int \frac{y}{a} dy = \frac{y^2}{2a} + C.$$

Comme pour $y = 0$ on a $S = 0$, on a donc

$$0 = 0 + C, \quad \text{d'où} \quad C = 0.$$

Par suite,

$$S = \int \frac{y}{a} dy = \frac{y^2}{2a},$$

et l'aire cherchée est

$$S = \int_0^h \frac{y}{a} dy = \frac{h^2}{2a}. \qquad (2)$$

Les coordonnées du point C devant vérifier l'équation (1), on a

$$h = ab, \quad \text{d'où} \quad a = \frac{h}{b},$$

et en substituant cette valeur de a dans la relation (2'), on a, comme ci-dessus, pour l'aire cherchée,

$$S = \frac{bh^2}{2h} = \frac{bh}{2}.$$

1776. 2e *application. Surface du trapèze.* Pour avoir l'aire du trapèze AA'BB', *fig.* 579, il suffit de calculer l'intégrale

$$S = \int y\,dx \qquad (1774)$$

entre les limites $x = X$ et $x = X'$, X et X' étant les abscisses des points extrêmes A et B. Or, d'après le numéro précédent, de 0 à X et de 0 à X', on a respectivement :

$$\int_0^X y\,dx = \frac{aX^2}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^{X'} y\,dx = \frac{aX'^2}{2};$$

donc l'aire cherchée est (1766)

$$S = \int_X^{X'} y\,dx = \frac{aX'^2}{2} - \frac{aX^2}{2} = \frac{a}{2}(X'^2 - X^2) = \frac{a}{2}(X' + X)(X' - X).$$

Comme l'équation

$$y = ax,$$

de la droite OB, donne respectivement pour les points A et B

$$Y = aX \quad \text{et} \quad Y' = aX',$$

par addition on a

$$Y + Y' = a(X + X'), \quad \text{d'où} \quad (X + X') = \frac{Y + Y'}{a}.$$

Substituant cette valeur de $X + X'$ dans l'expression précédente de S, il vient

$$S = \frac{Y + Y'}{2}(X' - X).$$

Expression qui n'est autre que celle donnée au nº 697 pour l'aire d'un trapèze ayant Y et Y' pour bases et $X' - X = A'B'$ pour hauteur.

1777. 3e *application. Surface de l'ellipse et surface du cercle.* L'équation de l'ellipse rapportée à ses axes principaux donne (1174)

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

La formule générale des aires (1774)

$$S = \int y\,dx$$

appliquée à l'ellipse donne donc (1772, 3ᵉ exemple)

$$S = \int \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{b}{a} \times \frac{a^2}{2} \text{ arc sin } \frac{x}{a} + \frac{b}{a} \times \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Prenant cette intégrale pour le quart de l'ellipse, c'est-à-dire entre les limites $x = 0$ et $x = a$, comme pour $x = 0$ on a $S = 0$, et que de la relation précédente on conclut $C = 0$, cette relation précédente donnant pour $x = a$

$$S = \frac{ab}{2} \text{ arc sin } 1 = \frac{\pi ab}{4},$$

on a donc pour le quart de l'ellipe

$$S = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{\pi ab}{4},$$

et pour la surface totale de l'ellipse (1205)

$$S = \pi ab.$$

Lorsque $a = b = r$, l'ellipse devient un cercle de rayon r, et l'on a (728, 1205)

$$S = \pi r^2.$$

1778. 4ᵉ *application. Aire d'un segment de parabole.* L'équation de la parabole rapportée à son sommet étant (1240)

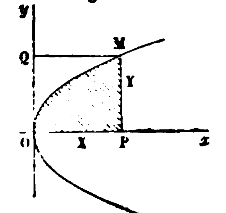


Fig. 580.

$$y^2 = 2px, \qquad (1)$$

la formule générale des aires (1774)

$$S = \int y\,dx$$

donne

$$S = \int \sqrt{2p}\,x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{\sqrt{2p}\,x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{2px} \times x + C + \frac{2}{3}xy + C.$$

Désignant par Y et X les coordonnées du point M, on obtient l'aire du segment OMP en prenant l'intégrale précédente entre les limites $x = 0$ et $x = X$. Or pour $x = 0$ on a $S = 0$ et de la relation précédente on conclut $C = 0$; donc l'aire cherchée est, comme au nᵒ 1257,

$$S = \int_0^X \sqrt{2p}\,x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}XY.$$

On peut intégrer

$$S = \int y\,dx$$

par rapport à la variable y. A cet effet, de la relation (1) on déduit

$$2y\,dy = 2p\,dx, \quad \text{d'où} \quad dx = \frac{y}{p}\,dy,$$

et cette valeur de dx substituée dans la valeur précédente de S donne

$$S = \int \frac{y^2}{p}\,dy = \frac{y^3}{3p} + C.$$

Prenant cette intégrale entre les limites $y=0$ et $y=Y$, comme pour $y=0$ on a $S=0$ et $C=0$, l'aire cherchée est donc

$$S = \int_0^Y \frac{y^2}{p}\,dy = \frac{Y^3}{3p},$$

ou, puisque $Y^2 = 2pX$,

$$S = \frac{2pXY}{3p} = \frac{2}{3}XY.$$

1779. 5ᵉ *application. Aire de la sinusoïde.* L'équation de cette courbe étant

$$y = \sin x, \qquad (1)$$

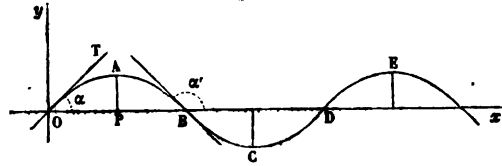
la formule générale des aires (1774)

$$S = \int y\,dx$$

donne (1768)

$$S = \int \sin x\,dx = -\cos x + C. \qquad (2)$$

Fig. 561.



Pour avoir l'aire S du segment OAP on prend cette intégrale entre les limites $x=0$ et $x = OP = \frac{\pi}{2}$, ce qui donne respectivement

$$S = -1 + C \quad \text{et} \quad S = -0 + C.$$

Par suite l'aire OAP est, en négligeant la constante C, qui s'annule,

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 0 - (-1) = 1.$$

En suivant la seconde marche du n° 1775, remarquant que pour $x = 0$ on a $S = 0$, et que la relation (2) devient

$$0 = -1 + C, \quad \text{d'où} \quad C = 1,$$

comme pour $x = \frac{\pi}{2}$ on a $\cos x = 0$, on a donc bien

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 0 + 1 = 1.$$

L'interprétation pratique de ce résultat est facile, l'équation (1) supposant que le rayon R de l'arc x est pris pour unité, il en résulte que l'aire $S = AOP$ est équivalente à celle d'un carré qui a R pour côté. Si, par exemple, $R = 3^m,00$, on a $S = 9^{mq},00$.

L'aire OAB est double de celle OAP, et a pour valeur numérique le nombre 2, qu'on obtient en prenant l'intégrale (2) entre les limites $x = 0$ et $x = OB = \pi$, ce qui donne bien, puisque $\cos \pi = -1$ ou $-\cos \pi = 1$,

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = 1 + 1 = 2.$$

1780. 6ᵉ *application. Aire de la logarithmique.* L'équation de cette courbe étant

$$y = \log x, \tag{1}$$

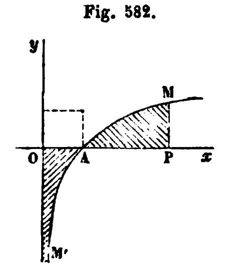
substituant cette valeur de y dans l'équation générale des aires (1774), on a (1773)

$$S = \int y dx = \int \log x dx = x(\log x - \log e) + C = x \log \frac{x}{e} + C.$$

Si les logarithmes sont pris dans le système népérien (404), on a $L.e = 1$, et par suite

$$S = \int L.x dx = xL.x - x + C. \tag{2}$$

Fig. 582.



Comme pour $x = 0$, la surface S se réduit à 0, on a d'après la relation (2)

$$0 = 0 + C, \quad \text{d'où} \quad C = 0.$$

La constante C étant nulle, la relation (2) devient

$$S = \int L.x dx = xL.x - x. \tag{3}$$

Intégrant entre les limites $x = 0$ et $x = OA = 1$, on obtient pour l'aire S de la partie OAM' qui s'étend indéfiniment vers l'axe des y négatifs

$$S = \int_0^1 L.x dx = 0 - 1 = -1.$$

Ainsi l'aire OAM' est, abstraction faite du signe, équivalente à l'aire du carré qui a pour côté la longueur OA prise pour unité. Si à l'échelle choisie OA $=5$ millimètres, par exemple, l'aire OAM' est de -25 millimètres carrés.

Intégrant la relation (3) entre les limites $x=1=\mathrm{OA}$ et $x=\mathrm{X}=\mathrm{OP}$, on aura l'aire AMP. Or comme pour $x=1$ et $x=\mathrm{X}$ la relation (3) donne respectivement

$$\mathrm{S}=-1, \quad \text{et} \quad \mathrm{S}=\mathrm{XL}.\mathrm{X}-\mathrm{X}.$$

On a donc pour l'aire AMP

$$\mathrm{S}=\int_1^{\mathrm{X}} \mathrm{L}.x dx=\mathrm{XL}.\mathrm{X}-\mathrm{X}+1.$$

1781. *Mesure des aires par approximation.* Soit proposé d'évaluer l'aire d'une courbe comprise entre les deux ordonnées AA' et CC'. Menons l'ordonnée BB' également distante des ordonnées extrêmes AA', CC', et par les points ABC imaginons qu'on fasse passer un arc de parabole dont l'axe soit parallèle à A'y ; on peut admettre que cet arc ne diffère pas sensiblement de la courbe ABC et que son aire est sensiblement l'aire demandée.

Fig. 583

La parabole dont l'arc ABC fait partie ayant son équation de la forme

$$y=a+bx+cx^2, \tag{1}$$

si l'on prend AA' pour axe des y, on aura

$$a=y_0,$$

en appelant y_0 l'ordonnée du point A ; car l'équation (1) devant être vérifiée par un point quelconque de la parabole, elle l'est par le point A, et comme ce point donne $x=0$, on a bien $y_0=a$.

L'équation (1) peut alors être remplacée par cette autre :

$$y=y_0+bx+cx^2, \tag{2}$$

dans laquelle b et c sont deux coefficients constants à déterminer.

La formule générale des aires (1774) donne pour l'aire S $=$ AA'CC'

$$\mathrm{S}=\int_0^{x''} y\,dx=\int_0^{x''}(y_0+bx+cx^2)\,dx,$$

ou (1766, 1769)

$$\mathrm{S}=y_0x''+\frac{bx''^2}{2}+\frac{cx''^3}{3}=x''\left(y_0+\frac{bx''}{2}+\frac{cx''^2}{3}\right). \tag{A}$$

Pour déterminer les coefficients b et c, on remarque que la formule (2) donne respectivement pour les points B et C

$$y' = y_0 + \frac{bx''}{2} + \frac{cx''^2}{4} \quad \text{ou} \quad 4y' = 4y_0 + 2bx'' + cx''^2, \qquad (3)$$
$$y'' = y_0 + bx'' + cx''^2,$$

et que ces deux dernières équations permettent de déterminer b et c en fonction de quantités connues.

Mais cette recherche est inutile, et l'on peut calculer plus simplement la somme entre parenthèses de la relation (A) tout en y éliminant b et c. En effet, ajoutant membre à membre la relation $y_0 = y_0$ et celles (3) et (4), on a

$$y_0 + 4y' + y'' = 6y_0 + 3bx'' + 2cx''^2 = 6\left(y_0 + \frac{bx''}{2} + \frac{cx''^2}{3}\right);$$

d'où

$$y_0 + \frac{bx''}{2} + \frac{cx''^2}{3} = \frac{y_0 + 4y' + y''}{6}.$$

Substituant cette valeur dans la relation (A), il vient

$$S = \int_0^{x''} y\,dx = \frac{x''}{6}(y_0 + 4y' + y''),$$

et en posant

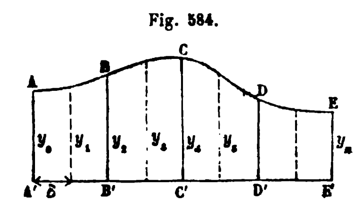
$$A'B' = B'C' = \frac{x''}{2} = \delta, \quad \text{d'où} \quad \frac{x''}{6} = \frac{\delta}{3},$$

on a en définitive

$$S = \int_0^{x''} y\,dx = \frac{\delta}{3}(y_0 + 4y' + y''). \qquad (B)$$

1782. *Formule de Thomas Simpson.* Pour calculer l'aire d'une courbe comprise entre deux ordonnées AA' et EE', on divise la projection A'E' en un nombre pair n de parties égales, et l'on mène des ordonnées par tous les points de division. Cela fait, appliquant successivement la formule précédente (B) à l'aire s comprise entre les ordonnées AA' et BB', à celle s' comprise entre les ordonnées BB' et CC', et ainsi de suite, quel que soit le nombre n des divisions de A'E', on a :

Fig. 584.



$$s = \frac{\delta}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$
$$s' = \frac{\delta}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4),$$
$$s'' = \frac{\delta}{3}(y_4 + 4y_5 + y_6),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Faisant la somme de toutes ces aires, on obtient pour l'aire totale

$$S = s + s' + \dots,$$

$$S = \frac{\delta}{3}[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})]. \qquad \text{(C)}$$

Formule que nous avons déjà donnée au n° 1303, où δ est remplacé par $\frac{E}{n}$.

1783. *Emploi de la formule de Thomas Simpson pour trouver une valeur approximative d'une intégrale finie de la forme*

$$\int_{x_0}^{x_n} uz\mathrm{d}x,$$

lorsque, pour des valeurs déterminées de x, on connaît les valeurs correspondantes des autres variables u et z.

On divise la différence $x_n - x_0$ des limites en un nombre pair n de parties égales, et posant

$$\frac{x_n - x_0}{n} = \delta, \quad \text{et} \quad uz = y,$$

l'intégrale proposée devient (1782)

$$\int_{x_0}^{x_n} y\mathrm{d}x = \frac{\delta}{3}[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})],$$

ou, en y faisant

$$y_0 = u_0 z_0, \quad y_1 = u_1 z_1, \quad y_2 = u_2 z_2, \quad \dots\dots, \quad y_n = u_n z_n,$$

$$\int_{x_0}^{x_n} y\mathrm{d}x = \frac{\delta}{3}[u_0 z_0 + u_n z_n + 4(u_1 z_1 + u_3 z_3 + \dots) + 2(u_2 z_2 + u_4 z_4 + \dots)].$$

On procéderait de même pour calculer l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_n} uvz\mathrm{d}x.$$

Posant

$$\frac{x_n - x_0}{n} = \delta, \quad \text{et} \quad uvz = y,$$

et remplaçant, on obtiendrait

$$\int_{x_0}^{x_n} uvz\mathrm{d}x = \frac{\delta}{3}[u_0 v_0 z_0 + u_n v_n z_n + 4(u_1 v_1 z_1 + u_3 v_3 z_3 + \dots) + $$
$$+ 2(u_2 v_2 z_2 + u_4 v_4 z_4 + \dots)].$$

Cubature des solides.

1784. *Solution générale de la cubature des solides. Application de la formule de Thomas Simpson (1782) à la cubature d'un solide quelconque.*

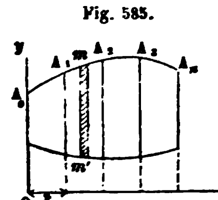


Fig. 585.

Soit un solide limité à deux plans A_0 et A_n perpendiculaires à l'axe Ox. Le volume d'un élément quelconque mm' de ce solide, compris entre deux plans parallèles aux plans extrêmes A_0 et A_n, a pour expression

$$dV = A dx,$$

A étant la section moyenne de l'élément faite parallèlement à A_0, et dx son épaisseur infiniment petite.

La *formule générale des volumes* est alors

$$V = \int A dx,$$

intégrale que dans les cas particuliers on prend entre les limites x_0 et x_n, qui sont les abscisses des points de rencontre des plans A_0 et A_n avec l'axe Ox.

Pour calculer approximativement cette intégrale, on divise la distance $x_n - x_0$ des plans extrêmes A_0, A_n en un nombre pair n de parties égales δ, par les points de division on mène des plans parallèles au plan A_0, on mesure les bases A_0, A_n du solide, ainsi que les sections obtenues A_1, A_2..., et appliquant la formule de Thomas Simpson, on a, comme pour les aires (1782)

$$V = \int A dx = \frac{\delta}{3}\,[A_0 + A_n + 4(A_1 + A_3 + \ldots + A_{n-1}) + 2(A_2 + A_4 + \ldots + A_{n-2})].$$

On voit que le volume V est numériquement égal à l'aire d'une courbe qui aurait des ordonnées proportionnelles aux sections A_0, A_1, A_2 ... A_n et les mêmes abscisses que ces sections.

Rectification des courbes.

1785. *Rectifier une courbe,* c'est trouver sa longueur exprimée en unités linéaires.

Soit une courbe AB dont l'équation est

$$y = f(x). \qquad (1)$$

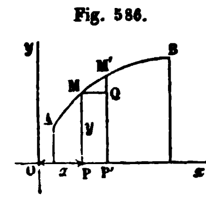


Fig. 586.

y et x étant les coordonnées du point M, celles du point voisin M' sont à la limite de rapprochement $y + dy$ et $x + dx$, l'arc MM' se confond avec sa corde, et le triangle rectangle MM'Q donne

$$MM' = \sqrt{\overline{M'Q}^2 + \overline{MQ}^2},$$

ce qui n'est autre chose, en représentant par dL l'arc infiniment petit

MM' rectifié, que l'équation différentielle

$$dL = \sqrt{(dy)^2 + (dx)^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx \sqrt{1 + [f'(x)]^2}.$$

Par suite, la longueur L d'un arc fini AB est donnée par l'intégrale suivante, calculée entre les limites a et b de la variable correspondant aux points extrêmes A et B,

$$L = \int_a^b dL = \int_a^b dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \int_a^b dx \sqrt{1 + [f'(x)]^2}. \qquad (2)$$

Telle est la formule générale de la rectification des courbes. Pour l'appliquer, on détermine la dérivée $f'(x)$ de la relation (1), on substitue le carré de cette dérivée dans la relation (2), et l'intégrale de l'expression résultante est la longueur cherchée L.

Application. Soit à rectifier la parabole dont l'équation est (*fig.* 580, n° 1778)

$$y^2 = 2px.$$

On a $\quad \frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{p}{y}, \quad$ d'où $\quad dx = \frac{y}{p} dy, \quad$ et $\quad [f'(x)]^2 = \frac{p^2}{y^2}.$

Substituant ces valeurs dans la formule (2), il vient

$$L = \int_a^b dx \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \int_a^b \frac{y}{p} dy \sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}} = \frac{1}{p} \int_a^b dy \sqrt{y^2 + p^2}.$$

S'il s'agit de la longueur L de l'arc OM compris entre le sommet O et le point M (*fig.* 580), on calcule cette intégrale entre les limites $a = y = 0$ et $b = Y = MP$, c'est-à-dire entre les limites 0 et $Y = MP$. Or comme on a (1772, 6e exemple)

$$\frac{1}{p}\int dy \sqrt{y^2 + p^2} = \frac{p}{4} + \frac{y}{2p}\sqrt{y^2 + p^2} + \frac{p}{2\log e}\log\left(y + \sqrt{y^2 + p^2}\right) + C,$$

cette intégrale devant s'annuler pour $y = 0$, puisque l'arc se réduit au sommet, on a

$$0 = \frac{p}{4} + \frac{p}{2}\frac{\log p}{\log e} + C, \qquad \text{d'où} \qquad C = -\frac{p}{4} - \frac{p}{2}\frac{\log p}{\log e}.$$

Substituant cette valeur de C dans l'intégrale précédente, on a en définitive

$$L = \frac{1}{p}\int_0^Y dy \sqrt{y^2 + p^2} = \frac{Y}{2p}\sqrt{Y^2 + p^2} + \frac{p}{2\log e}\log\frac{Y + \sqrt{Y^2 + p^2}}{p}.$$

Aire des surfaces de révolution.

1786. *Formule générale de l'aire des surfaces de révolution, et applications.* AB étant la méridienne d'une surface de révolution dont Ox

est l'axe (*fig.* 586), à la limite, un élément $MM' = dL$ de cette courbe se confond avec sa corde et décrit la surface latérale dS d'un tronc de cône; de sorte qu'en désignant par y et x les coordonnées du point M, on a (932)

$$dS = 2\pi\left(y + \frac{dy}{2}\right)dL,$$

ou, en négligeant $\frac{dy}{2}$ par rapport à y et en remplaçant dL par son expression générale (1785),

$$dS = 2\pi y\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

Par suite, l'aire S décrite par une courbe AB a pour expression générale

$$S = 2\pi\int y\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}. \qquad (1)$$

1° *Application à l'aire de la sphère.* La méridienne ayant pour origine le centre de la sphère, son équation est (1166)

$$y^2 + x^2 = r^2;$$

d'où

$$2ydy = -2xdx, \quad dy = -\frac{xdx}{y}, \quad \text{et} \quad (dy)^2 = \frac{x^2(dx)^2}{y^2}.$$

Substituant cette valeur de $(dy)^2$ dans l'intégrale précédente (1), on a

$$S = 2\pi\int y\sqrt{(dx)^2 + \frac{x^2(dx)^2}{y^2}} = 2\pi\int y\sqrt{\frac{y^2+x^2}{y^2}(dx)^2} = 2\pi\int dx\sqrt{y^2+x^2},$$

ou

$$S = 2\pi\int dx\, r = 2\pi rx + C.$$

Prenant cette intégrale entre les limites $x=0$ et $x=r$, ce qui fournit la surface de la demi-sphère, comme pour $x=0$, on a $S=0$ et par suite $C=0$, on obtient

$$S = 2\pi\int_0^r dx\, r = 2\pi rx + 0 = 2\pi r^2.$$

La surface totale de la sphère est alors $4\pi r^2$, comme au n° 937.

2° *Application à l'aire du paraboloïde de révolution.* Soit

$$y^2 = 2px$$

l'équation de la courbe méridienne (1240); on en déduit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{p^2}{y^2} = \frac{p^2}{2px} = \frac{p}{2x}.$$

Remplaçant $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ par cette valeur dans l'intégrale indéfinie (1), on obtient

$$S = 2\pi\int y\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = 2\pi\int y\,dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 2\pi\int y\,dx\sqrt{1+\frac{p^2}{y^2}} =$$
$$= 2\pi\int dx\sqrt{y^2+p^2} = 2\pi\int dx\sqrt{2px+p^2} = 2\pi\sqrt{p}\int dx\sqrt{2x+p}.$$

Posant

$$2x+p=z, \quad \text{d'où} \quad dx=\frac{dz}{2},$$

il vient

$$S = \pi\sqrt{p}\int z^{\frac{1}{2}}dz = \pi\sqrt{p}\,\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\pi\sqrt{p(2x+p)^3} + C. \qquad (a)$$

Comme pour $x=0$ on a $S=0$, cette dernière relation devient

$$0 = \frac{2}{3}\pi p^2 + C, \quad \text{d'où} \quad C = -\frac{2}{3}\pi p^2.$$

Pour avoir la surface de paraboloïde comprise entre le sommet et une section qui a X pour abscisse (*fig.* 580), on prend l'intégrale précédente entre les limites $x=0$ et $x=X$, ce qui se fait en remplaçant simplement x par X et C par sa valeur dans l'expression (a), et l'on a

$$S = 2\pi\sqrt{p}\int_0^X dx\sqrt{2x+p} = \frac{2}{3}\pi\sqrt{p(2X+p)^3} - \frac{2}{3}\pi p^2 = \frac{2}{3}\pi\left(\sqrt{p(2X+p)^3} - p^2\right).$$

Cubature des solides de révolution.

1787. *Formule générale du volume d'un solide de révolution.* Soit

$$y=f(x)$$

l'équation de la courbe méridienne AB (*fig.* 586) d'un solide de révolution dont l'axe est Ox. Considérant ce solide V comme formé de tranches infiniment minces comprises entre des plans perpendiculaires à Ox, comme l'une quelconque de ces tranches, celle engendrée par MPP'M' par exemple, peut à la limite être considérée comme un tronc de cône dont les rayons des bases sont $MP=y$ et $M'P'=y+dy$, et dont la hauteur est $PP'=dx$, le volume dV de cette tranche est (933)

$$dV = \frac{1}{3}\pi[y^2+(y+dy)^2+y(y+dy)]dx,$$

ou, en négligeant dy par rapport à y,

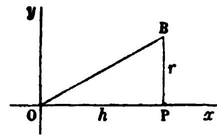
$$dV = \frac{1}{3}\pi(y^2+y^2+y^2)dx = \pi y^2 dx.$$

Par suite, le volume V correspondant à une méridienne AB a pour intégrale indéfinie

$$V = \pi \int y^2 dx. \qquad (1)$$

1788. *Applications.* 1° *Volume du cône* engendré par le triangle rectangle OBP tournant autour de l'axe Ox sur lequel se trouve le côté immobile OP. L'équation de la méridienne étant (1160)

Fig. 587.



$$y = ax,$$

substituant cette valeur de y dans l'équation générale (1) du numéro précédent, cette équation devient

$$V = \pi \int a^2x^2 dx = \frac{\pi a^2 x^3}{3} + C = \frac{1}{3}\pi a^2 x^2 x + C = \frac{1}{3}\pi y^2 x + C.$$

Comme pour $x = 0$ on a $V = 0$, cette dernière relation devient

$$0 = 0 + C, \quad \text{d'où} \quad C = 0.$$

Prenant l'intégrale précédente entre les limites $x = 0$ qui correspond à $y = 0$ et $x = h$ qui correspond à $y = r$, comme on a $C = 0$, le volume cherché est donc

$$V = \pi \int_0^h a^2x^2 dx = \frac{1}{3}\pi r^2 h. \qquad (928)$$

2° *Volume d'un ellipsoïde de révolution.* La méridienne a pour équation (1174)

Fig. 588.

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \quad \text{d'où} \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Substituant cette valeur de y^2 dans l'équation (1) du numéro précédent, on obtient

$$V = \pi \int \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) dx = \pi \int \frac{b^2a^2}{a^2} dx - \pi \int \frac{b^2}{a^2} x^2 dx =$$
$$= \pi b^2 x - \pi \frac{b^2}{a^2}\frac{x^3}{3} + C.$$

Comme pour $x = 0$ on a $V = 0$, et que l'intégrale précédente fournit $C = 0$, prenant cette intégrale entre les limites à $x = 0$ et $x = a$, on obtient pour la moitié du volume de l'ellipsoïde

$$V = \pi b^2 a - \pi \frac{b^2}{a^2}\frac{a^3}{3} = \frac{2}{3}\pi b^2 a,$$

et pour l'ellipsoïde entier

$$V = \frac{4}{3}\pi b^2 a. \qquad (a)$$

Si l'ellipse génératrice tournait autour de son petit axe, on aurait

$$V = \frac{4}{3}\pi a^2 b, \qquad (1210)$$

résultat qu'on obtient en remplaçant a par b et b par a dans la formule (a), et auquel on arriverait par la marche précédente, en remarquant que l'équation de l'ellipse serait

$$a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2, \quad \text{d'où} \quad y^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - x^2).$$

Centres de gravité des figures.

1789. *Moment et centre de gravité d'une figure.* Le centre de gravité d'un corps a été défini au n° 1560 d'après des considérations mécaniques; mais on peut, en faisant abstraction de la pesanteur, en donner une notion purement géométrique, qui permet de trouver sa position par le calcul, dès que la forme du corps, supposé homogène, est déterminée ou définie (1564).

Une figure (ligne, surface ou volume) peut être considérée comme composée d'éléments infiniment petits. Le produit d'un de ces éléments par sa distance à un plan est le *moment de cet élément par rapport à ce plan* (1532). Les moments de deux éléments situés de côtés différents du plan sont de signes contraires (1533). Le *moment d'une figure ou d'un système d'éléments* est la somme algébrique des moments des divers éléments qui composent la figure ou le système.

Le *centre de gravité d'un système d'éléments* (lignes, surfaces ou volumes) est le point qui est tel, que si tous les éléments y étaient concentrés, le moment de leur ensemble par rapport à un plan quelconque, c'est-à-dire le produit de la somme de tous les éléments par la distance de ce point au plan, serait égal à la somme algébrique des moments des divers éléments par rapport au même plan.

On prouverait qu'un tel point existe par la marche suivie au n° 1533, et l'on déterminera sa position comme pour le centre des forces parallèles (1534, 1562).

1790. *Centre de gravité d'une ligne droite.* D'abord le centre de gravité est sur la droite; car en le supposant en dehors, en y faisant passer un plan laissant toute la droite d'un même côté, le produit de la somme de tous les éléments par la distance du centre de gravité au plan serait nul, tandis que le moment de la droite par rapport au même plan ne le serait évidemment pas.

Le centre de gravité est le milieu de la droite; car par rapport à un plan quelconque passant par ce milieu, d'abord le produit de la somme de tous les éléments par la distance de ce milieu au plan sera nul, et de plus, comme deux éléments de la droite également éloignés du milieu se trouvent à égale distance du plan, mais de côtés différents, et que chaque élément d'une moitié de la droite a, par rapport au milieu, son

symétrique sur l'autre moitié, il en résulte que le moment de la droite totale sera aussi nul.

Remarque. Par un raisonnement analogue au précédent on établirait d'une manière générale : 1° que tout système d'éléments géométriques (lignes, surfaces ou volumes) possédant un centre de figure a son centre de gravité au centre de figure (1565); 2° que tout système composé de deux groupes d'éléments symétriques deux à deux par rapport à une droite ou par rapport à un plan (828 à 832) a son centre de gravité sur cette droite ou sur le plan.

1791. *Centre de gravité de plusieurs droites ou d'un contour polygonal.* Nous avons indiqué au n° 1562 la marche à suivre pour résoudre ce problème non-seulement pour des droites, mais aussi pour des surfaces ou des volumes, et nous avons dit qu'on pouvait le résoudre aussi à l'aide des moments, en opérant comme au n° 1534. Ajoutons que dans les formules de ce dernier numéro les composantes P,P'... sont remplacées par les longueurs des droites, ou les surfaces, ou les volumes; la résultante R par la somme des droites, ou des surfaces, ou des volumes, et que les coordonnées sont celles des centres de gravité des figures partielles et du centre de gravité cherché.

1792. *Centre de gravité d'une courbe plane quelconque* AB. Traçant deux axes rectangulaires Ox, Oy dans le plan de la courbe, le centre de gravité cherché G sera connu quand on aura ses coordonnées Y et X par rapport à ces axes.

Fig. 569.

y étant l'ordonnée d'un point M, le moment de l'élément $MM' = dL$ par rapport à Ox est

$$dL\left(y + \frac{dy}{2}\right),$$

ou, comme $\frac{dy}{2}$ peut être négligé par rapport à y,

$$y dL.$$

La somme algébrique de tous les moments élémentaires, c'est-à-dire le moment de la courbe est alors

$$\Sigma y dL = \int y dL,$$

et comme ce moment est égal à LY, L étant la longueur de la courbe, on a donc

$$Y = \int y dL \quad \text{d'où} \quad Y = \frac{\int y dL}{L}. \qquad (1)$$

Par rapport à l'axe Oy, on a de même

$$LX = \int x dL, \quad \text{d'où} \quad X = \frac{\int x dL}{L}. \qquad (2)$$

Remarque. Lorsque la courbe est donnée par son équation

$$y = f(x),$$

on en déduit (1785)

$$dL = \sqrt{(dy)^2 + (dx)^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

et

$$L = \int dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

puis l'on substitue ces valeurs dans les relations (1) et (2).

Lorsque les intégrales qui résultent de ces substitutions sont trop compliquées ou que les fonctions (1) et (2) sont inconnues, on a recours à la formule de Thomas Simpson (1782) pour calculer approximativement

$$\int y dL \quad \text{et} \quad \int x dL.$$

Pour cela, on divise par tâtonnement la courbe AB en un nombre pair n de parties égales; des points de division on abaisse des perpendiculaires sur Ox; on mesure ces perpendiculaires $y_0, y_1, y_2 \ldots y_n$, et faisant $\frac{L}{n} = \delta$, on a

$$\int y dL = \frac{\delta}{3}[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2})].$$

1793. *Centre de gravité d'un arc de cercle.* En nous reportant au n° 1568, le moment de l'élément MM' par rapport à l'axe OX (*fig.* 481), qui doit signifier ici l'axe des y, est

$$MM' \times ID \text{ ou } x dL,$$

et le moment de l'arc total est

$$\Sigma x dL = \int x dL.$$

Mais comme

$$MM' \times ID = PP' \times r$$

ou

$$x dL = r dy,$$

le moment de l'arc est aussi égal à

$$\Sigma r dy = r \Sigma dy = rc,$$

en désignant par c la corde AB, qui est bien égale à Σdy.

La distance X du centre de gravité G au centre O est alors, en désignant par a la longueur L de l'arc,

$$X = \frac{\int x dL}{L} = \frac{rc}{a}. \qquad (1)$$

L'arc étant de n degrés, on a (733)

$$a = \frac{2\pi r n}{360}.$$

De plus on a

$$\sin\frac{n}{2} = \frac{c}{2r}, \quad \text{d'où} \quad c = 2r\sin\frac{n}{2}.$$

Ces valeurs de a et de c substituées dans la relation (1) donnent

$$X = \frac{360\,r\sin\frac{n}{2}}{\pi n}.$$

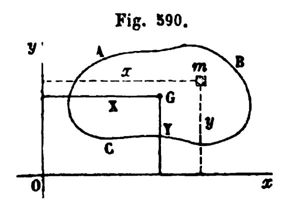
Pour $n = 180°$, par exemple, on a $\sin\frac{n}{2} = \sin 90° = 1$, et par suite

$$X = \frac{360\,r}{180\,\pi} = \frac{2r}{\pi} = \frac{2r}{\frac{22}{7}} = \frac{7}{11}\,r.$$

Ainsi le centre de gravité d'une demi-circonférence est très-approximativement situé aux $\frac{7}{11}$ du rayon à partir du centre.

1794. *Centre de gravité des surfaces planes et en général des surfaces et des solides quelconques. Solution générale.* Soit m un élément dS d'une surface limitée par une courbe plane quelconque ABC, et y la distance de cet élément à l'axe Ox tracé dans le plan de la surface. Le produit ydS est le moment de l'élément m, et le moment de toute la surface est (1789).

Fig. 590.



$$SY = \Sigma y\,dS = \int y\,dS, \quad \text{d'où} \quad Y = \frac{\int y\,dS}{S}. \qquad (1)$$

Par rapport à l'axe Oy, on a de même

$$SX = \int x\,dS, \quad \text{d'où} \quad X = \frac{\int y\,dS}{S}. \qquad (2)$$

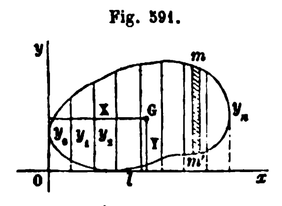
Si la surface n'était pas plane, au lieu d'employer deux axes Ox et Oy, on aurait recours à trois plans rectangulaires entre eux, et pour chacun de ces plans on aurait une formule semblable à celle (1); ce qui permettrait de déterminer les coordonnées X, Y et Z du centre de gravité par rapport aux trois plans.

Pour les solides on opère comme pour les surfaces; les formules sont identiques à celles (1); seulement les éléments de surface dS sont remplacés par des éléments de volume dV.

Dans la pratique, lorsqu'on ne peut établir les intégrales (1) et (2), ou

si elles sont trop compliquées, on a, comme nous l'avons fait au n° 1792 pour les courbes, recours à la formule de Thomas Simpson pour calculer ces expressions ainsi que la surface S.

Fig. 591.



Pour cela, on choisit les axes Ox et Oy tangents à la surface ; on divise la projection l de la surface sur Ox en un nombre pair n de parties égales $\frac{l}{n} = \delta$; par les points de division on mène des perpendiculaires à Ox; on mesure les portions y_0, y_1, y_2 ... y_n de ces perpendiculaires interceptées par la courbe, il peut arriver, et c'est le cas de la *fig.* 591, que les portions y_0 et y_n soient nulles. On a alors (1782)

$$S = \frac{\delta}{3}\,[y_0 + y_n + 4\,(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})].$$

Considérant un élément mm' limité à deux droites infiniment rapprochées et parallèles à Oy, la surface de cet élément est

$$dS = y dx,$$

en prenant pour y la longueur mm' limitée à la courbe. Par suite on a pour le moment de cet élément par rapport à Oy

$$x dS = xy dx,$$

et pour celui de la surface totale,

$$SX = \int xy dx, \quad \text{d'où} \quad X = \frac{\int xy dx}{S}.$$

Pour calculer $\int xy dx$, on pose

$$xy = y',$$

et l'on a approximativement pour cette intégrale

$$\int y' dx = \frac{\delta}{3}\,[y'_0 + y'_n + 4(y'_1 + y'_3 + \dots + y'_{n-1}) + 2\,(y'_2 + y'_4 + \dots + y'_{n-2})],$$

valeur dans laquelle :

$$\begin{aligned}
y'_0 &= y_0 x_0 = y_0 \times 0 = 0,\\
y'_1 &= y_1 x_1 = y_1 \delta,\\
y'_2 &= y_2 x_2 = 2 y_2 \delta,\\
y'_3 &= y_3 x_3 = 3 y_3 \delta,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
y'_n &= y_n x_n = n y_n \delta.
\end{aligned}$$

On a donc en définitive

$$\int xy dx = \frac{\delta^2}{3}\Big[n y_n + 4\,\big(y_1 + 3 y_3 + \dots + (n-1) y_{n-1}\big) + 2\,\big(2 y_2 + 4 y_4 + \dots + (n-2) y_{n-2}\big)\Big]$$

et

$$X = \frac{\delta\left[ny_n + 4\left(y_1 + 3y_3 + \ldots + (n-1)y_{n-1}\right) + 2\left(2y_2 + 4y_4 + \ldots + (n-2)y_{n-2}\right)\right]}{y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2})}.$$

En opérant pour l'axe Oy comme on vient de le faire pour Ox, et réciproquement, on obtiendrait de même la distance Y du centre de gravité à l'axe Ox; mais quand on a déterminé les éléments qui précèdent, il est plus simple d'opérer de la manière suivante.

z étant la distance du milieu, c'est-à-dire du centre de gravité de l'élément $mm' = dS = ydx$ à l'axe Ox, le moment de cet élément par rapport à cet axe est

$$z dS = zy dx,$$

et le moment de la surface totale par rapport au même axe est

$$SY = \int zy dx, \quad \text{d'où} \quad Y = \frac{\int zy\, dx}{S}.$$

Posant

$$zy = y',$$

on a

$$SY = \int y' dx = \frac{\delta}{3}[y'_0 + y'_n + 4(y'_1 + y'_3 + \ldots + y'_{n-1}) + 2(y'_2 + y'_4 + \ldots + y'_{n-2})];$$

formule dans laquelle

$$y'_0 = y_0 z_0,$$
$$y'_1 = y_1 z_1,$$
$$\cdots\cdots$$
$$y'_n = y_n z_n,$$

$z_0, z_1, z_2 \ldots z_n$ étant les distances des milieux des hauteurs y_0, y_1, $y_2 \ldots y_n$ de la surface à l'axe Ox.

On a alors

$$Y = \frac{y_0 z_0 + y_n z_n + 4(y_1 z_1 + y_3 z_3 + \ldots) + 2(y_2 z_2 + y_4 z_4 + \ldots)}{y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \ldots) + 2(y_2 + y_4 + \ldots)}.$$

1795. *Centre de gravité de la surface d'un triangle*. Nous avons démontré au n° 1569 que le centre de gravité se trouve au point de rencontre des trois médianes, et que ce point est aux deux tiers de chaque médiane à partir du sommet correspondant, ou encore que la distance du centre de gravité à la base du triangle est égale au tiers de la hauteur.

On peut déterminer la position du centre de gravité G d'un triangle ABC par le calcul, à l'aide de la formule générale du n° 1794,

$$Y = \frac{\int y dS}{S}.$$

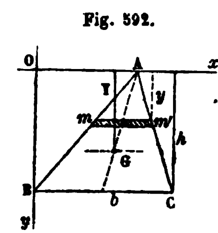


Fig. 592.

Menons par le sommet A un axe Ox parallèle à la base BC. Un élément mm' compris entre deux droites infiniment rapprochées et parallèles à BC a pour surface

$$dS = mm' \times dy,$$

et son moment est

$$ydS = y \times mm' \times dy.$$

Les deux triangles semblables Amm' et ABC donnant

$$\frac{mm'}{b} = \frac{y}{h}, \quad \text{d'où} \quad mm' = \frac{by}{h},$$

le moment élémentaire

$$ydS = \frac{by^2}{h}\, dy.$$

Le moment total est alors

$$SY = \int \frac{b}{h}\, y^2 dy = \frac{by^3}{3h} + C.$$

Prenant cette intégrale entre les limites $y = 0$ et $y = h$, on a en définitive pour le moment du triangle ABC, en faisant $S = \frac{bh}{2}$,

$$\frac{bh}{2}\, Y = \frac{bh^3}{3h},$$

d'où

$$Y = \frac{2}{3}\, h.$$

Ainsi le centre de gravité se trouve sur une parallèle menée à la base au tiers de la hauteur. On prouverait de même que cette propriété est commune aux deux autres côtés du triangle, et, géométriquement, on établirait que les trois parallèles se coupent en un même point, qui est le point de rencontre G des trois médianes.

Remarque. Voir les nos 1570 à 1574.

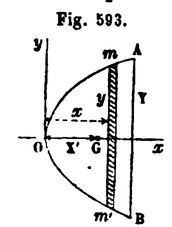


Fig. 593.

1796. *Centre de gravité d'un segment de parabole* limité à une droite AB perpendiculaire à l'axe principal Ox, l'équation de la parabole étant (1240)

$$y^2 = 2px.$$

Le centre de gravité G étant sur l'axe de symétrie Ox, il suffit de déterminer son abscisse OG = X'.

Un élément mm' compris entre deux droites infiniment rapprochées et parallèles à l'axe Oy a pour surface

$$dS = mm'\, dx = 2y\, dx,$$

et son moment est

$$x\,dS = 2xy\,dx.$$

Le moment du segment parabolique est alors

$$SX' = \int 2xy\,dx = \int 2x\sqrt{2px}\,dx = \int 2\sqrt{2p}\,x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{4}{5}\sqrt{2p}\,x^{\frac{5}{2}} + C.$$

Désignant par X et Y les coordonnées du point A, et prenant cette intégrale entre les limites $x = 0$ et $x = X$, on a pour le moment du segment considéré, puisque la constante s'annule pour $x = 0$,

$$SX' = \frac{4}{5}\sqrt{2p}\,X^{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}\sqrt{2pX}X^2 = \frac{4}{5}YX^2.$$

Comme (1778)

$$S = \frac{4}{3}YX,$$

on a donc

$$X' = \frac{\frac{4}{5}YX^2}{\frac{4}{3}YX} = \frac{3}{5}X.$$

1797. *Centre de gravité d'une zone* AA'BB' (1575). A cause de la symétrie, le centre de gravité G se trouve sur le rayon OC perpendiculaire aux plans AA', BB' des bases; il suffit donc de déterminer sa distance $OG = X$ au centre.

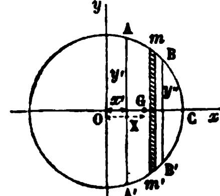


Fig. 594.

Prenons OC pour axe des x, et soit Oy la trace d'un plan perpendiculaire à Ox.

En raisonnant comme aux deux numéros précédents, un élément mm' de zone compris entre deux plans infiniment rapprochés et parallèles au plan Oy a pour surface (935)

$$dS = 2\pi R\,dx,$$

et son moment par rapport au plan Oy est

$$x dS = 2\pi R x dx.$$

Le moment de la zone est alors

$$SX = \int 2\pi R x\,dx = \pi R x^2 + C.$$

Prenant cette intégrale entre les limites $x = x'$ et $x = x''$, on a pour la zone considérée

$$SX = \pi R(x''^2 - x'^2),$$

et comme

$$S = 2\pi RH = 2\pi R(x'' - x'),$$

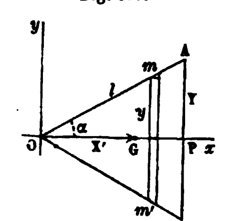
on a donc

$$X = \frac{\pi R(x''^2 - x'^2)}{2\pi R(x'' - x')} = \frac{1}{2}(x'' + x').$$

Ce qui montre que le centre de gravité G est au milieu de la hauteur H de la zone.

1798. *Centre de gravité de la surface latérale d'un cône droit.* Ce centre de gravité se trouve sur l'axe OP du cône; il s'agit donc de déterminer $OG = X'$. Prenons OP pour axe des x, et les moments par rapport à un plan Oy mené perpendiculairement à Ox par le sommet du cône.

Fig. 595.



L'élément de surface mm' compris entre deux plans infiniment rapprochés perpendiculaires à Ox a pour expression, en désignant par l le côté OA du cône (932),

$$dS = 2\pi\left(y + \frac{dy}{2}\right)dl,$$

ou en supprimant $\frac{dy}{2}$ par rapport à y,

$$dS = 2\pi y dl;$$

le moment de cet élément par rapport au plan Oy est alors

$$xdS = 2\pi yxdl.$$

Comme on a

$$\frac{dx}{dl} = \cos\alpha, \quad \text{d'où} \quad dl = \frac{dx}{\cos\alpha},$$

et

$$\frac{y}{x} = \text{tang}\,\alpha, \quad \text{d'où} \quad y = x\,\text{tang}\,\alpha,$$

on a en définitive

$$xdS = \frac{2\pi\,\text{tang}\,\alpha}{\cos\alpha}x^2dx.$$

Le moment de la surface latérale d'un cône droit est donc

$$X'S = \frac{2\pi\,\text{tang}\,\alpha}{\cos\alpha}\int x^2dx = \frac{2\pi\,\text{tang}\,\alpha}{\cos\alpha} \times \frac{x^3}{3} + C.$$

Désignant par X et Y les ordonnées du point A, et prenant l'intégrale précédente entre les limites $x = 0$ et $x = X$, on a pour le moment de la surface latérale du cône considéré, puisque la constante C s'annule,

$$X'S = \frac{2\pi\,\text{tang}\,\alpha}{\cos\alpha} \times \frac{X^3}{3}.$$

Comme (926)

$$S = \pi Y l,$$

ou, puisque

$$Y = X \operatorname{tang}\alpha, \quad \text{et} \quad l = \frac{X}{\cos\alpha},$$

$$S = \frac{\pi \operatorname{tang}\alpha}{\cos\alpha} X^2,$$

on a donc

$$X' = \frac{\frac{2\pi \operatorname{tang}\alpha}{\cos\alpha} \times \frac{X^3}{3}}{\frac{\pi \operatorname{tang}\alpha}{\cos\alpha} X^2} = \frac{2}{3} X.$$

Ainsi le centre de gravité de la surface latérale d'un cône droit est aux $\frac{2}{3}$ de la hauteur à partir du sommet. Cette position est analogue à celle du centre de gravité de la surface du triangle (1795).

1799. *Centre de gravité d'un solide quelconque.* Adoptant trois plans rectangulaires entre eux, et opérant pour chacun d'eux comme il a été indiqué au n° 1794, on obtient les trois équations

$$VX = \int x dV, \quad \text{d'où} \quad X = \frac{\int x dV}{V},$$

$$VY = \int y dV, \quad \text{d'où} \quad Y = \frac{\int y dV}{V},$$

$$VZ = \int z dV, \quad \text{d'où} \quad Z = \frac{\int z dV}{V}.$$

Dans la pratique, lorsqu'on ne peut établir les intégrales précédentes, ou si elles sont trop compliquées, comme pour les surfaces (1794), on a recours à la formule de Thomas Simpson (1782) pour calculer ces expressions ainsi que le volume V.

Pour cela, on choisit les trois plans rectangulaires tangents au solide. Soient Ox et Oz les intersections de deux de ces plans avec celui du papier, et déterminons la distance X du centre de gravité G du solide au plan Oz.

Fig. 596.

On mène parallèlement au plan Oz un plan A_n tangent au solide; on divise la portion l interceptée sur Ox par les deux plans Oz et A_n en un nombre pair n de parties égales $\frac{l}{n} = \delta$; par les points de division on mène des plans perpendiculaires à Ox; on mesure les aires $A_0, A_1, A_2 \ldots A_n$ des sections déterminées dans le solide par ces plans et par ceux Oz et A_n; les aires A_0 et A_n peuvent être nulles. On a alors (1784)

$$V = \frac{\delta}{3}[A_0 + A_n + 4(A_1 + A_3 + \ldots) + 2(A_2 + A_4 + \ldots)].$$

Un élément mm' du solide, déterminé par deux plans infiniment rapprochés et parallèles à Oz, a pour volume

$$dV = Adx,$$

A étant l'aire de la section mm' et dx l'épaisseur infiniment petite de l'élément.

Le moment de l'élément mm' par rapport au plan Oz est alors

$$xdV = Axdx,$$

et celui du volume total

$$VX = \int Axdx, \quad \text{d'où} \quad X = \frac{\int Axdx}{V}. \qquad (1)$$

Pour calculer $\int Axdx$, on pose

$$Ax = y,$$

et l'on a approximativement

$$\int Axdx = \frac{\delta}{3}\,[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \ldots) + 2(y_2 + y_4 + \ldots)].$$

formule dans laquelle

$$\begin{aligned} y_0 &= A_0x_0 = A_0 \times 0 = 0,\\ y_1 &= A_1x_1 = A_1\delta,\\ y_2 &= A_2x_2 = A_22\delta,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n &= A_ny_n = A_nn\delta. \end{aligned}$$

On a donc en définitive

$$\int Axdx = \frac{\delta^2}{3}\,[nA_n + 4(A_1 + 3A_3 + \ldots) + 2(2A_2 + 4A_4 + \ldots)].$$

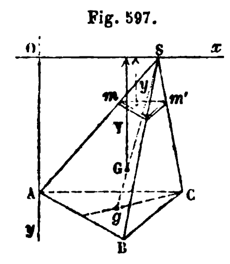
Substituant cette valeur et celle de V dans (1), on obtient

$$X = \frac{\delta[nA_n + 4(A_1 + 3A_3 + \ldots) + 2(2A_2 + 4A_4 + \ldots)]}{A_0 + A_n + 4(A_1 + A_3 + \ldots) + 2(A_2 + A_4 + \ldots)}.$$

On opérera de même pour avoir Z et Y; mais si les centres de gravité des sections A_0, A_1, A_2 ... sont faciles à déterminer, il conviendra d'avoir recours à la marche suivie au n° 1794 pour obtenir Y (1584).

1800. *Centre de gravité d'une pyramide quelconque* SABC. Toute section faite dans la pyramide par un plan parallèle à la base ayant son centre de gravité sur la droite Sg qui joint le sommet au centre de gravité de la base (1577), il en résulte qu'un élément quelconque mm' compris entre deux plans infiniment rapprochés et parallèles à la base a aussi son centre de gravité sur Sg, et que par suite le centre de gravité G de la pyramide est également sur Sg. Cela établi, on prouverait géométriquement, comme au n° 1577, que l'on a $SG = \frac{3}{4}\,Sg$; mais établissons cette égalité par le calcul.

Fig. 597.



Menons par le sommet S un plan parallèle à la base ABC, soit Ox la trace de ce plan sur celui du papier.

b étant la base de l'élément mm', qu'à la limite on peut supposer être un prisme, son volume est

$$dV = b\,dy,$$

et son moment par rapport au plan Ox est

$$y\,dV = yb\,dy.$$

Le moment d'une pyramide a donc pour expression

$$YV = \int yb\,dy. \qquad (1)$$

B et H étant la base et la hauteur de la pyramide, on a (907)

$$V = \frac{1}{3}\,BH.$$

Comme de plus on a

$$\frac{b}{B} = \frac{y^2}{H^2}, \qquad \text{d'où} \qquad b = \frac{B}{H^2}y^2,$$

remplaçant V et b par ces valeurs dans (1), il vient

$$\frac{1}{3}\,BHY = \frac{B}{H^2}\int y^3 dy = \frac{B}{H^2} \times \frac{y^4}{4} + C.$$

Prenant cette intégrale entre les limites $y = 0$ et $y = H$, on obtient pour le moment de la pyramide considérée

$$\frac{1}{3}\,BHY = \frac{B}{H^2} \times \frac{H^4}{4} = \frac{BH^2}{4};$$

d'où

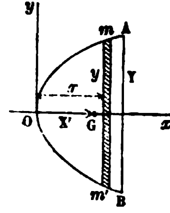
$$Y = \frac{3BH^2}{4BH} = \frac{3}{4}\,H.$$

Le centre de gravité se trouvant sur Sg et à une distance du plan Ox égale aux 3/4 de H, on a bien

$$SG = \frac{3}{4}\,Sg.$$

1801. *Centre de gravité des solides de révolution.* Les formules générales que nous avons posées au commencement du n° 1799 pour un solide quelconque s'appliquent évidemment aux solides de révolution. Mais comme, à cause de la symétrie, le centre de gravité d'un solide de révolution se trouve sur l'axe Ox de rotation, et que sa position se trouve déterminée dès que l'on connaît sa distance $OG = X'$ à un plan Oy perpendiculaire à Ox, une seule équation suffit. Ainsi l'on a

Fig. 598.



$$VX' = \int x dV, \quad \text{d'où} \quad X' = \frac{\int x dV}{V}.$$

Le volume d'un élément mm' limité à deux plans infiniment rapprochés perpendiculaires à Ox étant (1787)

$$dV = \pi y^2 dx,$$

le volume

$$V = \pi \int y^2 dx.$$

De plus, le moment de l'élément dV étant

$$x dV = \pi y^2 x dx,$$

le moment du solide total est

$$VX' = \pi \int y^2 x dx, \quad \text{d'où} \quad X' = \frac{\pi \int y^2 x dx}{\pi \int y^2 dx}. \qquad (1)$$

Lorsque la valeur de V est connue, on peut la substituer de suite au dénominateur de l'expression (1), et n'avoir à calculer que l'intégrale du numérateur. Mais les intégrales des deux termes ont une telle analogie, la valeur de l'une découle si facilement de la valeur de l'autre, que le plus généralement il ne peut y avoir avantage à substituer à l'une l'expression de la valeur de V.

1[re] *Application. Centre de gravité d'un paraboloïde de révolution.* L'équation de la courbe méridienne ou génératrice OA étant (1240)

$$y^2 = 2px,$$

substituant cette valeur de y^2 dans l'équation (1), on a, en prenant les intégrales entre $x = 0$ et $x = X$, et en remarquant que les constantes s'annulent,

$$X' = \frac{2p\int_0^X x^2 dx}{2p\int_0^X x dx} = \frac{\frac{1}{3}X^3}{\frac{1}{2}X^2} = \frac{2}{3}X.$$

2[e] *Application. Centre de gravité d'un cône droit.* La courbe génératrice OA étant une droite qui a pour équation (1160)

$$y = ax,$$

substituant cette valeur de y dans l'équation (1), on obtient, en prenant les intégrales entre les limites $x = 0$ et $x = X$,

$$X' = \frac{a^2\int_0^X x^3 dx}{a^2\int_0^X x^2 dx} = \frac{\frac{1}{4}X^4}{\frac{1}{3}X^3} = \frac{3}{4}X.$$

Résultat identique à celui fourni par la pyramide (1800), et qu'il convient de comparer à celui donné par la surface latérale du cône (1798).

3° *Application. Centre de gravité d'un segment sphérique* AA'BB' (*fig.* 594). La courbe méridienne AB ayant pour équation (1166)

$$y^2 = r^2 - x^2,$$

l'équation générale (1) devient, en y substituant cette valeur de y^2, et en prenant les intégrales entre les limites $x = x'$ et $x = x''$,

$$X' = \frac{\int_{x'}^{x''} r^2 x dx - \int_{x'}^{x''} x^3 dx}{\int_{x'}^{x''} r^2 dx - \int_{x'}^{x''} x^2 dx} = \frac{r^2\left(\frac{x''^2}{2} - \frac{x'^2}{2}\right) - \frac{x''^4}{4} + \frac{x'^4}{4}}{r^2(x'' - x') - \frac{x''^3}{3} + \frac{x'^3}{3}} =$$

$$= \frac{\frac{r^2}{2}(x''^2 - x'^2) - \frac{1}{4}(x''^4 - x'^4)}{r^2(x'' - x') - \frac{1}{3}(x''^3 - x'^3)}.$$

Appliquant cette formule à la demi-sphère, ce qui revient à y faire $x' = 0$ et $x'' = r$, on obtient

$$X' = \frac{\frac{1}{2}r^4 - \frac{1}{4}r^4}{r^3 - \frac{1}{3}r^3} = \frac{\frac{1}{4}r^4}{\frac{2}{3}r^3} = \frac{3}{8}r.$$

Ainsi le centre de gravité d'une demi-sphère est distant du centre d'une quantité égale aux $\frac{3}{8}$ du rayon.

1802. *Théorème de Guldin.* 1° *Surface de révolution engendrée par une courbe plane quelconque.* Il suffit d'appliquer ici les notations du calcul différentiel et du calcul intégral au raisonnement du n° 1585. L'axe de révolution CD (*fig.* 491) étant pris pour l'axe des x, et x et y étant les coordonnées du point M, la surface dS engendrée par l'élément dL = MN de la courbe génératrice AB est, à la limite,

$$dS = 2\pi y\, dL.$$

La surface engendrée par la courbe totale AB = L est alors

$$\int dS \text{ ou } S = 2\pi \int y dL.$$

ydL étant le moment de l'élément MN par rapport à l'axe des x, le moment de la courbe totale est, en désignant par Y l'ordonnée du centre de gravité G de cette courbe,

$$YL = \int y dL.$$

Par suite, on a, comme au n° 1585,

$$S = 2\pi YL.$$

Si, par exemple, la courbe génératrice est une circonférence de rayon r qui tourne autour d'un axe extérieur situé dans son plan, on a

$$L = 2\pi r \quad \text{et} \quad S = 4\pi^2 Yr.$$

2° *Solide de révolution engendré par une courbe plane quelconque* ABC (*fig.* 492). L'axe de révolution DE étant pris pour l'axe des x, et y et x étant les coordonnées du point M et y' et x' celles du point m, le volume dV engendré par l'élément de surface dS = MNmn est

$$dV = \pi(y^2 - y'^2)dx = \pi(y + y')\,(y - y')dx.$$

Le volume engendré par la surface totale ABC est alors

$$\int dV \text{ ou } V = \pi \int (y + y')\,(y - y')dx.$$

$\frac{y + y'}{2}$ étant l'ordonnée du centre de gravité de l'élément MNmn et $(y - y')dx$ étant la surface de cet élément, le moment de la surface ABC est, Y étant l'ordonnée du centre de gravité G de cette surface,

$$SY = \frac{1}{2}\int (y + y')\,(y - y')dx.$$

Par suite, on a, comme au n° 1585,

$$V = 2\pi YS.$$

Si, par exemple, la surface de révolution est un cercle de rayon r, on a $S = \pi r^2$, et

$$V = 2\pi Y \times \pi r^2 = 2\pi^2 Yr^2.$$

Formule dans laquelle Y est l'ordonnée du centre du cercle générateur.

Si la surface génératrice est un demi-cercle tournant autour de son diamètre, on a (1573)

$$Y = \frac{2}{3}\, r\, \frac{2r}{\pi r} = \frac{4}{3}\,\frac{r}{\pi}, \quad S = \frac{1}{2}\,\pi r^2$$

et

$$V = 2\pi \times \frac{4}{3}\,\frac{r}{\pi} \times \frac{1}{2}\,\pi r^2 = \frac{4}{3}\,\pi r^3.$$

C'est qu'en effet le volume engendré est une sphère (947).

Rayons de gyration et moments d'inertie.

1803. Aux n°s 1588 et 1589 nous avons donné les définitions du moment d'inertie et du rayon de gyration d'un corps tournant autour d'un axe fixe, et nous avons vu que le moment d'inertie du volume d'un corps était représenté par

$$\sum ur^2 = R^2 \sum u = UR^2, \quad \text{d'où} \quad R^2 = \frac{\sum ur^2}{U},$$

ou, en employant les notations du calcul intégral,

$$R^2 = \frac{\int ur^2}{U}.$$

Telle est l'expression générale de la valeur du carré du rayon de gyration R. Appliquons-la à quelques exemples.

1° *Rayon de gyration d'une tige homogène d'une longueur* AB = l *et d'une très-petite section* s, *tournant autour de l'axe* Ay *passant par son extrémité.*

Fig. 598.

m étant un élément de la tige, sa longueur est dl, son volume

$$u = s\mathrm{d}l,$$

et son moment d'inertie

$$ux^2 = sx^2\mathrm{d}l.$$

Comme on a

$$\mathrm{d}l = \frac{\mathrm{d}x}{\sin\alpha},$$

ce moment d'inertie élémentaire peut s'écrire

$$ux^2 = \frac{s}{\sin\alpha}x^2\mathrm{d}x.$$

Le moment d'inertie d'une tige a alors pour expression générale

$$\Sigma ux^2 = UR^2 = \frac{s}{\sin\alpha}\int x^2\mathrm{d}x = \frac{s}{\sin\alpha}\frac{x^3}{3} + C.$$

Prenant cette intégrale entre les limites $x = 0$ et $x = BC$, on obtient pour la tige considérée AB, puisque la constante s'annule pour $x = 0$,

$$UR^2 = \frac{s}{\sin\alpha}\frac{\overline{BC}^3}{3};$$

d'où, en remarquant que $U = sl = s\frac{BC}{\sin\alpha}$,

$$R^2 = \frac{\frac{s}{\sin\alpha}\frac{\overline{BC}^3}{3}}{\frac{s}{\sin\alpha}BC} = \frac{1}{3}\overline{BC}^2. \qquad (1590)$$

2° *Rayon de gyration d'un cylindre droit à base circulaire tournant autour de son axe.* Soient ρ le rayon du cylindre et l sa longueur.

Un élément compris entre deux surfaces cylindriques ayant même axe que le cylindre a pour volume, en désignant par x le rayon de la plus petite de ces deux surfaces et par $x + \mathrm{d}x$ celui de la plus grande,

$$u = [\pi(x + \mathrm{d}x)^2 - \pi x^2]l,$$

ou, en effectuant les calculs, simplifiant et négligeant la quantité infiniment petite du second ordre $\pi(\mathrm{d}x)^2 l$,

$$u = 2\pi lx\mathrm{d}x.$$

Le moment d'inertie de cet élément est alors

$$ux^2 = 2\pi l x^3 dx,$$

et par suite le moment d'inertie d'un cylindre est

$$UR^2 = 2\pi l \int x^3 dx = 2\pi l \frac{x^4}{4} + C. \qquad (1)$$

Prenant cette intégrale entre les limites $x = 0$ et $x = \rho$, on a pour le cylindre considéré

$$UR^2 = \frac{1}{2} \pi l \rho^4;$$

d'où l'on tire, en remplaçant U par sa valeur $\pi\rho^2 l$,

$$R^2 = \frac{\pi l \rho^4}{2\pi\rho^2 l} = \frac{1}{2} \rho^2. \qquad (1593)$$

3° *Pour une jante cylindrique dont le rayon extérieur est* ρ *et celui intérieur* ρ', on prend l'intégrale (1) du 2° entre les limites $x = \rho'$ et $x = \rho$, ce qui donne

$$UR^2 = \frac{\pi l}{2} (\rho^4 - \rho'^4),$$

d'où, puisque

$$U = (\pi\rho^2 - \pi\rho'^2) l,$$

$$R^2 = \frac{\pi l (\rho^4 - \rho'^4)}{2\pi(\rho^2 - \rho'^2) l} = \frac{1}{2} (\rho^2 + \rho'^2). \qquad (1594)$$

4° *Rayon de gyration d'un cône droit à base circulaire tournant autour de son axe.* Soient h la hauteur du cône et ρ le rayon de sa base.

Prenant l'axe du cône ou de rotation pour l'axe des x, le volume d'un élément déterminé par deux plans infiniment rapprochés et perpendiculaires à cet axe est

$$u = \pi y^2 dx,$$

et son moment d'inertie est, d'après le 2°,

$$\frac{1}{2} uy^2 = \frac{1}{2} \pi y^4 dx.$$

Comme on a

$$\frac{dx}{dy} = \frac{h}{\rho}, \quad \text{d'où} \quad dx = \frac{h}{\rho} dy,$$

ce moment élémentaire est donc

$$\frac{1}{2} uy^2 = \frac{\pi h}{2\rho} y^4 dy.$$

Le moment d'inertie d'un cône droit a alors pour expression générale

$$\Sigma \frac{1}{2} uy^2 = UR^2 = \frac{\pi h}{2\rho} \int y^4 dy = \frac{\pi h}{10\rho} y^5 + C.$$

Prenant cette intégrale entre les limites $y = 0$ et $y = \rho$, on a pour le

cône considéré

$$UR^2 = \frac{\pi h}{10}\rho^4;$$

d'où, puisque

$$U = \frac{1}{3}\pi\rho^2 h,$$

$$R^2 = \frac{3\pi h\rho^4}{10\pi\rho^2 h} = \frac{3}{10}\rho^2. \qquad (1595)$$

1804. *Rayon de gyration d'un corps géométrique quelconque.* Prenons un système de trois axes rectangulaires entre eux, l'axe de rotation, qui se projette en O, étant l'un d'eux. u étant le volume d'un élément situé à la distance

Fig. 600.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

son moment d'inertie est

$$ur^2 = ux^2 + uy^2.$$

Le moment d'inertie du corps entier est alors

$$\sum ur^2 = UR^2 = \sum ux^2 + \sum uy^2. \qquad (1)$$

Chacune des deux sommes $\sum ux^2$ et $\sum uy^2$ qui forment la valeur de UR^2 se calcule séparément. Considérant une tranche du corps comprise entre deux plans infiniment voisins perpendiculaires à l'axe des x, A étant la section faite dans le corps par ces plans, le volume de la tranche est Adx, et comme chaque élément de la tranche donne la même valeur pour ux^2, on a pour la tranche entière $\sum ux^2 = Ax^2dx$. Par conséquent pour le corps entier on a

$$\sum ux^2 = \int Ax^2 dx.$$

Le degré d'exactitude du calcul de cette intégrale dépend évidemment de la section A, qui peut être constante, ou varier suivant une loi déterminée par rapport à x, ou encore varier d'une manière quelconque.

En considérant le corps comme composé de tranches infiniment minces déterminées par des plans perpendiculaires à l'axe des y, B étant la section variable déterminée dans le corps par ces plans, on obtient de même

$$\sum uy^2 = \int By^2 dy.$$

Substituant dans la relation (1), on obtient

$$UR^2 = \int Ax^2dx + \int By^2dy, \quad \text{d'où} \quad R^2 = \frac{\int Ax^2dx + \int By^2dy}{U}. \qquad (a)$$

Appliquons cette formule à quelques exemples.

1° *Rayon de gyration d'un parallélipipède rectangle tournant autour de l'une de ses arêtes.* L'arête c étant l'axe de rotation, et celles a et b se confondant avec les axes des x et des y, d'abord les sections A et B sont constantes dans toute l'étendue du corps, et comme on a

Fig. 601.

$$A = bc \quad \text{et} \quad B = ac,$$

on a donc

$$UR^2 = bc\int_0^a x^2 dx + ac\int_0^b y^2 dy = bc\frac{a^3}{3} + ac\frac{b^2}{3};$$

d'où, en remarquant que U ou $\Sigma u = abc$,

$$R^2 = \frac{\frac{1}{3}abc(a^2+b^2)}{abc} = \frac{1}{3}(a^2+b^2). \qquad (1599)$$

2° *Rayon de gyration d'un cylindre droit à base demi-parabolique* ABC *tournant autour d'un axe qui se projette en* A. Comptant les coordonnées par rapport aux axes Bx et By de la parabole BC, un élément situé à la distance r de l'axe de rotation A donnant, en désignant AB par a et AC par b,

Fig. 602.

$$r^2 = (a-x)^2 + y^2,$$

il en résulte qu'on a

$$\Sigma ur^2 = \Sigma u(a-x)^2 + \Sigma uy^2$$

ou

$$UR^2 = \int_0^a A(a-x)^2 dx + \int_0^b By^2 dy.$$

Le rayon de gyration étant indépendant de la longueur du cylindre, supposons cette longueur égale à 1. On a alors pour une section quelconque A ou B, l'équation de BC étant $y^2 = 2px$,

$$A = y = \sqrt{2px} \quad \text{et} \quad B = a - x = a - \frac{y^2}{2p}.$$

Par suite on a

$$\int_0^a A(a-x)^2 dx = \sqrt{2p}\int_0^a x^{\frac{1}{2}}(a^2 - 2ax + x^2)dx =$$

$$= \sqrt{2p}\left(\frac{2}{3}a^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}a^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{7}a^{\frac{7}{2}}\right) = \frac{16}{105}\sqrt{2pa}\,a^3 = \frac{16}{105}ba^3,$$

$$\int_0^b By^2 dy = \int_0^b\left(ay^2 - \frac{y^4}{2p}\right)dy = \frac{1}{3}ab^3 - \frac{1}{5}\frac{b^5}{2p} = \frac{2}{15}ab^3;$$

donc

$$UR^2 = \frac{16}{105} ba^3 + \frac{2}{15} ab^3 = \frac{2}{15} ab\left(\frac{8}{7}a^2 + b^2\right).$$

Comme d'ailleurs on a

$$\Sigma u \text{ ou } U = \int_0^a A\,dx = \sqrt{2p}\int_0^a x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{2p}\,a^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}ab,$$

on conclut

$$R^2 = \frac{1}{5}\left(\frac{8}{7}a^2 + b^2\right) \qquad (1601)$$

Remarque. Quand les intégrales $\int Ax^2 dx$ et $\int By^2 dy$ ne peuvent être obtenues algébriquement ou quand elles sont trop compliquées, on a recours à la formule de Thomas Simpson (1782).

Ainsi pour calculer approximativement $\int Ax^2 dx$, on divise la plus grande valeur de x fournie par le corps en un nombre pair n de parties égales $\delta = \frac{l}{n}$; par les points de division et aux extrémités de l on mène des plans perpendiculaires à l'axe des x; on détermine les surfaces A_0, A_1, A_2,... A_n des sections faites dans le corps par ces plans, et posant

$$\begin{aligned}
y_0 &= A_0 x_0^2 = A_0 \times 0 = 0\\
y_1 &= A_1 x_1^2 = A_1\delta^2\\
y_2 &= A_2 x_2^2 = A_2 4\delta^2\\
y_3 &= A_3 x_3^2 = A_3 9\delta^2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n &= A_n x_n^2 = A_n n^2\delta^2,
\end{aligned}$$

on a approximativement

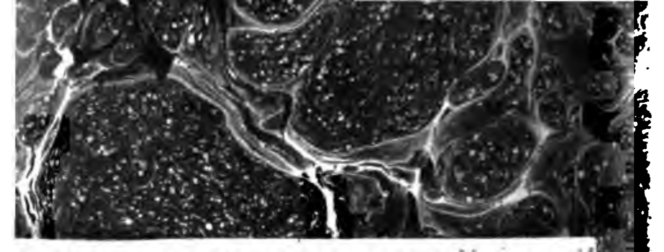
$$\int Ax^2 dx = \frac{\delta}{3}[y_n + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2})] =$$

$$= \frac{\delta^3}{3}[n^2A_n + 4(A_1 + 9A_3 + 25A_5 + \ldots) + 2(4A_2 + 16A_4 + 36A_6 + \ldots)].$$

On calcule de même $\int By^2 dy$, et divisant la somme des résultats obtenus par $U = \sum u = \int A dx$, que l'on calcule également à l'aide de la formule de Thomas Simpson (1784), on a R^2 avec une approximation qui est suffisante dans la pratique.

FIN.

Paris. — Imprimé par E. Thunot et Ce, rue Racine, 26.




YC105332
TH151
C63
12696

